Processus stochastiques – Feuille d'exercices 6

Martingales et théorèmes d'arrêt

Exercice 1 (Singe savant)**.**
Un singe se trouve devant le clavier d'un ordinateur. Au temps n, il choisit une touche (uniformément et indépendamment des précédentes) et appuie dessus : on la note X_n. On note $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ la filtration canonique de $(X_n)_{n\geq 1}$. On appelle T le premier instant où il écrit $\mathbf{a} = a_1 \dots a_{11} = ABRACADABRA$. Le but de cet exercice est de montrer que $\mathbb{E}(T) = 26^{11} + 26^4 + 26$.

1. On note $S = \inf\{n \geq 0, X_{11n+1} \dots X_{11(n+1)} = \mathbf{a}\}$. Pour tout $n \geq 0$, calculer $\mathbb{P}(S \geq n)$ et $\mathbb{E}[S]$.
2. Montrer que T est un $\mathcal{F}_n$-temps d'arrêt fini presque sûrement et intégrable (comparer avec S).

   On se ramène à un problème de théorie des jeux équivalent. On considère un joueur qui mise 1 euro sur le fait que la première lettre tapée par le singe soit un A. Si ce n'est pas un A, il a perdu, sinon il remporte 26 fois sa mise. Au second tour, il mise toute sa fortune sur l'apparition d'un B, etc. Pour $n \geq 1$, on note $M_n^{(1)} = 26^n \prod_{j=1}^n \mathbb{1}_{\{X_j = a_j\}} - 1$ qui correspond au gain du joueur après le $n^{\text{ème}}$ tour (les a_j sont définis de manière cyclique, e.g. $a_{12} = A$).
   Nous considérons qu'un nouveau joueur arrive à chaque tour. Ainsi, le joueur k mise sur le fait que le singe va commencer à taper $ABRACADABRA$ au tour k et on note, pour $n \geq k$, $M_n^{(k)} = 26^{n-k+1} \prod_{j=k}^n \mathbb{1}_{\{X_j = a_j - k+1\}} - 1$.
   On note $M_n = \sum\limits_{k=1}^n M_n^{(k)}$ la somme des gains des joueurs à l'instant n.

3. Supposons que $T = 11$ (la plus petite valeur possible), que valent alors $M_{11}^{(1)}, \dots, M_{11}^{(11)}$? Montrer que $T = \tilde{T} := \inf\{n : M_n = 26^{11} + 26^4 + 26 - n\}$.
4. Montrer que $(M_n)_n$ est une martingale. En déduire que $\mathbb{E}(T) = 26^{11} + 26^4 + 26$. *Attention : T n'est pas borné. On pourra utiliser les temps d'arrêts $T \wedge m$ avec $m < +\infty$ fixé.*
5. Expliquer pourquoi cette espérance est plus grande que 26^{11}.

Exercice 2 (Temps d'arrêt optimal)**.**
Motivation : On considère un jeu séquentiel comme dans l'exercice précédent et on cherche la règle d'arrêt (sans connaître l'évolution future du jeu) qui optimise le gain moyen. On considère donc un processus $(Y_n)_n$ adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)_n$ et on se pose le problème d'optimiser la valeur $\mathbb{E}[Y_T]$ parmi tous les temps d'arrêt T qui sont bornés par $N < \infty$.

Soit $(Y_n)_n$ un processus adapté à $(\mathcal{F}_n)_n$ tel que $\mathbb{E}(|Y_n|) < \infty$ pour tout n. Soit $(Z_n)_n$ le processus défini récursivement par

$$Z_N = Y_N \quad \text{et} \quad Z_n = \sup\{Y_n, \mathbb{E}(Z_{n+1}|\mathcal{F}_n)\} \text{ pour } 1 \leq n < N.$$

On considère le temps aléatoire $T^* = \inf\{k \leq N : Y_k = Z_k\}$ ($T^* = N$ si l'ensemble est vide).

1. Justifier pourquoi le problème d'optimisation est trivial si $(Y_n)_n$ est une martingale.
2. Montrer que T^* est un temps d'arrêt.
3. Montrer que $(Z_n)_n$ est une sur-martingale et que $(Z_{T^* \wedge n})_n$ est une martingale.
4. En déduire que $\mathbb{E}[Z_{T^*}] = \mathbb{E}[Z_1]$.
5. Montrer que T^* est optimal dans le sens suivant : pour tout temps d'arrêt $T \leq N$,

$$\mathbb{E}(Y_T) \leq \mathbb{E}(Y_{T^*}).$$

Exercice 3 (Problème de recrutement)**.**
Une université cherche à recruter le meilleur maître de conférence parmi les N candidats qui ont postulé. Les candidats peuvent être comparés strictement (une fois rencontrés) et rangés du meilleur au moins bon. Les candidats sont auditionnés dans un ordre arbitraire (i.e. les $N!$ façons d'ordonner les candidats sont équiprobables). À l'issue de l'audition de chaque candidat, le comité de sélection le classe parmi tous les candidats déjà auditionnés. Sur la base de ce rang relatif, le comité doit :

— sélectionner le candidat pour le poste, terminant ainsi la procédure de sélection,

— ou bien refuser définitivement sa candidature, sans possibilité de le rappeler ultérieurement, et passer au candidat suivant.

