Université de Nice Sophia-Antipolis
L2 MASS
TD de Statistique

Année Universitaire 2015/2016
Statistique

TD 1

Variable aléatoire discrète ou continue ?

Exercice 1. QCM. *Plusieurs bonnes réponses sont possibles.*

(1) Soit $\theta > 0$ un réel. Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées (i.i.d.) de loi uniforme sur $[0,\theta]$. En particulier, la densité de X_1 est donnée par $f : x \mapsto \theta^{-1}\mathbf{1}_{[0,\theta]}(x)$. On pose $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ pour tout $n \geq 1$.

(i) $\mathbb{E}[X_1] = \theta/2$ et $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1) = \theta^2/12$?
(ii) $\mathbb{E}[X_1] = \theta/2$ et $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1) = \theta^2/4$?
(iii) $\mathbb{E}[X_1] = \theta$ et $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1) = \theta^2/6$?
(iv) $\mathbb{E}\left[\bar{X}_n\right] = \theta/2$ et $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\bar{X}_n) = \theta^2/(3n^2)$?
(v) $\mathbb{E}\left[\bar{X}_n\right] = \theta/2$ et $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\bar{X}_n) = \theta^2/(12n)$?
(vi) $\mathbb{E}\left[\bar{X}_n\right] = \theta$ et $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\bar{X}_n) = 0$?

(2) Soit X une v.a. continue de fonction de répartition F_X et de densité f_X. De plus, F_X est donnée par

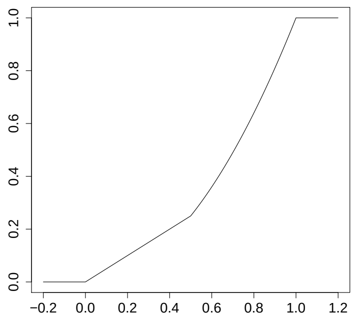
$$F_X(x) = 0 \text{ si } x < 0, \quad F_X(x) = x/2 \text{ si } x \in [0, 1/2[, \quad F_X(x) = x^2 \text{ si } x \in [1/2, 1[, \quad F_X(x) = 1 \text{ si } x \geq 1.$$

(i) $\mathbb{P}(X \geq 3/4) = 9/16$?
(ii) $\mathbb{P}(X \geq 3/4) = 7/16$?
(iii) $f_X(1/4) = 1/4$?
(iv) $f_X(1/4) = 1/2$?
(v) $\mathbb{P}(X \leq 1/4) = 1/8$?
(vi) $\mathbb{P}(X \leq 1/4) = 1/4$?

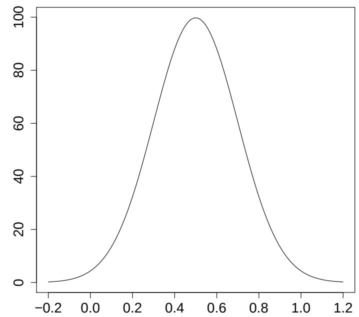
Exercice 2. Pour les phénomènes aléatoires suivants, dire si ils correspondent à une variable aléatoire discrète ou bien continue :

(1) Le temps d'attente à un feu rouge.
(2) Le nombre de voitures devant la mienne au péage.
(3) Le poids d'une personne prise dans la population française.
(4) Le budget de l'entreprise *Tapedur* pour l'année 2015.
(5) Le nombre d'appels reçus au mois de Janvier 2016.
(6) La durée cummulée des appels reçus au mois de Janvier 2016.

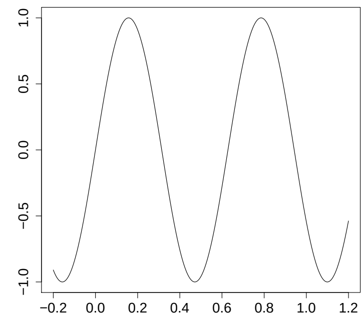
Exercice 3. Dire des graphiques suivants si ils correspondent à une fonction de répartition ou bien une fonction densité associée à une variable aléatoire discrète ou bien continue. *Attention :* Il est possible qu'un ou plusieurs graphes ne correspondent ni à une fonction de répartition ni à une densité.



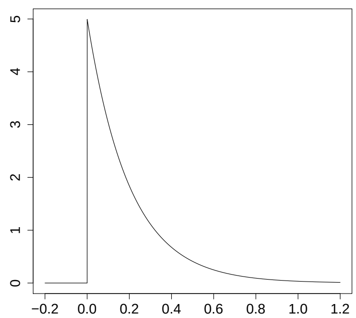
A



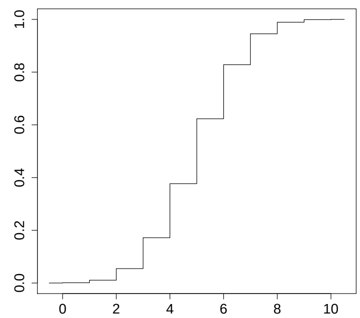
B



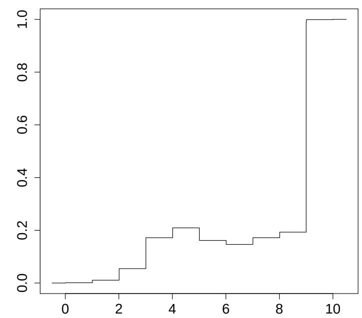
C



D



E



F

Couple de variables aléatoires discrètes

Exercice 4. Soit X et Y deux v.a. définies sur un même univers, et à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$. La loi du couple (X, Y) est donnée par le tableau suivant :

X \ Y	0	1	2
0	0.7	0.05	0
1	0	0.05	0.05
2	0.1	0	0.05

(1) Donner les lois marginales de X et Y.

