NORD

Soient $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice réelle non nulle et $x \in \mathbb{R}^n$. On écrit $A \geq 0$ (resp. $A > 0$) si $a_{ij} \geq 0$ (resp. $a_{ij} > 0$) pour tout $1 \leq i, j \leq n$. On fait de même pour $x \geq 0$ et $x > 0$.

On suppose que $A > 0$ et on note $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^n,\ x \geq 0,\ ||x||_1 = 1\}$.

1. Soit $x \geq 0$ mais $x \neq 0$, montrer que $Ax > 0$.
2. Soit $x \in \mathcal{X}$, exprimer $t_0 = \max\{t \in \mathbb{R}_+,\ Ax - tx \geq 0\}$ en fonction des coefficients de A et des coordonnées de x.
3. On considère la fonction $\theta : \mathcal{X} \to \mathbb{R}_+$ définie par $\theta(x) := \max\{t \geq 0,\ Ax - tx \geq 0\}$. Montrer que le maximum de θ est atteint.
4. On note $r_0 = \max_{x\in\mathcal{X}} \theta(x)$ et $x^+ \in \arg\max_{x\in\mathcal{X}} \theta(x)$. Montrer que x^+ est un vecteur propre de valeur propre r_0. *On pourra raisonner par l'absurde.*

EST

Soient $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice réelle non nulle et $x \in \mathbb{R}^n$. On écrit $A \geq 0$ (resp. $A > 0$) si $a_{ij} \geq 0$ (resp. $a_{ij} > 0$) pour tout $1 \leq i, j \leq n$. On fait de même pour $x \geq 0$ et $x > 0$. On note $\sigma(A)$ le spectre de A et, sans perdre de généralité, on suppose que le rayon spectral est $\rho(A) = 1$.

On suppose que $A > 0$ et on note $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^n,\ x \geq 0,\ ||x||_1 = 1\}$. De plus, on suppose que la fonction $\theta : \mathcal{X} \to \mathbb{R}_+$ définie par $\theta(x) := \max\{t \geq 0,\ Ax - tx \geq 0\}$ atteint son maximum : on note $r_0 = \max_{x\in\mathcal{X}} \theta(x)$. On suppose également que r_0 est une valeur propre de A.

1. Soit $x \geq 0$ mais $x \neq 0$, montrer que $Ax > 0$.
2. Pour $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$, on note $|x| = \begin{pmatrix} |x_1| \\ \cdot \\ |x_n| \end{pmatrix}$. Montrer que $A|x| - |Ax| \geq 0$.
3. En déduire que $r_0 = \rho(A) = 1$.
4. Soit x tel que $Ax = \lambda x$ avec $|\lambda| = 1$. Montrer que $A|x| = |x|$ et que $x = \pm|x|$.
5. En déduire que, si λ est une valeur propre de A telle que $|\lambda| = 1$, alors $\lambda = 1$.
   On dit que 1 *est valeur propre dominante de* A.

SUD

Soient $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice réelle non nulle et $x \in \mathbb{R}^n$. On écrit $A \geq 0$ (resp. $A > 0$) si $a_{ij} \geq 0$ (resp. $a_{ij} > 0$) pour tout $1 \leq i, j \leq n$. On fait de même pour $x \geq 0$ et $x > 0$. On note $\sigma(A)$ le spectre de A et, sans perdre de généralité, on suppose que le rayon spectral est $\rho(A) = 1$.

On suppose que $A > 0$ et qu'il existe $x^+ > 0$ tel que $Ax^+ = x^+$. On note $m = \min_i x_i^+$ et $M = \max_i x_i^+$.

1. On rappelle que $|||A|||_\infty = \max_{||x||_\infty=1} ||Ax||_\infty$. Montrer que $|||A|||_\infty = \max_i \sum_j a_{ij}$.
2. Montrer que pour tout k, $|||A^k|||_\infty \leq M/m$.
3. Soit λ une valeur propre de A. Montrer que λ est une valeur propre semi-simple (i.e. espace propre et espace caractéristique sont égaux) si et seulement si $\ker(A - \lambda I)^2 = \ker(A - \lambda I)$.

OUEST

Soient $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice réelle non nulle et $x \in \mathbb{R}^n$. On écrit $A \geq 0$ (resp. $A > 0$) si $a_{ij} \geq 0$ (resp. $a_{ij} > 0$) pour tout $1 \leq i, j \leq n$. On fait de même pour $x \geq 0$ et $x > 0$.

On suppose que $A > 0$ et qu'il existe $C > 0$ telle que pour tout k, $|||A^k|||_\infty \leq C$. On suppose de plus que 1 est une valeur propre de A.

1. Soit λ une valeur propre de A. Montrer que λ est une valeur propre semi-simple (i.e. espace propre et espace caractéristique sont égaux) si et seulement si $\ker(A - \lambda I)^2 = \ker(A - \lambda I)$.
2. Supposons que 1 n'est pas une valeur propre semi-simple de A. Montrer qu'il existe v et w non nuls tel que $Av = v + w$ et $Aw = w$.
3. Que vaut $A^k v$? En déduire que 1 est une valeur propre semi-simple de A.