

Feuille de TD 2

Exercice 1. Soit (X_1, \dots, X_n) un échantillon de loi de Poisson de paramètre θ . On pose $\bar{X}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$.

- (1) Donner pour tout $k \geq 0$, $\mathbb{P}(X_1 = k)$.
- (2) Parmi les estimateurs de θ suivants, lesquels sont sans biais? Lesquels sont « bons » ?

$$\begin{cases} T_1(X_1, \dots, X_n) = (X_1 + X_2)/2, \\ T_2(X_1, \dots, X_n) = \bar{X}_n, \\ T_3(X_1, \dots, X_n) = \bar{X}_n - 1/n \end{cases}$$

Exercice 2. Au second tour d'une élection, il reste seulement deux candidats. Monsieur S espère bien détrôner Monsieur H. Pour évaluer ses chances, il effectue un sondage auprès de n personnes (on supposera que l'échantillon est représentatif).

- (1) On note p la proportion de gens qui voteront pour Monsieur S et $X_i = 1$ si le i -ème individu s'exprime en faveur de Monsieur S et $X_i = 0$ si il se prononce en faveur de Monsieur H (on élimine le cas de l'abstention). Quelle est la loi de X_1 ?
- (2) $\bar{X}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$ est-il un « bon » estimateur de p ?
- (3) Donner la loi de $n\bar{X}_n$.

Exercice 3. Les individus d'une population possèdent un caractère X qui suit une loi de probabilité dont la densité est donnée par $f_\theta(x) = kx^2/\theta^3$ pour $x \in [0, \theta]$ et $f_\theta(x) = 0$ sinon. On s'intéresse au paramètre $\theta > 0$. A des fins statistiques, on dispose de l'échantillon suivant :

1.05	0.92	1.95	1.85	1.99	1.60	1.87	1.63	0.81	0.56
------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

- (1) Déterminer la constante k pour que f_θ soit une densité.
- (2) On se donne (X_1, \dots, X_n) un échantillon de même loi que X . Montrer que la moyenne $\bar{X}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$ n'est pas un estimateur sans biais de θ .
- (3) En déduire un estimateur sans biais de θ . Utiliser le tableau de valeurs pour donner une estimation de θ .
- (4) L'échantillon suivant est également à notre disposition :

1.87	1.93	1.64	1.35	1.44	1.69	0.73	1.89	1.66	1.81
------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

Que donne la nouvelle estimation de θ ?

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire de densité donnée par $f_b(x) = 4x^3/b^4$ pour $x \in [0, b]$ et $f_b(x) = 0$ sinon. Calculer un estimateur de b par la méthode des moments.

Exercice 5. On suppose que la durée de fonctionnement d'un micro-ondes suit une loi sans mémoire de moyenne $1/\lambda$. On souhaite estimer la loi de la durée de fonctionnement d'un micro-ondes. Pour ce faire on dispose de $n \geq 1$ "cadavres" de micro-ondes dont on connaît la durée de fonctionnement. On supposera qu'elles sont indépendantes d'un micro-onde à l'autre.

- (1) On note X_i la durée de fonctionnement du i -ème micro-onde. Quelle est la loi de X_i ?
- (2) Donner un estimateur de λ par méthode des moments.
- (3) Donner un estimateur de λ par maximum de vraisemblance.
- (4) Montrer que ces estimateurs sont consistants.

Exercice 6. Un touriste se rend au casino. Là bas, on lui propose de jouer au jeu suivant : "Le jeu consiste en n étapes. A chaque étape, une pièce est lancée. Si elle tombe sur pile, on lui donne 2 euros. Si elle tombe sur face, il devra payer 1 euro."

