UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES
V. Beffara, J. Chevallier Année 2017-18
M1M

Processus stochastiques – Éléments de correction

23 Mars 2018

Exercice 1 (Identités de Wald)**.**

1. Voir le cours.
2. Par l'absurde, supposons que T est intégrable. Dans ce cas, l'identité de Wald donne $\mathbb{E}[S_T] = \mathbb{E}[T]\,\mathbb{E}[X_1]$. On aboutit à une contradiction en remarquant que $\mathbb{E}[S_T] \geq x$ et $\mathbb{E}[X_1] = 0$.
3. On montre : (*i*) $\mathbb{E}[|Z_n|] < +\infty$; (*ii*) Z_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable ; (*iii*) $\mathbb{E}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n] = Z_n$. Pour (*i*), on utilise $|Z_n| \leq S_n^2 + n\sigma^2$ et $S_n^2 \leq n\sum_{i=1}^n X_i^2$. Le point (*ii*) est trivial. Le point (*iii*) se déduit de l'égalité
$$\mathbb{E}\left[S_n^2 + 2S_nX_{n+1} + X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n\right] = S_n^2 + 2S_n\mathbb{E}[X_{n+1}] + \mathbb{E}\left[X_{n+1}^2\right] = S_n^2 + \sigma^2.$$
4. On remarque que $\mathbf{1}_{T\geq k} = \mathbf{1}_{T>k-1} = 1 - \mathbf{1}_{T\leq k-1}$ est $\mathcal{F}_{k-1}$-mesurable. Ainsi, comme X_k est indépendant de $\mathcal{F}_{k-1}$,
$$\mathbb{E}[X_k\mathbf{1}_{T\geq k}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_k|\mathcal{F}_{k-1}]\,\mathbf{1}_{T\geq k}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_k]\,\mathbf{1}_{T\geq k}] = 0.$$
Pour la deuxième formule, on peut supposer que $j < k$ et remarquer que $X_j\mathbf{1}_{T\geq j}\mathbf{1}_{T\geq k}$ est $\mathcal{F}_{k-1}$-mesurable pour appliquer le même raisonnement. La dernière formule s'obtient en utilisant : a) Fubini pour échanger somme et espérance (les variables sont positives) ; b) le même conditionnement que dans le raisonnement précédent ; c) l'égalité $T = \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbf{1}_{T\geq k}$ par exemple.
5. Supposons $n > m$. On écrit $S_{T\wedge n} - S_{T\wedge m} = \sum_{k=m+1}^n X_k\mathbf{1}_{T\geq k}$. En appliquant les résultats précédents, on trouve $\mathbb{E}\left[(S_{T\wedge n} - S_{T\wedge m})^2\right] = \sum_{k=m+1}^n \mathbb{E}\left[X_k^2\mathbf{1}_{T\geq k}\right]$ qui tend vers 0 quand n et m tendent vers 0 car la série infinie est convergente.
6. D'après 5/, il existe $\tilde{S}$ telle que $S_{T\wedge n} \to \tilde{S}$ dans L^2. De plus, comme $T < +\infty$ p.s., on a $S_{T\wedge n} \to S_T$ p.s. Par unicité de la limite, on en déduit $\tilde{S} = S_T$ et donc $S_{T\wedge n} \to S_T$ dans L^2.
7. D'après 6/, on a en particulier $\mathbb{E}\left[S_T^2\right] = \lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}\left[S_{T\wedge n}^2\right]$. Le théorème d'arrêt pour la martingale Z appliqué au temps d'arrêt borné $T\wedge n$ donne $\mathbb{E}\left[S_{T\wedge n}^2\right] = \mathbb{E}[T\wedge n]\,\sigma^2$. Pour conclure, il suffit de voir que $\mathbb{E}[T\wedge n]\,\mathbb{E}[T]$ par convergence monotone.
8. Comme pour tout temps d'atteinte, on a $\{T_c \leq n\} = \cup_{k\leq n}\{|S_k| > c\sqrt{k}\} \in \mathcal{F}_n$.
9. On applique la seconde identité de Wald.

