UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES Année 2019-20
V. Beffara, J. Chevallier M1M

Processus stochastiques – Feuille d'exercices 4

Filtration - Temps d'arrêt - Marche aléatoire

Dans toute la feuille on se place dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1 Filtration et temps d'arrêt

Exercice 1. Soient $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ une filtration, T, T_1, T_2 des temps d'arrêt par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ et $k \in \mathbb{N}$. Soit U une v.a. indépendante des $\mathcal{F}_n$ telle que $\mathbb{P}(U=0) = \mathbb{P}(U=1) = 1/2$. Montrer que

1. $T \wedge (n+1)$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable *(autrement dit, au temps n on sait si : (i) $T \leq n$ et alors on connaît sa valeur, (ii) $T > n$ et on ne connait pas sa valeur exacte)*;
2. $T \wedge k$, $T_1 + T_2$, $T_1 \vee T_2$, et $T_1 \wedge T_2$ sont des temps d'arrêt;
3. U n'est pas un temps d'arrêt.

Exercice 2 (Tribu des événements antérieurs à T)**.** Soit T un temps d'arrêt pour une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. On définit la tribu des événements antérieurs à T par

$$\mathcal{F}_T := \{A \in \mathcal{F} \text{ tel que } \forall n \geq 0,\, A \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n\}.$$

Montrer que :

1. $\mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}$ est une tribu et que T est $\mathcal{F}_T$-mesurable.
2. Si la v.a. réelle Z est $\mathcal{F}_T$-mesurable alors pour tout $n \geq 0$, $Z\mathbf{1}_{T\leq n}$ et $Z\mathbf{1}_{T=n}$ sont $\mathcal{F}_n$-mesurables.
3. Si $T_1 \leq T_2$ sont deux temps d'arrêt, alors $\mathcal{F}_{T_1} \subset \mathcal{F}_{T_2}$.

Exercice 3. Soit T un temps d'arrêt fini p.s. pour une filtration $(\mathcal{F}_n)_n$, et X une variable aléatoire positive. Montrer que $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_T) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n) 1_{T=n}$.

Comment le généraliser si X peut être négative (mais reste intégrable) ?

Exercice 4 (*)**.** Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note $X_n = X \wedge n$, et $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ la filtration canonique de $(X_n)_{n\geq 0}$ (i.e. $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$).

1. Comparer $\{X \geq n\}$ et $\{X_n = n\}$. Calculer $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)$ et $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)$ en supposant X intégrable.
2. On note $T = \inf\{n \geq 1 \,|\, X_n = X_{n-1}\}$. Montrer que T est un $(\mathcal{F}_n)$-temps d'arrêt fini presque sûrement, puis calculer X et X_T en fonction de T.
3. Vérifier la formule de l'exercice 3.

2 Marche aléatoire simple

Dans tous les exercices qui suivent, nous considérons la marche aléatoire simple unidimensionnelle $S_n = S_0 + \sum_{i=1}^n X_i$ avec $S_0 \in \mathbb{Z}$ et $(X_i)_{i\geq 1}$ une famille i.i.d. (indépendante de S_0) de variables aléatoires de Rademacher : $\mathbb{P}(X_i = +1) = p$ et $\mathbb{P}(X_i = -1) = q$ avec $p + q = 1$.

On note $(\mathcal{F}_n)_n$ la filtration canonique de $(S_n)_n$. Pour $a \in \mathbb{Z}$, on note $\mathbb{P}_a$ la probabilité conditionnelle sachant $S_0 = a$: autrement dit, pour tout $s_{0:n} = (s_0, \ldots, s_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$,

$$\mathbb{P}_a(S_{0:n} = s_{0:n}) = \mathbb{P}(X_1 = s_1 - s_0) \cdots \mathbb{P}(X_n = s_n - s_{n-1}) \mathbf{1}_{s_0=a}.$$

Exercice 5 (Homogénéité et propriété de Markov)**.**
Pour une trajectoire $s_{0:n} \in \mathbb{Z}^{n+1}$ et pour $a \in \mathbb{Z}$, on note $s_{0:n} - a = (s_0 - a, \dots, s_n - a)$.

1. Montrer l'homogénéité spatiale : $\forall a \in \mathbb{Z},\ s_{0:n} \in \mathbb{Z}^{n+1},\ \mathbb{P}_a(S_{0:n} = s_{0:n}) = \mathbb{P}_0(S_{0:n} = s_{0:n} - a)$.
2. Soit $s_{0:n} \in \mathbb{Z}^{n+1}$. Montrer que pour tout $s \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathbb{P}_a(\{S_n = s\} \cap \{S_{0:n} = s_{0:n}\}) > 0$ on a
$$\mathbb{P}_a(S_{n:N} = s_{n:N} \,|\, \{S_n = s\} \cap \{S_{0:n} = s_{0:n}\}) = \mathbb{P}_s(S_{0:(N-n)} = s_{n:N}) \tag{1}$$
pour toute trajectoire $s_{n:N} \in \mathbb{Z}^{N-n+1}$. *C'est la propriété de Markov simple (homogène).*
3. Montrer que l'on peut remplacer $\{S_{0:n} = s_{0:n}\}$ par n'importe quel $A \in \mathcal{F}_n$ dans (1).
4. Soit T un temps d'arrêt fini p.s. pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_n$. Montrer que le processus $(\tilde{S}_n)_{n\geq 0}$ défini par $\tilde{S}_n = S_{T+n} - S_T$ est une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$, de loi $\mathbb{P}_0$, indépendante de $\mathcal{F}_T$.
C'est la propriété de Markov forte. En temps discret, elles sont équivalentes.