(2) Déterminer $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\mathrm{X})$ et $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\mathrm{Y})$.

(3) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

(4) Calculer $\mathrm{Cov}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$.

(5) Déterminer la loi de Y conditionné par $X = 1$ et son espérance.

Exercice 5. Montrer que $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\mathrm{X}) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{X} = \mathbb{E}[\mathrm{X}]$. On supposera que X est une v.a. qui prend un nombre fini de valeurs.

Variable aléatoire gaussienne

Exercice 6.

(1) Soit Z une variable aléatoire de loi Gaussienne de moyenne 0 et de variance 1.

(a) Rappeler la densité de Z.

(b) Soient m un réel et σ un réel strictement positif. Calculer la densité de la variable aléatoire $X = m + \sigma Z$.

(c) Identifier les valeurs m et σ comme valeurs caractéristiques de la loi de X. (Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{V}\mathrm{ar}[X]$.)

(2) Pour m un réel et σ un réel strictement positif, on désigne par X une variable aléatoire de loi Gaussienne de moyenne m et de variance σ^2. Montrer que l'on peut écrire X sous la forme $m + \sigma Z$, où Z est une variable aléatoire Gaussienne centrée réduite.

On utilisera les résultats de l'exercice 6 dans toute la suite.

Exercice 7. Une entreprise fabrique des sacs poubelles. On note Y la variable aléatoire qui, à chaque sac prélevé au hasard dans la production, associe la masse maximale en kg qu'il peut supporter sans se déchirer. On suppose que $Y \sim \mathcal{N}(5, 0.4)$.

(1) On note F la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Soit $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Pour tout $a < b$, exprimer $\mathbb{P}(a \leq Z \leq b)$ en fonction de $F(a)$ et $F(b)$. *On pourra ce servir de ce résultat dans les exercices qui suivent.*

(2) En déduire $\mathbb{P}(4.6 \leq Y \leq 5.4)$.

(3) Déterminer le nombre réel h tel que $\mathbb{P}(Y \leq 5 + h) = 0.95$. Que représente le nombre h ?

Exercice 8. Déterminer l'espérance et l'écart type de la loi d'une variable aléatoire normale X sachant que $\mathbb{P}(X \geq 7) = 0.5$ et $\mathbb{P}(X < 8) = 0.8413$.

La v.a. X représente en fait le nombre (exprimé en milliers) de bactéries contenues dans 100 mL d'eau. Calculer la probabilité d'avoir plus de 9000 bactéries dans 100 mL d'eau sachant que l'on en a déjà compté 8000.

Exercice 9. Dans une population, le poids des individus suit une loi normale de moyenne égale à 60 kg et d'écart-type égal à 15 kg. On suppose que les poids des individus sont indépendants. Un ascenseur a une capacité égale à 2200 kg.

(1) Calculer la probabilité que 20 individus pèsent ensemble plus de 2200 kg.

(2) Donner le nombre maximum de personnes pouvant rentrer dans l'ascenseur de sorte que celui-ci ne soit en surcharge qu'avec une probabilité inférieure à 0.01.

Théorème central limite

Exercice 10. A Lille, des enregistrements climatiques indiquent qu'en moyenne sur les cent dernières années, 142 des 365 jours de l'année sont pluvieux. On suppose donc que la probabilité qu'un jour de l'année 2016 soit pluvieux est égale à 142/365. On considère les épisodes de pluie journaliers comme des épreuves indépendantes. On note N le nombre de jours pluvieux au cours de l'année 2016.

(1) Quelle est la loi de N ?

(2) En utilisant l'approximation normale, donner une valeur approchée de la probabilité d'avoir entre 122 et 162 jours pluvieux au cours de l'année 2016.

Exercice 11. Dans une population donnée, on sait qu'il y a environ 6.5% des individus qui souffrent d'allergies alimentaires. On considère un échantillon de 10000 personnes choisies au hasard dans cette population. Déterminer c (le plus petit possible) tel que l'on soit "sûr" à 95% que le nombre de personnes allergiques (sur les 10000) soit plus petit que c.

Exercice 12. Un lot de 10 000 avocats a été calibré. Ainsi, si X désigne la masse en gramme d'un avocat pris au hasard dans ce lot, on supposera que X suit une loi normale de moyenne 180 et d'écart-type 5. Seuls les fruits dont la masse est comprise entre 170 et 190 grammes sont acceptés pour la catégorie de vente A. Un négociant achète 1000 avocats de ce lot. Estimer la probabilité qu'il obtienne au moins 950 avocats de catégorie A.