Feuille de TD 4

Exercice 1. Pour répondre à certains besoins, une scierie souhaite produire des planches de bois dont la longueur moyenne est $m_0 = 52$ cm. Si la longueur moyenne des planches est différente de m_0 (de manière significative) alors la scierie perd le marché. Un statisticien est appelé pour vérifier cela. Il a mesuré les 10 dernières planches :

52.2	51.0	50.0	48.7	49.0	50.5	48.0	49.3	52.5	52.9

On fera l'hypothèse que la taille des planches suit une loi gaussienne. Le statisticien souhaite établir un test gaussien sur la moyenne que l'on notera m. Dans les questions (1) à (7), on supposera que l'écart-type de la longueur des planches est $\sigma = 2$ cm.

(1) Quelle hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ le statisticien doit-il choisir ? Même question pour l'alternative $\mathcal{H}_1$.

(2) Quelle est la statistique que l'on utilisera dans la suite ? Vérifiez que les variables que vous utilisez ont bien été définies.

(3) Compte tenu de votre réponse à la question (1), quelle est l'allure de la zone de rejet que l'on va considérer ? A choisir entre : unilatérale ($]-\infty, A[$ ou $]A, +\infty[$) ou bien bilatérale ($]-\infty, A[\cup]B, +\infty[$).

(4) Soit $\alpha \in]0,1[$. Etablir un test de niveau α.

(5) Peut-on considérer au niveau 0.01 que la production actuelle est viable ? au niveau 0.05 ? Donner le niveau critique.

(6) Calculer la puissance du test au niveau 0.05 établi à la question précédente au point $m_1 = 54$ cm.

(7) On suppose maintenant que la scierie perd le marché si la longueur moyenne des planches est inférieure à 52 cm. Reprendre les questions (1) à (5).

(8) On suppose maintenant que l'écart-type est inconnu. Reprendre les questions (1) à (5) en utilisant une statistique de Student.

Exercice 2. En 2013, il y a eu 650 naissances dans une maternité : 331 nouveau-nés étaient des garçons et 319 des filles. Peut-on conclure avec un risque (approximatif) de 5% qu'il y a significativement plus de garçons que de filles qui naissent ?

Exercice 3. Toto adore les bonbons. Ses parents ont peur qu'il s'abîme les dents et souhaitent vérifier sa consommation. Le dentiste leur a dit qu'à partir de 10 bonbons par jour, il y a un risque pour l'émail des dents. Chaque jour, le père de Toto note le nombre de bonbons engloutis par Toto.

Sur le mois de janvier 2016, Toto a mangé en moyenne (empirique) $\overline{x}_n = 10,1$ bonbons par jour. De plus, le père de Toto a calculé l'écart type empirique $\hat{\sigma}_n = 1$. On rappelle que l'écart type moyen empirique converge vers l'écart-type de la loi sous-jacente.

Vous etes à la place du père de Toto. En utilisant le Théorème de la limite centrale et le Lemme de Slutsky, établissez un test de niveau asymptotique $\alpha = 0,05$.
Indication : Vous pouvez vous inspirer des questions intermédiaires de l'exercice 1.

Exercice 4. Pamela est un mannequin célèbre dont le poids est strictement surveillé par Cruella. Celle-ci essaie de renvoyer Pamela sous prétexte que son poids varie trop fortement. En effet, Cruella a fixé une limite à ne pas dépasser. La variance du poids des filles ne doit pas excéder $v_0^2 = 3$ kg^2.

Pamela est sûre d'être bien en desous de la limite imposée par Cruella. Elle note son poids tous les jours pendant une semaine, voici les résultats.

53.4	54.3	54.1	52.8	53.7	54.9	55.2

On supposera que le poids de Pamela suit une loi gaussienne de moyenne μ et variance v^2. Aidez Pamela en établissant un test statistique judicieux qui prouve qu'elle respecte la limite de manière significative.

(1) Quelle hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ Pamela doit-elle choisir ? Même question pour l'alternative $\mathcal{H}_1$.

(2) Quelle est la statistique que l'on utilisera dans la suite ? Vérifiez que les variables que vous utilisez ont bien été définies.

(3) Compte tenu de votre réponse à la question (1), quelle est l'allure de la zone de rejet que l'on va considérer ? A choisir entre : unilatérale ($]-\infty, A]$ ou $[A, +\infty[$) ou bien bilatérale ($]-\infty, A[\cup]B, +\infty[$).

(4) Soit $\alpha \in]0,1[$. Etablir un test de niveau α.

(5) **A.N.** $\alpha = 0,05$.

(6) Calculer la puissance du test obtenu à la question précédente au point $v^2 = 2,3$ kg^2.

Exercice 5. Une entreprise fabrique des sacs en plastique pour déchets. Afin de surveiller la production, elle effectue des contrôles réguliers portant sur le poids maximum que les sacs peuvent supporter.

— A une première date t_1, le contrôle de $n_1 = 21$ sacs a donné une moyenne empirique de $\overline{x}_{n_1} = 58$ kg et un écart type moyen empirique non biaisé de $\hat{\sigma}_{n_1} = 2,5$ kg.

— A la seconde date t_2, le contrôle de $n_2 = 16$ sacs a donné une moyenne empirique de $\overline{y}_{n_2} = 56$ kg et un écart type moyen empirique non biaisé de $\hat{\tau}_{n_2} = 3,5$ kg.

On supposera que les poids maximum relevés forment deux échantillons indépendants de loi gaussienne. A priori, les paramètres de ces deux lois gaussiennes sont différents.

On souhaite évaluer si la résistance des sacs a évolué entre les deux dates. On se propose donc de faire un test de comparaison d'échantillons gaussiens.

(1) Mettre en place un test d'égalité des variances au niveau $\alpha = 0,05$.

(2) Dans le cas où l'hypothèse d'égalité des variances n'est pas rejetée, mettre en place un test d'égalité des moyennes au niveau $\alpha = 0,05$.

Exercice 6. Dans la population des familles de quatre enfants, on a prélevé un échantillon de 100 familles et on a observé 7 familles n'ayant pas de garçon, 20 ayant un garçon, 41 ayant 2 garçons, 22 ayant 3 garçons et 10 ayant quatre garçons. Vérifier, au niveau d'erreur de 5%, l'hypothèse $\mathcal{H}_0$ que le nombre de garçons dans les familles de 4 enfants est distribué selon la loi binomiale $\mathcal{B}(4, 1/2)$.