

Processus stochastiques – Éléments de correction

19 Mars 2019

Exercice 1 (QUESTION DE COURS / TEMPS D'ARRÊT).

1. Une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ est une suite croissante de sous-tribus de \mathcal{F} . Un temps d'arrêt T vérifie $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ pour tout $n \geq 0$
2. Pour tout n , $\{T \leq n\} = \{\exists i \leq n, X_i = 0\} = \cup_{i=0}^n \{X_i = 0\} \in \mathcal{F}_n$ donc c'est un temps d'arrêt.
Soit $k \in \mathbb{N}$ et $n \geq 0$. Si $n < k$, alors $\{T \wedge k \leq n\} = \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$. Si $n \geq k$, alors $\{T \wedge k \leq n\} = \Omega \in \mathcal{F}_n$.

Exercice 2 (CONDITIONNEMENTS EN TOUS GENRES).

1. La densité de (X, Y) est $f_{(X,Y)}(x, y) = e^{-x} \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x) \mathbf{1}_{[0,1]}(y-x)$ et donc la densité de (X, S) est $f_{(X,S)}(x, s) = e^{-x} \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x) \mathbf{1}_{[0,1]}(s) = f_X(x) f_S(s)$. Les deux variables sont indépendantes.
2. La loi de S est $\mathcal{U}([0, 1])$. Même chose pour la loi conditionnelle vu que S est indépendante de X .
3. La densité de (S, Y) est $f_{(S,Y)}(s, y) = e^{s-y} \mathbf{1}_{[0,1]}(s) \mathbf{1}_{]-\infty, y]}(s)$. Donc la densité de Y est $f_Y(y) = e^{-y} (e^{y \wedge 1} - 1) \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(y)$. On en déduit facilement le résultat annoncé en voyant que $\mathbf{1}_{[0,1]}(s) \mathbf{1}_{]-\infty, y]}(s) = \mathbf{1}_{[0, y \wedge 1]}(s)$.
4.
 - (a) $\mathbb{E}[T | (X, Y)] = \mathbb{E}[UY | (X, Y)] + \mathbb{E}[(1-U)X | (X, Y)] = \mathbb{E}[U]X + \mathbb{E}[1-U]Y$ par indépendance entre U et (X, Y) . Mais $\mathbb{E}[U] = 1/2$ donc $\mathbb{E}[T | (X, Y)] = \frac{X+Y}{2}$. De même, $\mathbb{E}[T | (X, S)] = X + \frac{1}{2}S$ et $\mathbb{E}[T | (Y, S)] = Y - \frac{1}{2}S$.
 - (b) $\mathbb{E}[T | X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[T | (X, S)] | X] = \mathbb{E}[X + \frac{1}{2}S | X] = X + \frac{1}{2}\mathbb{E}[S] = X + 1/4$ par indépendance entre X et S . De même, $\mathbb{E}[T | S] = 1 + \frac{1}{2}S$. On en déduit facilement $\mathbb{E}[T] = 5/4$. Le calcul de $\mathbb{E}[T | Y]$ est plus complexe. On peut calculer

$$\mathbb{E}[S | Y = y] = \int s f_{S|Y=y}(s) ds = \frac{e^{y \wedge 1} [(y \wedge 1) - 1] + 1}{e^{y \wedge 1} - 1},$$

pour en déduire que $\mathbb{E}[T | Y] = Y - \frac{e^{Y \wedge 1} [(Y \wedge 1) - 1] + 1}{2(e^{Y \wedge 1} - 1)}$.

Exercice 3 (CHAÎNE DE MARKOV SUR LES LIENS).

1. Soit $\mathbf{i}_{n+1} = (i_{n+1}, j_{n+1}), \dots, \mathbf{i}_0 = (i_0, j_0) \in T$ tels que pour tout $0 \leq k \leq n$, $j_k = i_{k+1}$. Alors

$$\mathbb{P}(Y_{n+1} = \mathbf{i}_{n+1} | Y_n = \mathbf{i}_n, \dots, Y_0 = \mathbf{i}_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1}, X_{n+2} = j_{n+1} | X_{n+1} = j_n, X_n = i_n, \dots, X_0 = i_0).$$

On trouve

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_{n+1} = \mathbf{i}_{n+1} | Y_n = \mathbf{i}_n, \dots, Y_0 = \mathbf{i}_0) &= \mathbb{P}(X_{n+2} = j_{n+1} | X_{n+1} = i_{n+1}, X_n = i_n, \dots, X_0 = i_0) \\ &= \mathbb{P}(X_{n+2} = j_{n+1} | X_{n+1} = i_{n+1}, X_n = i_n) \end{aligned}$$

car (X_n) est markov (on pourrait enlever le conditionnement par rapport à $X_n = i_n$ mais on en aura besoin après). Finalement, la dernière expression est bien

$$\mathbb{P}(Y_{n+1} = \mathbf{i}_{n+1} | Y_n = \mathbf{i}_n)$$

car $i_{n+1} = j_n$.

