Feuille de TD 3

Exercice 1. Le poids d'un nouveau-né suit une variable aléatoire normale de moyenne inconnue μ et d'écart-type égal à 0,5 kg. On suppose que les poids sont indépendants. Au cours de ce mois, il y a eu 49 naissances dans un hôpital. Un infirmier a pesé ces nouveau-né et a trouvé que leur poids moyen était de de 3,6 kg.

(1) Donner une estimation du paramètre μ.

(2) Déterminer un intervalle de confiance bilatéral et symétrique à 95% pour le poids moyen d'un nouveau-né dans la population desservie par cet hôpital.

(3) Même question avec un degré de confiance de 99%. Comparer les deux intervalles.

(4) Quel serait le degré de confiance d'un intervalle de fluctuation de longueur 0,1 kg centré en la moyenne empirique ?

Exercice 2. Soit X une variable suivant une loi normale de moyenne m et d'écart type $\sigma = 1.5$. On veut estimer m par intervalle de confiance à 98%. Quelle est la taille minimale de l'échantillon pour que la longueur de l'intervalle ne dépasse pas 0.15 ?

Exercice 3. Soit A une propriété qui peut être ou non vérifiée par les individus d'une population (qui est de grande taille). En interrogeant 50 personnes choisies au hasard dans cette population, un enquêteur relève qu'il y en a 30 qui vérifient la propriété A.

(1) Donner une estimation ponctuelle de la proportion d'individu qui vérifie la propriété A notée p.

Dans la suite on utilisera une approximation gaussienne. On note $X_i = 1$ si la i-ème personne interrogée vérifie A et $X_i = 0$ sinon. Notons F la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ et t tel que $F(t) = 1 - 0.05/2$ et de plus $\bar{X}_n = n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i$.

(2) Que dire de la valeur de

$$\mathbb{P}\left(\bar{X}_n - t\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq p \leq \bar{X}_n + t\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) \quad ?$$

(3) Donner un intervalle de fluctuation à 95% pour p en utilisant la méthode de l'ellipse.

(4) Donner une estimation par intervalle de confiance à 95% pour p, en utilisant le Lemme de Slutsky.

(5) (a) Montrer que si $0 \leq q \leq 1$ alors $q(1-q) \leq 1/4$.

(b) En déduire une autre méthode permettant de donner une estimation d'une proportion par intervalle de confiance.

(c) La méthode introduite à la question précédente est appelée méthode par excès. Pourquoi ?

(d) Donner un intervalle de confiance à 95% pour p en utilisant la méthode par excès.

Exercice 4. Les diamètres (en cm) de 20 vis produites par une machine sont les suivants :

1.05	1.04	1.06	1.02	1.03	1.04	1.07	1.09	1.02	1.03
1.05	1.03	1.09	1.07	1.03	1.05	1.07	1.04	1.02	1.04

On décide d'utiliser un modèle Gaussien dont la moyenne et l'écart-type sont inconnus. Donner un intervalle de confiance au niveau 0.95 :

(1) du diamètre moyen des vis produites par la machine.

(2) de la variance du diamètre des vis produites par la machine.

Exercice 5. Chaque jour, un avion subit un retard aléatoire au départ, évalué en minutes, indépendant des retards des autres jours et dont la loi est supposée exponentielle de paramètre λ. Sur une année (365 jours), le retard moyen a été de 8 minutes. Donner un intervalle de confiance de niveau (environ) 95% pour λ.

Exercice 6. L'entreprise *ResisThé* produit des théières solides. On souhaite savoir dans quelle mesure la résistance y d'une théière est impactée par son épaisseur x. Des couples (x_i, y_i) ont été mesurés lors de 10 essais et sont synthétisés dans le tableau suivant :

x	4.1	2.2	4.8	4.3	3.0	1.3	3.9	2.0	4.0	1.9
y	171	48.5	231	191	92.9	16.7	154	42.7	160	38.0

Dans la suite, on utilisera le modèle $Y_i = \beta x_i^2 + \varepsilon_i$ où x_i est l'épaisseur de la i-ème théière, Y_i est la mesure de résistance de la théière et ε_i représente l'erreur de mesure. On supposera également que les ε_i sont i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, \sigma)$ avec σ connu.

On utilise l'estimateur de β suivant : $B = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} \frac{Y_i}{x_i^2}$.

(1) Montrer que B est sans biais. Donner une estimation ponctuelle de β.

(2) Quelle est la loi de B ?

(3) Soit α dans $]0, 1[$ donné, construire un intervalle de fluctuation pour β avec degré de confiance $1 - \alpha$.

(4) On suppose que $\sigma = 1$. Donner un intervalle de confiance pour β au niveau 90%.

Exercice 7. François est un éleveur féru de compétition. Il a inscri son lapin Jeannot au prochain concours du plus gros lapin de la région. François investit un jour dans l'achat d'une balance *Poilour* afin de connaître précisément le poids de son protégé. La notice de la balance indique que celle-ci peut commettre des erreurs de mesure dont l'écart-type vaut 0,3 kg. En effet, nul n'est parfait. Ne voulant rien laisser au hasard, François dévalise le magasin en investissant dans l'achat de 99 nouvelles balances *Poilour* et note le poids donné par chacune des 100 balances. Résultat moyen des pesées : 18,4 kg. Dans la suite, on fait l'hypothèse d'un modèle gaussien.

(1) Donner à François un intervalle de confiance pour le poids de Jeannot de niveau 95%.

(2) Expliquer comment les statisticiens de l'entreprise *Poilour* ont pu fournir une valeur de σ. Fournir aussi un intervalle de confiance de niveau α pour n observations.