Exercice 6 (*)**.** Notons
$$\tau_0 = \inf\{n \geq 1 \,|\, S_n = 0\},\ g(n) = \mathbb{P}_0(S_n = 0) \text{ et } h(n) = \mathbb{P}_0(\tau_0 = n).$$
Les fonctions génératrices correspondantes sont
$$G(s) = \sum_{n=0}^{\infty} g(n) s^n \quad \text{et} \quad H(s) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) s^n.$$

1. Calculer $g(n)$ puis montrer que, pour $|s| < 1$,
   (a) $G(s) = (1 - 4pqs^2)^{-1/2}$ (voir l'indication ci-dessous),
   (b) $G(s) = 1 + G(s)H(s)$ et en déduire que $H(s) = 1 - (1 - 4pqs^2)^{1/2}$.
   Indication : Utiliser la formule du binôme de Newton généralisée pour $a \in \mathbb{R}$ et $|x| < 1$:
$$(1+x)^a = \sum_{n\geq 0} \binom{a}{n} x^n \quad \text{où} \quad \binom{a}{n} = \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}.$$
2. Montrer que la probabilité que la marche retourne au moins une fois à l'origine vaut
$$\mathbb{P}_0(\tau_0 < \infty) = 1 - |1 - 2p|.$$
Dans le cas où cela est certain, i.e. lorsque $p = q = \frac{1}{2}$, montrer que l'espérance du temps de premier retour est infinie, i.e. $\mathbb{E}_0(\tau_0) = +\infty$.
Nous avons montré que la marche aléatoire simple unidimensionnelle est récurrente-nulle si $p = 1/2$ et transiente dans les autres cas.

Exercice 7 (*)**.** Soit $m \in \mathbb{N}$ et $\tau_m = \inf\{n \geq 1,\ S_n = m\}$ le temps du premier passage en m. Notons $h_m(n) = \mathbb{P}_0(\tau_m = n)$ et $H_m(s) = \sum_{n=1}^{\infty} h_m(n) s^n$ la fonction génératrice associée.

1. Pour $m \geq 2$ exprimer h_m en fonction de h_{m-1} et h_1. En déduire que $H_m(s) = [H_1(s)]^m$.
2. En conditionnant sur la direction du premier pas, montrer que $h_1(n) = q h_2(n-1)$ pour $n > 1$.
3. En déduire une équation quadratique pour $H_1(s)$. Montrer que
$$H_1(s) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4pqs^2}}{2qs}.$$
4. Trouver $H_m(s)$ pour $m \leq -1$.
5. Montrer que $\mathbb{E}_0(S_{\tau_1}) \neq \mathbb{E}_0(\tau_1)\mathbb{E}_0(X_1)$ si $p \leq q$.
6. Montrer que τ_1 n'est pas intégrable (en utilisant la question précédente ou par combinatoire).

3 Propriétés de Markov

Exercice 8 (Application)**.** Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov d'espace d'états E et de matrice de transition P. On note $\mathbb{P}_x$ la loi de la chaîne issue de x. On note $T(y) = \min\{n > 0,\ X_n = y\}$ le temps d'atteinte de y.

Comprendre intuitivement et montrer les propriétés suivantes.

1. Si a est absorbant, alors $\mathbb{P}_x(X_n = a) = \mathbb{P}_x(T(a) \leq n)$ pour tout $n \geq 1$.
2. $P^n(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(T(y) = k)\, P^{n-k}(y,y)$ pour tout $n \geq 1$.
3. $\mathbb{P}_x(T(y) = n+1) = \sum_{z \neq y} P(x,z)\mathbb{P}_z(T(y) = n)$ pour tout $n \geq 1$.
4. $\mathbb{P}_x(T(y) < +\infty) = P(x,y) + \sum_{z \neq y} P(x,z)\mathbb{P}_z(T(y) < +\infty)$.

Exercice 9 (Théorème ergodique)**.** Soient $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov irréductible sur E (fini ou dénombrable) et $j \in E$. On note $N_n(j) = \mathrm{Card}\{0 \leq k \leq n,\ X_k = j\}$ le nombre de passages dans l'état j avant l'instant n et $T(j) = \inf\{n > 0,\ X_n = j\}$ le premier temps de passage (ou de retour) en j.

On suppose que l'on a démontré le résultat suivant :

$$\forall i \in E, \quad \frac{N_n(j)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} \frac{1}{\mathbb{E}_j\left[T(j)\right]}, \qquad \text{sous la probabilité } \mathbb{P}_i. \tag{1}$$

1. Montrer que $\mathbb{E}_i\left[N_n(j)\right] = P_{ij} + \cdots + P_{ij}^n$.
2. Démontrer le résultat suivant.

   Proposition (Convergence en moyenne de Cesaro)**.** *Soient $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov irréductible de matrice P et Π la matrice définie par $\Pi_{ij} = \mathbb{E}_j\left[T(j)\right]^{-1}$. Alors, la suite $(P^n)_{n\geq 1}$ converge au sens de Cesaro vers Π (i.e. $n^{-1}\sum_{k=1}^{n} P^k \to \Pi$).*

   Remarque : *Si la chaîne est récurrente positive, alors les lignes de Π sont des copies de la probabilité stationnaire. Sinon, $\Pi = 0$.*

3. Démontrer le résultat suivant : pour $f = \mathbf{1}_{\{j\}}$, pour f positive puis pour f quelconque.

   Théorème (Théorème Ergodique)**.** *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov irréductible récurrente positive de probabilité invariante μ. Alors pour toute fonction f telle que $\int |f| d\mu < +\infty$,*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k) \xrightarrow[p.s.]{} \int f d\mu = \sum_{i\in E} f(i)\mu(\{i\}).$$