TD - Processus Stochastiques

Révisions

1 Loi de variables aléatoires

Exercice 1 (Maximiser l'espérance)**.** Soit $n \geq 2$. On considère deux variables aléatoires indépendantes X_1 et X_2, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, et suivant la loi uniforme discrète sur $\{1,2,...,n\}$. On considère a un entier de $\{1,2,...,n\}$, et Y la variable aléatoire définie par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = \begin{cases} X_2(\omega) & \text{si } X_1(\omega) \leq a \\ X_1(\omega) & \text{si } X_1(\omega) > a \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de Y et en déduire son espérance.
2. Conclure.

Exercice 2 (Changement de variables)**.**

1. Soit U une variable aléatoire uniforme sur $[0,1]$. Quelle est la densité de $\tan(\pi U/2)$?
2. Soient X et Y deux variables indépendantes de loi $\mathscr{N}(0,1)$.
   (a) Quelle est la densité de X/Y ?
   * (b) Quelle est la densité jointe de $(X/Y, X^2+Y^2)$?

2 Convergence

Exercice 3 (Comparaison des modes de convergence)**.** Soient $(x_n)_{n\geq 1}$ et $(p_n)_{n\geq 1}$ deux suites de réels non nuls telles que $0 < p_n \leq 1$. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes telle que

$$\mathbb{P}(X_n = x_n) = p_n \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - p_n.$$

Répondre aux questions suivantes concernant la convegence de $(X_n)_{n\geq 1}$ vers 0, puis remplir le tableau.

1. Convergences en loi et en probabilité (qui sont équivalentes ici car ?).
   (a) Quelle condition sur (x_n) est suffisante pour que (X_n) converge vers 0 ?
   (b) Supposons que $x_n \geq 1$. Quelle est la condition nécessaire et suffisante (CNS) sur (p_n) pour que (X_n) converge vers 0 ?
2. Convergence presque sûre.
   (a) Quelle condition sur (x_n) est suffisante pour que (X_n) converge p.s. vers 0 ?
   (b) Supposons que $x_n \geq 1$. Quelle est la CNS sur (p_n) pour que (X_n) converge p.s. vers 0 ?
   Indication : utiliser le Lemme de Borel-Cantelli.
3. Quelle est la CNS sur les suites (x_n) et (p_n) pour que (X_n) converge p.s. vers 0 dans L^p ?

p_n	x_n	loi	p.s.	L^1	L^2
$1/2$	$1/n$				
$1/n^2$	1				
$1/n^2$	n				
$1/n^2$	n^2				
$1/n$	1				
$1/n$	$\sqrt{n}$				
$1/n$	n				

Exercice 4 (Marche aléatoire)**.** Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite i.i.d. de v.a. telle que :

$$\mathbb{P}(X_i = +1) = p, \quad \mathbb{P}(X_i = -1) = q, \quad p+q = 1.$$

On considère la marche aléatoire simple unidimensionnelle définie par

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

avec $S_0 = 0$. Soit $A_n = \{S_n = 0\}$ l'événement "la marche retourne en 0 au temps n". On pose

$$A = \cap_{k\geq 1} \cup_{n\geq k} A_n = \limsup_{n\to+\infty} A_n = \{\text{"la marche retourne une infinité de fois en 0"}\}.$$

1. Énoncer les lemmes de Borel-Cantelli.
* 2. Calculer $\mathbb{P}(A_n)$.
* 3. Prouver que, si $p \neq 1/2$, alors $\mathbb{P}(A) = 0$.
4. En utilisant la loi forte des grands nombres, donner une conclusion plus précise permettant de retrouver le résultat précédent.