TD - Processus Stochastiques

Convergence des chaînes de Markov

Exercice 1 (Perron-Frobenius et chaînes de Markov)**.** Soit P la matrice de transition d'une chaîne de Markov sur un espace d'états S de cardinal n. On supposera que P est primitive.

1. Montrer que $\rho(P) = 1$. En déduire que $\rho(P^t) = 1$.
2. Montrer que la chaîne associée à P admet une unique probabilité invariante π.
3. Montrer que pour toute distribution initiale ν_0, $||\nu_0 P^k - \pi||_1 \to 0$ à vitesse exponentielle. Exprimer cette vitesse en fonction du spectre de P. *On utilisera le fait que* $\lim_{k\to+\infty} |||A^k|||_1^{1/k} = \rho(A)$.

   Le but de l'algorithme de *PageRank* de Google est de trouver la probabilité invariante associée au graphe de connectivité du web.
4. Écrire la matrice de transition de la marche aléatoire simple sur ce graphe. *Indication :* Pour une page web $i = 1, \dots, n \approx 130.10^{12}$, on notera d_i le nombre de liens qu'elle comporte.
5. Est-ce que cette matrice est primitive ? Si non, comment la modifier (légèrement) pour la rendre primitive ? Quelle est la conséquence sur la marche aléatoire ?

Exercice 2. Considérons la chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$ de matrice Q définie par $Q(k, k+1) = p$, $Q(k, k-1) = q = 1-p$ pour $k \geq 1$ et $Q(0,1) = 1$.

1. Montrer que pour tout $p \in]0,1[$ cette chaîne est irréductible.
2. Déterminer les mesures invariantes. Donner une CNS sur p pour que les mesures invariantes soient de masse finie (et donc qu'il existe une unique probabilité invariante).

Exercice 3. Soit Q une matrice de transition sur un espace dénombrable E et π une mesure sur E. On dit que π est une *mesure réversible* si pour tout x, $y \in E$, $\pi(x)Q(x,y) = \pi(y)Q(y,x)$. Montrer que π réversible $\Rightarrow$ π invariante.

Remarque : la réversibilité n'est pas une condition nécessaire pour être invariante. Néanmoins, c'est une condition plus simple qui est souvent réalisée.

Exercice 4. Soient p et q des probabilités sur un espace fini E avec $0 < p(x) \leq cq(x)$ pour tout $x \in E$, où c est une constante positive connue. Soit $(Y_n, U_n)_{n\geq 0}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi $q \otimes \mathcal{U}([0,1])$. On définit par récurrence une chaîne $(X_n)_{n\geq 1}$:

— initialisation : $X_0 = Y_0$,

— itérations :

$$X_{n+1} = \begin{cases} Y_{n+1} \text{ si } U_{n+1} \leq \frac{p(Y_{n+1})}{cq(Y_{n+1})}, \\ X_n \text{ sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov.
2. Calculer sa matrice de transition.
3. En déduire que la loi de X_n converge vers l'unique probabilité invariante. Quelle est cette probabilité invariante ?
4. Supposons que l'on sache simuler selon la distribution q et calculer le rapport $\frac{p(y)}{cq(y)}$. A quoi peut servir la procédure expliquée ci-dessus ? A quelle procédure connue est-elle liée ?

*** Exercice 5** (Mesure de Gibbs/Minimisation de l'énergie)**.** Soit $\mathbb{T}_N = (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2$. Pour chaque configuration $\sigma \in \Sigma_N = \{-1,+1\}^{\mathbb{T}_N}$, on définit son énergie

$$H(\sigma) = -\sum_{i\sim j} \sigma_i\sigma_j \quad \text{où } i \sim j \text{ signifie que } i \text{ et } j \text{ sont voisins dans le réseau } \mathbb{T}_N.$$

On note $\Delta H(\sigma,\sigma') = H(\sigma') - H(\sigma)$. Sur l'ensemble des configurations Σ_N, on définit la mesure de Gibbs (de température inverse $\beta > 0$) par $\mu_\beta(\sigma) = \frac{1}{Z_\beta}e^{-\beta H(\sigma)}$ où $Z_\beta = \sum_{\sigma\in\Sigma_N} e^{-\beta H(\sigma)}$.

1. Pour quelles configurations σ la mesure de Gibbs est-elle maximale ? Quelle est la limite de la mesure de Gibbs lorsque $\beta \to +\infty$?
2. On souhaite trouver une matrice de transition Q_β telle que μ_β soit réversible par rapport à Q_β. Que doit vérifier le rapport $\frac{Q_\beta(\sigma,\sigma')}{Q_\beta(\sigma',\sigma)}$?

   Pour $\sigma \in \Sigma_N$ et $k \in \mathbb{T}_N$, on note $\sigma^{(k)}$ la configuration obtenue à partir de σ en inversant le spin du site k, i.e. $\sigma^{(k)}_k = -\sigma_k$ et $\sigma^{(k)}_i = \sigma_i$ pour tout $i \neq k$. Pour simplifier la recherche de la matrice de transition, on va supposer que les seules transitions (non triviales) autorisées sont celles qui ne perturbent qu'un site. Plus précisément, on suppose dans la suite que $Q_\beta(\sigma,\sigma') \neq 0$ si et seulement si il existe k tel que $\sigma' = \sigma^{(k)}$ ou $\sigma' = \sigma$. On suppose également que $Q_\beta(\sigma,\sigma^{(k)}) = 1/N^2$ si $\Delta H(\sigma,\sigma^{(k)}) \leq 0$.
3. Montrer que l'on peut trouver une matrice Q_β avec ces contraintes et pour laquelle μ_β est réversible.
4. Montrer que μ_β est l'unique probabilité invariante.
5. Calculer $\Delta H(\sigma,\sigma^{(k)}) = H(\sigma^{(k)}) - H(\sigma)$ en fonction de σ. Quelle est la condition pour que $\Delta H(\sigma,\sigma^{(k)}) = 0$?
6. En pratique, comment implémenter simplement et de manière efficace une simulation de la chaîne de Markov de matrice Q_β ?

Remarque : Le principal intérêt de cette procédure réside dans le fait qu'elle ne nécessite pas la connaissance de la constante de normalisation Z_β dont le calcul est, en général, trop coûteux.