Processus stochastiques – Feuille d'exercices 5

Martingales – Ruine et extinction

1 Ruine du joueur

Exercice 1. On considère le jeu suivant : Anaïs et Bastien jouent à "pile ou face". Si la pièce tombe sur pile (avec probabilité p) alors Anaïs donne 1€ à Bastien. Inversement, si la pièce tombe sur face, B. donne 1€ à A. On suppose que les deux joueurs disposent repsectivement des fortunes a et b (deux entiers finis). Le jeu se répète (indépendemment des tours précédents) jusqu'à ce que l'un des deux joueurs soit ruiné.

1. Modéliser le problème à l'aide de la marche aléatoire simple $(S_n)_{n\geq 0}$ sur $\mathbb{Z}$. Définir l'instant de fin du jeu (ruine d'un des deux joueurs) comme un temps d'arrêt T pour la filtration canonique $(\mathcal{F}_n)_n$ de la marche aléatoire.
2. Supposons que le jeu est équitable, i.e. $p = 1/2$.
   (a) Montrer que $(S_n)_{n\geq 0}$ est une martingale et que $(S_{T\wedge n})_{n\geq 0}$ est une martingale bornée.
   (b) Montrer que $S_{T\wedge n}$ converge presque sûrement.
   (c) Que dire de $|S_{T\wedge(n+1)} - S_{T\wedge n}|$ sur l'évènement $\{T = +\infty\}$. En déduire que $T < +\infty$ p.s.
   (d) En utilisant le théorème d'arrêt, montrer que les probabilités de ruine de A. et B. sont respectivement
   $$r_a = \frac{b}{a+b} \quad \text{et} \quad r_b = \frac{a}{a+b}.$$
   (e) En utilisant la seconde identité de Wald (si $\mathbb{E}[X_1] = 0$, $\mathbb{E}[X_1^2] = \sigma$ et $\tilde{T}$ temps d'arrêt intégrable, alors $\mathbb{E}[S_{\tilde{T}}^2] = \sigma^2\mathbb{E}[\tilde{T}]$), montrer que T est intégrable et que $\mathbb{E}[T] = ab$.
3. Supposons maintenant que le jeu est déséquilibré, i.e. $p \neq 1/2$.
   (a) En utilisant la loi des grands nombres, montrer que $T < +\infty$ p.s.
   (b) Notons $G(t) = \mathbb{E}\left[e^{tX_1}\right]$ la fonction génératrice de X_1. Montrer que $(M_n)_{n\geq 0}$ défini par $M_n = G(t)^{-n}e^{tS_n}$ est une martingale.
   C'est un objet utile et courant : on l'appelle la martingale exponentielle.
   (c) Trouver $t_0 \neq 0$ tel que $G(t_0) = 1$. En utilisant le théorème d'arrêt, montrer que
   $$r_a \left(\frac{p}{q}\right)^{-a} + r_b \left(\frac{p}{q}\right)^{b} = 1,$$
   où $q = 1 - p$.
   (d) En utilisant l'identité de Wald, montrer que T est intégrable et que
   $$\mathbb{E}\left[T\right] = \frac{ar_a - br_b}{p-q}.$$

2 Processus de Galton-Watson

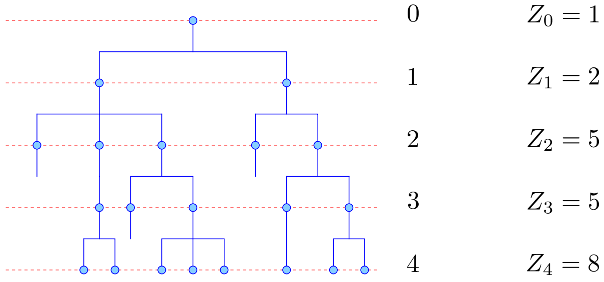
Une population est décrite génération par génération (arbre généalogique). Notons Z_n le nombre d'individus de la $n^{\text{ème}}$ génération. Chaque membre de la $n^{\text{ème}}$ génération donne naissance à des individus, éventuellement zéro, de la génération suivante. On fait l'hypothèse que les tailles de chaque famille forment une collection de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.

