TD - Processus Stochastiques

Chaînes de Markov

Exercice 1 (Quelques calculs)**.** Soient $p \in [0,1]$ et $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur $E = \{1,2,3\}$ de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ p & 1-p & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans la suite on suppose que tous les conditionnements sont de probabilité non nulle.

1. Dessiner le graphe de cette chaîne de Markov. Combien y a-t-il de classes de communication ?
2. Que valent $\mathbb{P}(X_1 = 1 \mid X_0 = 1)$, $\mathbb{P}(X_3 = 1 \mid X_0 = 1)$ et $\mathbb{P}(X_2 = 2 \mid X_0 = 2)$?
3. Calculer $\mathbb{P}(X_6 = 3 \text{ et } X_5 = 2 \mid X_0 = 1 \text{ et } X_4 = 2)$.
4. Calculer $\mathbb{P}(X_1 = 2 \mid X_2 = 2 \text{ et } X_0 = 3)$.
5. Si X_0 suit la loi uniforme sur $\{1,2,3\}$, quelle est la loi de X_1 ? Calculer $\mathbb{E}[f(X_2)]$ pour $f(1) = f(3) = -9$ et $f(2) = 18$.

Exercice 2 (Chaîne de Markov et indépendance)**.** Soient S un ensemble dénombrable et $(E, \mathcal{E})$ un ensemble mesurable. Soient aussi $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite (*appelée suite d'innovations*) de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$ et $\varphi : S \times E \to S$ une application mesurable. On définit une suite de variables $(X_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans S par $X_0 = x \in S$ et $X_{n+1} = \varphi(X_n, Z_{n+1})$ pour tout $n \geq 0$.

Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov (homogène) et déterminer sa matrice de transition.

Exercice 3 (Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$)**.** Soit $(S_n)_{n\geq 0}$ la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ définie par $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ (et $S_0 = 0$) avec des X_i i.i.d. de loi $\mathbb{P}(X_i = -1) = \mathbb{P}(X_i = +1) = 1/2$.

1. Écrire la matrice de transition q de la chaîne de Markov.
2. Expliciter la loi de S_n en fonction de n.
3. Montrer que S_n admet une unique probabilité stationnaire, que l'on explicitera.
4. Montrer que la loi de S_n converge vers cette unique probabilité stationnaire quand n tend vers l'infini. Que pensez-vous de la vitesse de convergence ?

Exercice 4 (Cas général à 2 états)**.** Toute matrice stochastique de taille 2×2 peut s'écrire

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

avec $p, q \in [0,1]$.

1. En fonction de p et q, dire si P est absorbante et/ou irréductible.
2. Supposons que $p + q \neq 0$. Montrer que la matrice

$$\Pi = \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} q & p \\ q & p \end{pmatrix}$$

   est un projecteur ($\Pi^2 = \Pi$) qui commute avec P. Calculer son noyau et son image.
3. Que vaut $Q = P - \Pi$? Et Q^2 ? En déduire Q^n pour tout n.
4. Montrer que $Q\Pi = \Pi Q = 0$. En déduire P^n et discuter sa limite en fonction de p et q.

* **Exercice 5** (Urnes)**.** Déterminer la matrice de transition des chaînes de Markov suivantes :

(i) N boules noires et N boules blanches sont placées dans 2 urnes de telle façon que chaque urne contienne N boules. À chaque instant on choisit au hasard une boule dans chaque urne et on échange les deux boules. À l'instant n, l'état du système X_n est le nombre de boules blanches de la première urne.

(ii) N boules numérotées de 1 à N sont réparties dans deux urnes. À chaque instant, on tire un numéro i au hasard entre 1 et N et la boule de numéro i est changée d'urne. À l'instant n l'état du système X_n est le nombre de boules dans la première urne.

1. Quelle hypothèse faut-il ajouter pour justifier le caractère markovien ?
2. Construire la chaîne (ii) à l'aide d'une suite d'innovations (*cf. Exercice 2*).

   Remarque : On pourrait faire de même pour la chaîne (i), mais c'est plus compliqué.
3. Déterminer la distribution stationnaire de ces chaînes.
4. *Pour plus tard :* Déterminer l'espérance du nombre de tirages nécessaires pour revenir à l'état initial dans les cas :

   — $N = 2M$ et $X_0 = M$

   — $N = 2M$ et $X_0 = 2M$.

   Donner un équivalent lorsque M est grand et une valeur approchée pour $N = 10$.