TD - Processus Stochastiques

JIGSAW - Perron-Frobenius

NORD.

1. Calcul simple
2. $t_0 = \min \frac{(Ax)_i}{x_i}$ où le minimum est pris sur les i tels que $x_i \neq 0$. Au passage, pour tout $x \in \mathcal{X}$ et i, on a $(Ax)_i \leq |||A|||_1 = \max_j \sum_i a_{ij}$.
3. Montrons que θ est continue. Soit (x_n) une suite de $\mathcal{X}$ qui tend vers $x \in \mathcal{X}$. Pour n assez grand, on a l'inclusion $\{i, x_i \neq 0\} \subset \{i, (x_n)_i \neq 0\}$ et on en déduit que $\theta(x_n) \to \theta(x)$. Max atteint car fonction continue sur un espace compact.
4. Par l'absurde, $Ax^+ - r_0 x^+ \geq 0$ mais non nul. D'après 1/, $A(Ax^+) - r_0 Ax^+ > 0$ et donc $Ay - r_0 y > 0$ avec $y = Ax^+/||Ax^+||_1 \in \mathcal{X}$. Pour ε assez petit, on a $Ay - (r_0 + \varepsilon)y > 0$. Contradiction avec la définition de r_0.

EST.

1. Calcul simple.
2. Calcul simple. Inégalité triangulaire.
3. Soit x ve.p. de va.p. λ. D'après 1/, $A|x| - |\lambda||x| \geq 0$. En renormalisant x, on en déduit que $|\lambda| \leq r_0$ (par définition de r_0) et donc $\rho(A) \leq r_0$. Mais, $r_0 \leq \rho(A)$ car r_0 est va.p. pour A. D'où le résultat.
4. On $y = A|x| - |x| \geq 0$. Supposons par l'absurde $y \neq 0$, alors $A(A|x|) - A|x| > 0$ et donc $Az - z > 0$ avec $z = A|x|/||A|x|||_1 \in \mathcal{X}$. Pour ε assez petit, on a $Az - (1+\varepsilon)z > 0$. Contradiction car $r_0 = 1$. Donc $A|x| = |x|$ et on se retrouve dans le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire utilisée à la question 1/. Nécessairement, toutes les coordonnées sont de même signe.
5. Réécriture du résultat précédent.

SUD.

1. Clairement, $|||A|||_\infty \leq ||A\mathbf{1}||_\infty = \max_i \sum_j a_{ij}$ où $\mathbf{1}$ est le vecteur rempli de 1. Le vecteur $\mathbf{1}$ et de norme infinie égale à 1 donc on a bien l'inégalité dans l'autre sens.
2. $(A^k x^+)_i = \sum_j a_{ij}^{(k)} x_j^+ \geq |||A^k|||_\infty m$, donc $||A^k x||_\infty \geq |||A^k|||_\infty m$. Mais $A^k x^+ = x^+$, d'où le résultat.
3. On montre en fait plus fort : "$\ker(A - \lambda I)^2 = \ker(A - \lambda I)$ est équivalent à $\ker(A - \lambda I)^m = \ker(A - \lambda I)$ pour tout m".

OUEST.

1. On montre en fait plus fort : "$\ker(A - \lambda I)^2 = \ker(A - \lambda I)$ est équivalent à $\ker(A - \lambda I)^m = \ker(A - \lambda I)$ pour tout m"
2. On prend $v \in \ker(A - \lambda I)^2 \setminus \ker(A - \lambda I)$ et $w = Av - v \neq 0$.
3. $A^k v = v + kw$. Par inégalité triangulaire inversée, $||A^k v||_\infty \geq (k\,||w||_\infty - ||v||_\infty) \to_{k \to +\infty} +\infty$. Contradiction avec la constante C.

Va.p. simple. Soit x tq $Ax = x$. Montrons que x est colinéaire à x^+. On a $x = \pm|x|$ d'après Est. On peut trouver un $t \geq 0$ tel que $x^+ - t|x| \geq 0$ mais pas > 0. Par l'absurde, si $x^+ - t|x| \neq 0$, alors $x^+ - t|x| = A(x^+ - t|x|) > 0$ d'après Nord et on aboutit à une contradiction. Donc $x^+ \pm tx = 0$ et on a montré la colinéarité.

A **primitive.** On applique les résultats précédents à A^k : x^+ vérifie $A^k x^+ = x^+$. On a $A^k(Ax^+) = A(A^k x^+) = Ax^+$ et donc $Ax^+ = \alpha x^+ \geq 0$ (i.e. $\alpha \geq 0$) car 1 est va.p. simple de A^k. De plus, $A^k x^+ = \alpha^k x^+ = x^+$ implique $Ax^+ = x^+$. Va.p. dominante car les valeurs propres de A^k sont les λ^k. Va.p. simple car la seule va.p. de A^k de module 1 est simple.