- (1) Modéliser le problème à l'aide de variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p et de la fonction f telle que : $f(0) = -1$, $f(1) = 2$. Que représente p ? On note G_n le gain du joueur après les n lancers.
- (2) Après réflexion, le touriste décide d'accepter le jeu : si la pièce n'est pas déséquilibrée, il est persuadé de l'emporter. Expliquer pourquoi en calculant une espérance.
- (3) Au bout de 100 lancers ($n = 100$), le touriste a un gain de 10 euros. En rentrant à son hôtel, il décide de savoir si la pièce était déséquilibrée. Proposer un « bon » estimateur de p . Que donne l'estimation de p ?
- (4) En reprenant les résultats de la question (2), donner le paramètre p pour que le jeu soit équitable.

Exercice 7. Un étang contient un nombre inconnu $N \geq 1$ de poissons. Pour déterminer N on effectue une première pêche qui amène $r \geq 1$ poissons que l'on marque, puis que l'on relâche. On effectue ensuite une deuxième pêche qui amène $n \geq 1$ poissons, parmi lesquels on trouve $k \geq 0$ poissons marqués.

- (1) Quelles sont les quantités aléatoires (réalisations d'une variable aléatoire) ? Lesquelles sont connues ? Quelle est la quantité que l'on souhaite estimer ?
 Dans les questions (2) à (5), on supposera que la deuxième pêche est constituée de poissons différents entre eux (tirage sans remise).
- (2) Quel est le nombre minimal N_{\min} de poissons dans l'étang ?
- (3) Quelle est la probabilité $p(k, N)$ que la deuxième pêche ait amené exactement k poissons marqués ?
- (4) Pour $N > N_{\min}$, calculer $p(k, N)/p(k, N - 1)$. En déduire l'estimateur du maximum de vraisemblance de N .
- (5) **Application numérique :** On suppose que $n = r = 1000$ et $k = 100$. Que donnent les réponses aux questions (2) et (4) ?

Dans la suite, on supposera que la deuxième pêche se déroule de la manière suivante : on pêche le premier poisson, on vérifie si il est marqué puis on le relâche. On fait de même pour le deuxième poisson et ainsi de suite jusqu'à en avoir pêché n (tirages successifs avec remise).

- (6) Quelle est la probabilité $q(k, N)$ que la deuxième pêche ait amené exactement k poissons marqués ?
- (7) Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance de N .

Exercice 8. Soit (X_1, \dots, X_n) un échantillon d'une loi uniforme $\mathcal{U}([0, \theta])$.

- (1) Représenter le graphe de la densité de X_1 . Rappeler $\mathbb{E}[X_1]$ et $\text{Var}(X_1)$.
- (2) En tant qu'estimateur de θ , quel est le biais de \bar{X}_n ? Quelle est la variance de \bar{X}_n ? En déduire un « bon » estimateur de θ .

- (3) Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ . On le notera B_{MV} .
- (4) Calculer la fonction de répartition de B_{MV} . En déduire sa densité, son espérance et sa variance.
- (5) En déduire un « bon » estimateur B de θ .
- (6) Et si vous deviez choisir entre le « bon » estimateur trouvé à la question 2 et celui trouvé à la question 5?
- (7) **Rappel : Calcul de densité.** Quelle est la densité de la v.a. X_1/θ ?

Exercice 9. Soient $\gamma \in]0, 1[$ et $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées à valeur dans $\{-1, 0, 1\}$ telle que $\mathbb{P}(X_1 = -1) = \gamma(1 - \gamma)$ et $\mathbb{P}(X_1 = 0) = \gamma^2$.

- (1) Calculer $\mathbb{E}[X_1]$ et $\mathbb{E}[X_1^2]$ en fonction de γ .
- (2) Inverser sur $]0, 1[$ les fonctions $g_1 : x \mapsto (1-x)^2$ et $g_2 : x \mapsto 1-x^2$. En déduire deux estimateurs de γ par la méthode des moments.
- (3) Pour j dans $\{-1, 0, 1\}$, on note $S_j = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{X_i=j}$. Exprimer l'estimateur par maximum de vraisemblance de γ en fonction de S_{-1} , S_0 et S_1 .