TD - Processus Stochastiques

Espérance conditionnelle

1 Espérance, projection et variance

Exercice 1. Soient $p \leq 1$, $X \in L^p(\mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$.

1. Montrer que $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] \in L^p(\mathcal{G}, \mathbb{P})$.
2. On note $q \in [1, +\infty]$ qui vérifie $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Montrer que pour toute v.a. $Z \in L^q(\mathcal{G}, \mathbb{P})$,

$$\mathbb{E}[XZ \mid \mathcal{G}] = Z\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}].$$

Exercice 2 (Variance conditionnelle)**.** Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. Pour toute variable aléatoire $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on définit la variance conditionnelle $\mathrm{Var}(X|\mathcal{G})$ par :

$$\mathrm{Var}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}])^2|\mathcal{G}\right] .$$

1. Montrer que $\mathrm{Var}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X^2|\mathcal{G}) - \mathbb{E}(X|\mathcal{G})^2$. En déduire que $||\mathbb{E}(X|\mathcal{G})||_2 \leq ||X||_2$.
2. Montrer que $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[\mathrm{Var}(X|\mathcal{G})] + \mathrm{Var}[\mathbb{E}(X|\mathcal{G})]$. En déduire que $\mathrm{Var}[\mathbb{E}(X|\mathcal{G})] \leq \mathrm{Var}(X)$ et $\mathbb{E}[\mathrm{Var}(X|\mathcal{G})] \leq \mathrm{Var}(X)$. Discuter les deux cas d'égalité.

Exercice 3 (Espérance/Projection)**.** Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$.

1. Montrer que pour tout $Y \in L^2(\mathcal{F}, \mathbb{P})$, la projection orthogonale de Y sur $L^2(\mathcal{G}, \mathbb{P})$ (pour le produit scalaire donné par $\langle X, Y\rangle := \mathbb{E}[XY]$), notée $Y_{\mathcal{G}}$, est une espérance conditionnelle de Y sachant $\mathcal{G}$. On peut s'en servir pour retrouver le fait que $\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$ est unique p.s.
2. Montrer qu'elle constitue la meilleure approximation de Y au sens des moindres carrés par des variables aléatoires de $L^2(\mathcal{G}, \mathbb{P})$, c'est-à-dire :

$$\mathbb{E}[(Y - Y_{\mathcal{G}})^2] = \inf\{\mathbb{E}[(Y - X)^2] : X \in L^2(\mathcal{G}, \mathbb{P})\}.$$

3. Soit X une variable aléatoire. Montrer que $\mathbb{E}[Y|X]$ est la meilleure approximation au sens des moindres carrés de Y par une fonction mesurable de X. *Indication : on pourra commencer par montrer qu'une telle approximation appartient nécessairement à* $L^2(\sigma(X), \mathbb{P})$.

Exercice 4. Soit $T = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : 0 < y < x < 1\}$, et (X, Y) de loi uniforme sur T.

1. Quelle est la densité de (X, Y) ?
2. Calculer la densité de la loi conditionnelle de X sachant $Y = y$. En déduire $\mathbb{E}[X|Y = y]$.
3. Pour tout $y \in]0, 1[$, calculer $\lim_{\epsilon\to 0} \mathbb{E}[X|Y \in y \pm \varepsilon]$ où $y \pm \varepsilon = [y - \varepsilon, y + \varepsilon]$.
   Remarque : Le résultat démontré est valide en toute généralité et connu sous le nom de Théorème de Besicovitch.
4. Vérifier que $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]] = \mathbb{E}[X]$.

Exercice 5. Soient X et Z deux v.a. indépendantes et h une fonction mesurable. Montrer que la loi de $Y = h(X, Z)$ sachant $X = x$ est la loi de $Y_x = h(x, Z)$.

Exercice 6. 1. Soit (X, Y) de loi uniforme sur le disque unité, calculer $E[X^2|Y]$.

* 2. Soit (X, Y) de loi uniforme sur le cercle unité. Que vaut $E[X|Y]$?

Exercice 7. Soient X, Y deux variables aléatoires réelles indépendantes. Soient $U = \max(X, Y)$ et $V = \min(X, Y)$.

1. Supposons que X et Y suivent une loi uniforme sur $[0, 1]$, calculer :
   — la loi de X sachant (U, V) et l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[X|(U, V)]$,
   — la loi de X sachant U et l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[X|U]$,
   — la loi de V sachant U et l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[V|U]$.
2. Retrouver $\mathbb{E}[X|U]$ à partir de $\mathbb{E}[X|(U, V)]$ et $\mathbb{E}[V|U]$.
3. Que dire de X sachant V et U sachant V ?
4. (*) Supposons que X et Y admettent les densités f_X et f_Y sur $\mathbb{R}$. Calculer la loi de X sachant U et l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(X|U)$. Vérifier avec les résultats de la première question.

Exercice 8. Soit X de loi $\mathcal{U}([0, 1])$ et Y de densité conditionnelle

$$f_{Y|X=x}(y) = \mathbf{1}_{[x,x+1]}(y).$$

On note $S = Y - X$.

1. Calculer la densité de (X, S). Que peut-on dire sur ces deux variables ?
2. Quelle est la loi de S ? Quelle est la loi de S sachant $X = x$?
3. Montrer que la densité de X sachant Y vaut

$$f_{X|Y=y}(x) = \begin{cases} \frac{1}{y}\mathbf{1}_{[0,y]}(x) & \text{si } 0 < y \leq 1, \\ \frac{1}{2-y}\mathbf{1}_{[y-1,1]}(x) & \text{si } 1 \leq y < 2. \end{cases}$$

2 Cas gaussien

Exercice 9. Soit (X, Y) un vecteur gaussien tel que $\mathrm{Var}(X) \neq 0$.

1. Trouver le réel a tel que $\mathrm{Cov}(Y - aX, X) = 0$.
2. En déduire qu'il existe deux réels a et b tels que $h(X) := aX + b$ soit une version de l'espérance $\mathbb{E}[Y|X]$.

Exercice 10. Soit (X, Y, Z) un vecteur gaussien centré, et de matrice de covariance $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer $\mathbb{E}(Y|X, Z)$.

Exercice 11. Soit (X, Y) un vecteur gaussien centré, et de matrice de covariance $\begin{pmatrix} 4/3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $\mathbb{E}(X|Y - X)$.

Exercice 12. Soit (X, Y) un vecteur gaussien centré, et de matrice de covariance $\Gamma = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ avec b non nul. Calculer la loi conditionnelle de X sachant $Y = y$.