Processus stochastiques – Partiel

23 Mars 2018

Les trois exercices sont indépendants et peuvent être traités dans le désordre. Une question peut être passée et son résultat admis pour la suite. Les notes de cours sont autorisées.

Exercice 1 (Identités de Wald)**.** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. On note $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ avec convention $S_0 = 0$. Soient $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ la filtration canonique, i.e. $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, et T un temps d'arrêt par rapport à $(\mathcal{F}_n)_n$.

1. Rapeller l'identité de Wald.
2. On suppose (uniquement) dans cette question que $\mathbb{P}(X_n = -1) = \mathbb{P}(X_n = 1) = 1/2$ et $T = \inf\{n,\, S_n \geq x\}$ avec $x \geq 1$. Montrer que T n'est pas intégrable.

   Dans toute la suite, nous supposerons que $\mathbb{E}[X_1] = 0$, $\mathbb{E}\left[X_1^2\right] = \sigma^2$ et que T est intégrable. On pose $Z_n = S_n^2 - n\sigma^2$.
3. Montrer que $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_n)_n$-martingale.
4. Montrer que pour tout $k, j \geq 1$, $\mathbb{E}[X_k \mathbf{1}_{T\geq k}] = 0$ et $\mathbb{E}[X_j \mathbf{1}_{T\geq j} X_k \mathbf{1}_{T\geq k}] = 0$ si $j \neq k$ et que
$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{+\infty} X_k^2 \mathbf{1}_{T\geq k}\right] = \sigma^2 \mathbb{E}[T] < +\infty.$$
5. En déduire que $(S_{T\wedge n})_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans L^2.
6. En déduire que $S_{T\wedge n} \to S_T$ dans L^2. *On pourra utiliser sans démonstration que si un processus $(Y_n)_n$ converge p.s. et dans L^2 alors ses deux limites sont égales. Une démonstration de ce résultat donne des points bonus.*
7. Montrer la seconde identité de Wald : $\mathbb{E}\left[S_T^2\right] = \sigma^2 \mathbb{E}[T]$.

   Dans la suite, on pose $T_c = \inf\{n,\, |S_n| > c\sqrt{n}\}$ pour tout réel positif c.
8. Montrer que T_c est un temps d'arrêt par rapport à $(\mathcal{F}_n)_n$.
9. Supposons que $\mathbb{E}[T_c] < +\infty$. Montrer que $c < \sigma$.

Exercice 2 (Conditionnements en tous genres)**.** Soit X de loi uniforme sur $[0, 1]$. Soit Y admettant la densité conditionnelle sachant X suivante :
$$f_{Y|X=x}(y) = e^{-(y-x)\mathbf{1}_{[x,+\infty[}(y)}.$$

1. Notons $S = Y - X$. Calculer la densité de (X, S). Que peut-on dire sur ces deux variables ?
2. Quelle est la loi de S ? Quelle est la loi de S sachant $X = x$?
3. Montrer que la densité de X sachant Y vaut
$$\begin{aligned} f_{X|Y=y}(x) &= \frac{e^x}{e-1}\mathbf{1}_{[0,1]}(x) && \text{si } y \geq 1, \\ &= \frac{e^x}{e^y - 1}\mathbf{1}_{[0,y]}(x) && \text{si } 0 < y < 1. \end{aligned}$$
4. Soit U de loi $\mathcal{B}(p)$ indépendante de (X, Y) et $Z = UY + (1 - U)X$. Calculer : a) $\mathbb{E}[Z|\, X]$ et b) $\mathbb{E}[Z|\, Y]$.

Exercice 3 (CHÂTEAU DE CARTES). Soit $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels dans $[0,1]$. On considère le processus à valeurs entières $(K_n)_{n\geq 0}$ qui satisfait la relation de récurrence :

$$K_{n+1} = K_n + 1 \text{ avec probabilité } \alpha_{K_n}, \text{ et } K_{n+1} = 0 \text{ sinon.}$$

1. Justifier que $(K_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov. Donner son espace d'états et sa matrice de transition P.

   Dans la suite on suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha_- \leq \alpha_k \leq \alpha_+ < 1$.
2. Justifier que la chaîne est irréductible et apériodique.
3. Soit π une mesure invariante pour la chaîne. Montrer que pour tout $k \geq 1$,

$$\pi(k) = \left(\prod_{i=0}^{k-1} \alpha_i\right) \pi(0).$$

   En déduire qu'il existe une unique probabilité invariante que l'on notera π.
4. Pour tout ℓ, on note δ_ℓ la probabilité définie par $\delta_\ell(\ell) = 1$ (et donc pour tout $k \neq \ell$, $\delta_\ell(k) = 0$). Montrer que pour tout $\ell, \ell' \in \mathbb{N}$,

$$||\delta_\ell P - \delta_{\ell'} P||_1 \leq \alpha_+ ||\delta_\ell - \delta_{\ell'}||_1.$$

   On rappelle que pour un vecteur $\xi \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $||\xi||_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} |\xi(k)|$.
5. Soient μ et ν deux probabilités sur $\mathbb{N}$. Montrer que

$$\mu P(0) - \nu P(0) = \sum_{k\in\mathbb{N}} (\mu(k) - \nu(k))(1 - \alpha_k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} (\mu(k) - \nu(k))(1 - \alpha_k - \varepsilon),$$

   pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}$.
6. En choisissant bien le réel ε, montrer que

$$||\mu P - \nu P||_1 \leq \alpha_+ ||\mu - \nu||_1.$$

7. En déduire que pour toute probabilité initiale μ, μP^n converge à vitesse géométrique vers la probabilité invariante π.