Processus stochastiques – Partiel

19 Mars 2019

Les trois exercices sont indépendants et peuvent être traités dans le désordre. Une question peut être passée et son résultat admis pour la suite. Les notes de cours sont autorisées.

Exercice 1 (Question de cours / Temps d'arrêt)**.** Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ une filtration.

1. Rappeler la définition précise d'une filtration et d'un $(\mathcal{F}_n)$-temps d'arrêt.
2. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de v.a. i.i.d. et $T = \inf\{n \geq 0, X_n = 0\}$. On note $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$. Montrer que T est un $(\mathcal{F}_n)$-temps d'arrêt. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer que $T \wedge k = \min(T, k)$ est un $(\mathcal{F}_n)$-temps d'arrêt.

Exercice 2 (Conditionnements en tous genres)**.** Soit X de loi $\mathcal{E}(1)$. Soit Y admettant la densité conditionnelle sachant X suivante :

$$f_{Y\,|\,X=x}(y) = \mathbf{1}_{[x,x+1]}(y).$$

1. Notons $S = Y - X$. Calculer la densité de (X, S). Que peut-on dire sur ces deux variables ?
2. Quelle est la loi de S ? Quelle est la loi de S sachant $X = x$?
3. Montrer que la densité de S sachant Y vaut, pour $y > 0$ (on note $y \wedge 1 = \min(y, 1)$),

$$f_{S|Y=y}(s) = \frac{e^s}{e^{y\wedge 1} - 1}\mathbf{1}_{[0,y\wedge 1]}(s).$$

4. Soit U de loi $\mathcal{U}([0, 1])$ indépendante de (X, Y) et $T = UY + (1 - U)X$.
   (a) Calculer $\mathbb{E}[T \,|\, (X, Y)]$, $\mathbb{E}[T \,|\, (X, S)]$ et $\mathbb{E}[T \,|\, (Y, S)]$.
   (b) En déduire $\mathbb{E}[T \,|\, X]$, $\mathbb{E}[T \,|\, Y]$, $\mathbb{E}[T \,|\, S]$ et $\mathbb{E}[T]$.

Exercice 3 (Chaîne de Markov sur les liens)**.** Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur E (fini ou dénombrable) de matrice P. Pour tout $n \geq 0$, on pose $Y_n = (X_n, X_{n+1})$ et on note $T = \{(i, j) \in E^2,\, P_{ij} > 0\}$.

1. Montrer que $(Y_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov sur T.
2. Calculer la matrice de transition Q de (Y_n) : c'est-à-dire calculer $Q_{ij\to k\ell} = \mathbb{P}\{Y_1 = (k, \ell)|\, Y_0 = (i, j)\}$ en fonction de P pour tout (i, j) et $(k, \ell) \in T$.
3. En déduire que pour tout i, j, k tels que $(i, j) \in T$ et $(j, k) \in T$, $Q_{ij\to jk} > 0$.
4. Soit (i, j, k, ℓ) tel que $(i, j) \in T$ et $(k, \ell) \in T$. Montrer que pour tout $n \geq 0$,

$$P^{(n)}_{jk} > 0 \Rightarrow Q^{(n+1)}_{ij\to k\ell} > 0,$$

   où $P^{(n)}$ et $Q^{(n+1)}$ sont les puissances matricielles de P et Q.

   On suppose dans la suite que la chaîne (X_n) est irréductible apériodique.

5. Montrer que (Y_n) est irréductible apériodique.

6. Soit $(\pi(i))_{i\in E}$ une probabilité invariante pour (X_n). Montrer que $\mu(i,j) = \pi(i)P_{ij}$ défini une probabilité invariante pour (Y_n).

Application : Soient $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ et $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ deux suites indépendantes de v.a. i.i.d. telles que

$$\mathbb{P}(\varepsilon_n = -1) = \mathbb{P}(\varepsilon_n = +1) = 1/2 \text{ et } \mathbb{P}(\gamma_n = -1) = \mathbb{P}(\gamma_n = +1) = 1/2.$$

Soit $N > 0$ un entier, on note $E = \mathbb{Z}/(2N\mathbb{Z})$ (on identifie $2N$ à 0). On définit $(X_n)_{n\geq 0}$ par : $X_0 \in E$ indépendante de $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ et $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ et

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n + \frac{\varepsilon_n+\gamma_n}{2} & \text{si } X_n \text{ est pair,} \\ X_n + \varepsilon_n\gamma_n & \text{si } X_n \text{ est impair.} \end{cases}$$

7. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov et donner sa matrice de transition P.
8. Montrer que la chaîne est irréductible et apériodique.
9. Exhiber la probabilité invariante de la chaîne.
10. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = 2/(3N)$ si k est pair et $1/(3N)$ sinon. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n \text{ est pair}) = 2/3$ et $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n \text{ est impair}) = 1/3$.
11. En utilisant les résultats de la première partie, calculer les limites des quatre cas de figure :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n \text{ est pair/impair et } X_{n+1} \text{ est pair/impair}).$$

Est-ce que ces résultats sont cohérents avec ceux de la question 11 ?