Sous ces hypothèses, le processus $(Z_n)_{n\geq 0}$ est bien défini dès que la taille de la population initiale Z_0 est donnée. On supposera ici que $Z_0 = 1$.

Formalisation. Le processus $Z = (Z_n)_{n\geq 0}$ peut être construit de la façon suivante : soit $(X_k^n)_{n\geq 0, k\geq 1}$ une collection de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$; X_k^n représente le nombre d'enfants du $k^{\text{ème}}$ individu de la $n^{\text{ème}}$ génération (si celui-ci existe). On peut alors poser $Z_0 = 1$ et, pour $n \geq 0$,

$$Z_{n+1} = X_1^n + X_2^n + \cdots + X_{Z_n}^n, \tag{1}$$

le nombre d'individus de la $(n+1)^{\text{ème}}$ génération étant égal au nombre total de fils des individus de la $n^{\text{ème}}$ génération. On note $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_0, \ldots, Z_n)$. Dans la suite, on suppose que $\mu = \mathbb{E}\left[X_1^1\right] > 0$ et $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1^1) < +\infty$.



Exercice 2 (Convergence)**.**

1. On note $M_n = Z_n/\mu^n$. Montrer que M_n est une martingale, et en déduire que M_n converge presque sûrement vers une variable aléatoire que l'on notera M.
2. Supposons que $\mu < 1$. En utilisant le point (1), montrer que $\mathbb{P}(Z_n = 0) \to 1$ lorsque $n \to \infty$. En déduire que $Z_n \to 0$ presque sûrement et dans L^1.

Exercice 3 (Décomposition de Doob)**.**

1. Montrer que toute sous-martingale $(Y_n)_n$ peut être écrite d'une manière unique comme $Y_n = M_n + A_n$, où M_n est une martingale et A_n est un processus prévisible croissant tel que $A_0 = 0$.
   Indication : On fera un raisonnement par analyse/synthèse. Dans la partie “analyse”, on écrira deux relations de récurrence $A_{n+1} = f(A_n, Y_n, \mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n])$ et $M_n = g(A_n, Y_n)$.
2. Soit $(M_n)_{n\geq 0}$ une martingale. Montrer que $(M_n^2)_{n\geq 0}$ est une sous-martingale.

   Il est classique d'étudier la décomposition de Doob de la sous-martingale $(M_n^2)_{n\geq 0}$. Dans ce cas, le processus prévisible $(A_n)_n$ est appelé le crochet de la martingale $(M_n)_n$ et noté $\langle M\rangle_n$.

   Retournons à $M_n = Z_n/\mu^n$.
3. Écrire $Z_n - \mu Z_{n-1}$ comme une somme de variables i.i.d. centrées.
4. Montrer que $\mathbb{E}\left[(M_{n+1} - M_n)^2 \middle| \mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[M_{n+1}^2 \middle| \mathcal{F}_n\right] - M_n^2$.
5. En utilisant la relation de récurrence du processus croissant de la question 1, en déduire que
$$\langle M\rangle_n = \sigma^2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{M_k}{\mu^{k+2}}.$$
6. Montrer que $\langle M\rangle_\infty = \lim_{n\to\infty}\langle M\rangle_n$ est bien défini et calculer $\mathbb{E}[\langle M\rangle_\infty]$.
7. Si $\mu > 1$, en déduire que $(M_n)_n$ est bornée dans L^2.
   Dans la suite, on suppose que $\mu > 1$.
8. On rappelle que $M = \lim_{n\to+\infty} M_n$. Montrer que $\mathbb{E}(M) = 1$. En déduire que $\mathbb{P}(M > 0) > 0$.
9. Montrer que $\{Z_n > 0\ \forall n\}$ implique $\{M > 0\}$: autrement dit, si la population survit elle croît exponentiellement vite.