L'objectif est de sélectionner le meilleur candidat, i.e. le gain est défini par 1 si on sélectionne le meilleur candidat, et 0 sinon.

Soit Ω l'ensemble des permutations des N candidats, muni de la distribution uniforme. Pour $\omega \in \Omega$, on note $R_i(\omega) = \omega_i$ la variable aléatoire donnant le rang absolu du i-ème candidat auditionné (e.g. $\omega_2 = 1$ si le meilleur candidat est auditionné en deuxième).

Mais, on ne connaît pas le classement absolu ω des candidats jusqu'à ce qu'on les ait tous auditionnés. A chaque pas n, on observe une variable $X_n(\omega)$ qui donne le rang relatif du n-ème candidat par rapport à tous les $n-1$ auditionnés auparavant. Donc $X_1 = 1$, $X_2 \in \{1, 2\}$, ..., $X_n \in \{1, ..., n\}$ et $X_N(\omega) = R_N(\omega) = \omega_N$. A chaque instant n, on connait $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, ..., X_n)$ la tribu engendrée par les rangs relatifs des n premiers candidats.

Exemple : si $N = 4$ et $\omega = (4, 1, 3, 2)$ alors $X_1(\omega) = 1, X_2(\omega) = 1, X_3(\omega) = 2, X_4(\omega) = 2$.

Le but est de maximiser $\mathbb{P}(R_T = 1)$ parmi tous les temps d'arrêt T.

1. Quel est l'ensemble $\mathcal{X}$ des valeurs possibles pour le vecteur $\mathbf{X}(\omega) = (X_1, \ldots, X_N)$? Quel est son cardinal ?
   On admettra que la procédure de classement par rang relatif $\mathbf{X} : \omega \in \Omega \mapsto \mathbf{X}(\omega) \in \mathcal{X}$ est une bijection. De plus, pour tout $n \in \{1, \ldots, n\}$, ω_n est une fonction de $(X_n, \ldots, X_N)$ seulement (i.e. ne dépend pas de $X_1, \ldots, X_{n-1}$).
2. Montrer que pour tout $n \leq N$ et $j \in \{1, ..., n\}$ on a $\mathbb{P}(X_n = j) = 1/n$, et que les v.a. $X_1, ..., X_n$ sont indépendantes.
3. Soit $(Y_n)_{1 \leq n \leq N}$ le processus défini par $Y_n = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{R_n = 1\}} | \mathcal{F}_n)$. Montrer que $\mathbb{P}(R_T = 1) = \mathbb{E}(Y_T)$. *On a donc réécrit le critère à optimiser sous la forme d'une espérance d'un processus adapté.*
4. Montrer que R_n est indépendant de $\mathcal{F}_{n-1}$. En déduire que $Y_n = \frac{n}{N} \mathbb{1}_{\{X_n = 1\}}$.
5. On note $(Z_n)_{n \geq 1}$ le processus (défini dans l'exercice précédent) tel que $T^* = \inf\{k \leq N : Y_k = Z_k\}$ soit le temps d'arrêt optimal. Montrer que $Z_n = \sup\{Y_n, \mathbb{E}(Z_{n+1})\}$, $n \mapsto \mathbb{E}(Z_n)$ est décroissante et que
$$T^* = \inf\{k \leq N : \mathbb{E}(Z_{k+1}) \leq k/N, X_k = 1\}.$$
6. Pour $r = 1, \ldots, N$, notons $T_r = \inf\{k \in [r, N] : X_k = 1\}$. Montrer que
$$\mathbb{P}(R_{T_r} = 1) = \frac{r-1}{N} \sum_{k=r}^{N} \frac{1}{k-1}$$
   et que T^* est déterminé par l'entier r qui maximise cette probabilité.
7. Montrer que dans la limite $N \to \infty$ et $r/N = x \in]0, 1[$ on a
$$\mathbb{P}(R_{T_r} = 1) \simeq -x \log x$$
   Montrer que la stratégie (asymptotiquement) optimale est de laisser défiler les $e^{-1}N$ premiers candidats puis de choisir le premier qui surpasse tous ses précécesseurs. De cette façon, on a une probabilité maximale (égale à e^{-1}) de tomber sur le meilleur candidat.