Exercice 2 (Conditionnements en tous genres)**.**

1. On écrit
$$\mathbb{E}[\varphi(X,S)] = \mathbb{E}[\varphi(X,Y-X)] = \int\int \varphi(x,y-x)\mathbf{1}_{[0,1]}(x)e^{-(y-x)}\mathbf{1}_{[x,+\infty[}(y)dxdy$$
et on fait le changement de variable $s = y-x$ pour obtenir la densité $f_{(X,S)}(x,s) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x)e^{-s}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(s)$. La densité est factorisée ($f_{(X,S)}(x,s) = f(x)g(s)$) donc X et S sont indépendantes.
2. S suit la loi exponentielle de paramètre 1. Même réponse pour la loi conditionnelle car S est indépendant de X.

3. On calcule d'abord la densité de Y :

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= e^{-y}(e-1) && \text{si } y \geq 1, \\ &= e^{-y}(e^y - 1) && \text{si } 0 < y < 1, \\ &= 0 && \text{sinon.} \end{aligned}$$

Il suffit alors d'appliquer la formule $f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)}$.

4. a) On peut écrire $Z = U(Y-X) + X$ et utiliser l'independance pour trouver $\mathbb{E}[Z|X] = \mathbb{E}[U]\,\mathbb{E}[S] + X = p + X$.
b) On écrit $\mathbb{E}[Z|Y] = pY + (1-p)\mathbb{E}[X|Y]$, puis on utilise la densité conditionnelle $f_{X|Y=y}$ pour calculer

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X|Y=y] &= \int x \frac{e^x}{e-1} \mathbf{1}_{[0,1]}(x) dx = \frac{1}{e-1} && \text{si } y \geq 1, \\ &= \int x \frac{e^x}{e^y - 1} \mathbf{1}_{[0,y]}(x) dx = \frac{ye^y}{e^y - 1} - 1 && \text{si } 0 < y < 1. \end{aligned}$$

Exercice 3 (Château de cartes).

1. Les probabilités de transition et le nouvel état de la chaîne ne dépendent que de l'état k dans lequel se trouve la chaîne. L'espace d'états est $\mathbb{N}$ et P est définie par : pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(k, k+1) = \alpha_k$ et $P(k, 0) = 1 - \alpha_k$.
2. Comme $\alpha_+ < 1$, tous les états peuvent aller en 0 et comme $\alpha_- > 0$, 0 peut aller à l'état k en k étapes : la chaîne est donc irréductible. De plus, la probabilité de rester en 0, à savoir $P(0,0)$ est non nulle : la chaîne est donc apériodique.
3. On utilise la relation de récurrence $\pi(k+1) = \alpha_k \pi(k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. L'existence et unicité de la probabilité invariante découle du fait que $1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \prod_{i=0}^{k-1} \alpha_i \leq 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_+^k < +\infty$ car $\alpha_+ < 1$.
4. L'inégalité est triviale si $\ell = \ell'$. Supposons $\ell \neq \ell'$. On a $\delta_\ell P(0) = 1 - \alpha_\ell$, $\delta_\ell P(\ell+1) = \alpha_\ell$ et $\delta_\ell P(k) = 0$ pour tout $k \neq 0, \ell+1$. On a donc $||\delta_\ell P - \delta_{\ell'} P||_1 = |\alpha_\ell - \alpha_{\ell'}| + \alpha_\ell + \alpha_{\ell'} \leq 2\max(\alpha_k, \alpha_{k'}) \leq 2\alpha_+$. Comme $||\delta_\ell - \delta_{\ell'}||_1 = 2$ on en déduit le résultat.
5. On a $\mu P(0) - \nu P(0) = \sum_{k \in \mathbb{N}} (\mu(k) - \nu(k)) P(k, 0)$. L'ajout de ε ne modifie pas le terme de droite car μ et ν sont des probabilités.
6. Prendre $\alpha = 1 - \alpha_+$ de sorte que $(1 - \alpha_k - \varepsilon) = \alpha_+ - \alpha_k \geq 0$ et donc

$$|(\mu - \nu)P(0)| \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} |\mu(k) - \nu(k)|(\alpha_+ - \alpha_k).$$

Il suffit alors de sommer avec les autres termes $|(\mu - \nu)P(k+1)| = |\mu(k) - \nu(k)|\alpha_k$ pour majorer $||(\mu - \nu)P||_1$.

7. D'après 6/ appliqué avec $\nu = \pi$, on a $||\mu P - \pi||_1 \leq \alpha_+ ||\mu - \pi||_1$. Il suffit d'itérer cette formule.