2. $Q_{ij \rightarrow k\ell} = P_{k\ell} \mathbf{1}_{j=k}$.
3. Comme $(j, k) \in T$, $P_{jk} > 0$ et donc $Q_{ij \rightarrow jk} > 0$.
4. On écrit $Q_{ij \rightarrow k\ell}^{(n+1)} = \mathbb{P}(Y_{n+1} = (k, \ell) | Y_0 = (i, j)) = \mathbb{P}(X_{n+1} = k, X_{n+2} = \ell | X_0 = i, X_1 = j)$. Par la propriété de Markov, on peut simplifier en

$$\begin{aligned} Q_{ij \rightarrow k\ell}^{(n+1)} &= \mathbb{P}(X_{n+1} = k, X_{n+2} = \ell | X_1 = j) \\ &= \mathbb{P}(X_{n+2} = \ell | X_{n+1} = k) \mathbb{P}(X_{n+1} = k | X_1 = j) = P_{k\ell} P_{jk}^{(n)} > 0, \end{aligned}$$

par hypothèse.

5. Comme (X_n) est irréductible apériodique, il existe n tel que $P^{(n)} > 0$. D'après la question précédente on a donc : pour tout (i, j, k, ℓ) tel que $(i, j) \in T$ et $(k, \ell) \in T$, $Q_{ij \rightarrow k\ell}^{(n+1)} > 0$. Ce qui prouve le caractère irréductible apériodique.
6. On pose $\mu(i, j) = \pi(i)P_{ij}$ pour tout $(i, j) \in T$. Montrons que $\mu Q = Q$. Soit $(k, \ell) \in T$,

$$\mu Q(k, \ell) = \sum_{(i,j) \in T} \mu(i, j) Q_{ij \rightarrow k\ell} = \sum_{(i,j) \in T} \pi(i) P_{ij} P_{k\ell} \mathbf{1}_{j=k} = \sum_{i \in E} \pi(i) P_{ik} P_{k\ell} = \pi(k) P_{k\ell} = \mu(k, \ell).$$

Application :

7. Il suffit de voir que (X_n) vérifie $X_{n+1} = \varphi(X_n, Z_{n+1})$ avec $Z_n = (\varepsilon_n, \gamma_n)$ i.i.d. On trouve $P_{ij} = \frac{1}{4} \mathbf{1}_{j=i-1} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{j=i} + \frac{1}{4} \mathbf{1}_{j=i+1}$ si i est pair et $P_{ij} = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{j=i-1} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{j=i+1}$ si i est impair.
8. En raisonnant de proche en proche, on trouve pour tout $i, j \in E$, $P_{ij}^{(|j-i|)} \geq (\frac{1}{4})^{|j-i|} > 0$ d'où l'irréductibilité. Pour l'apériodicité, il suffit par exemple de voir que $P_{00} = 1/2 > 0$.
9. En cherchant une mesure réversible (qui est a fortiori stationnaire), on trouve la mesure de probabilité suivante $\pi(i) = 2/3N$ si i est pair et $\pi(i) = 1/3N$ sinon.
10. La première partie de la question est une simple application de la convergence en loi pour la chaîne de Markov irréductible et apériodique. Pour la seconde partie, il suffit de sommer d'une part sur les $i \in E$ pairs (il y en a N) et d'autre part sur les $i \in E$ impairs.
11. En utilisant le fait que $Y_n = (X_n, X_{n+1})$ est une chaîne de Markov irréductible, apériodique de probabilité stationnaire $\mu(i, j) = \pi(i)P_{ij}$, on trouve les limites suivantes

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}((X_n, X_{n+1}) = (i, j)) &= \frac{1}{6N} \mathbf{1}_{j=i-1} + \frac{1}{3N} \mathbf{1}_{j=i} + \frac{1}{6N} \mathbf{1}_{j=i+1} && \text{si } i \text{ est pair,} \\ &= \frac{1}{6N} \mathbf{1}_{j=i-1} + \frac{1}{6N} \mathbf{1}_{j=i+1} && \text{sinon.} \end{aligned}$$

En sommant sur les couples possibles, on trouve

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n \text{ est pair et } X_{n+1} \text{ est pair}) = 1/3, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n \text{ est pair et } X_{n+1} \text{ est impair}) = 1/3, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n \text{ est impair et } X_{n+1} \text{ est pair}) = 1/3, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n \text{ est impair et } X_{n+1} \text{ est impair}) = 0. \end{cases}$$

On peut utiliser $\mathbb{P}(X_n \text{ est pair}) = \mathbb{P}(X_n \text{ est pair et } X_{n+1} \text{ est pair}) + \mathbb{P}(X_n \text{ est pair et } X_{n+1} \text{ est impair})$ ou bien $\mathbb{P}(X_{n+1} \text{ est pair}) = \mathbb{P}(X_n \text{ est pair et } X_{n+1} \text{ est pair}) + \mathbb{P}(X_n \text{ est impair et } X_{n+1} \text{ est pair})$ pour retrouver la limite $2/3$ de la question précédente.