Correction

Test du 27 mars 2015
QCM 3

Nom et prénom :
....

Durée : 1 heure. Documents et appareils électroniques interdits.

La question peut avoir zéro, une ou plusieurs bonnes réponses. Cochez les bonnes réponses en les noircissant. Une mauvaise réponse cochée peut donner des points négatifs ! En cas d'erreur, vous pouvez corriger en blanchissant complétement la case.

Dans tout le devoir, $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ désigne la loi normale de moyenne m et variance σ^2.

Exercice 1

Pour tout $\theta \in]-1, 1[$, on note P_θ la loi de densité

$$f_\theta : x \mapsto \frac{1}{2}\left((1-\theta)\mathbf{1}_{[-1,0[}(x) + (1+\theta)\mathbf{1}_{]0,1]}(x)\right).$$

On note $X_1, \ldots X_n$ des v.a. i.i.d. de loi P_θ (θ est inconnu). On note $\bar{X}_n = n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i$.

Question 1 ♣ Moments Calculez $\mathbb{E}_\theta[X_1]$ et $\mathbb{E}_\theta\left[X_1^2\right]$ et cochez les bonnes réponses.

□ $\mathbb{E}_\theta[X_1] = \theta$. □ $\mathbb{E}_\theta\left[X_1^2\right] = \theta$. □ $\mathbb{E}_\theta[X_1] = 0$. ■ $\mathbb{E}_\theta\left[X_1^2\right] = 1/3$.
□ $\mathbb{E}_\theta\left[X_1^2\right] = 0$. ■ $\mathbb{E}_\theta[X_1] = \theta/2$. □ $\mathbb{E}_\theta\left[X_1^2\right] = \theta^2$.

Question 2 ♣ Méthode des moments

□ Un estimateur de θ donné par la méthode des moments est $\hat{\theta}_n = 1/\bar{X}_n$.
□ Un estimateur de θ donné par la méthode des moments est $\hat{\theta}_n = \bar{X}_n$.
□ Un estimateur de θ donné par la méthode des moments est $\hat{\theta}_n = n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i^2$.
■ Un estimateur de θ donné par la méthode des moments est $\hat{\theta}_n = 2\bar{X}_n$.

Dans les questions 3 et 4, on note $S_{-1} = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{[-1,0[}(X_i)$ (respectivement $S_1 = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{]0,1]}(X_i)$) le nombre d'observations appartenant à l'intervalle $[-1, 0[$ (respectivement $]0, 1]$).

Question 3 ♣ Vraisemblance On note $L_{X_1,\ldots,X_n}(\theta)$ la vraisemblance de l'échantillon $X_1, \ldots, X_n$ sous θ.

■ $L_{X_1,\ldots,X_n}(\theta) = \left(\frac{1-\theta}{2}\right)^{S_{-1}}\left(\frac{1+\theta}{2}\right)^{S_1}\mathbf{1}_{\{n\}}(S_{-1}+S_1)$.

□ $L_{X_1,\ldots,X_n}(\theta) = S_{-1}\log\left(\frac{1-\theta}{2}\right) + S_1\log\left(\frac{1+\theta}{2}\right)$.

□ $L_{X_1,\ldots,X_n}(\theta) = \left(\frac{1-\theta}{2}\right)\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) + \left(\frac{1+\theta}{2}\right)\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)$.

□ $L_{X_1,\ldots,X_n}(\theta) = \left(\frac{1-\theta}{2}\right)^{S_{-1}}\left(\frac{1+\theta}{2}\right)^{S_1}$.

■ $L_{X_1,\ldots,X_n}(\theta) = \left(\frac{1-\theta}{2}\right)^{S_{-1}}\left(\frac{1+\theta}{2}\right)^{S_1}\prod_{i=1}^n \mathbf{1}_{[-1,0[\cup]0,1]}(X_i)$.

Question 4 ♣ Maximum de vraisemblance L'estimateur de θ donné par la méthode du maximum de vraisemblance est :

■ $\tilde{\theta}_n = \frac{S_1 - S_{-1}}{S_1 + S_{-1}}$. □ $\tilde{\theta}_n = \frac{\log(S_{-1}) + \log(S_1)}{n}$. □ $\tilde{\theta}_n = \bar{X}_n$.
■ $\tilde{\theta}_n = \frac{S_1 - S_{-1}}{n}$. □ $\tilde{\theta}_n = 2\bar{X}_n$.

Exercice 2

Pour tout $\lambda \in]0, 1/2[$, on dit que X suit la loi Q_λ si $\mathbb{P}_\lambda(X = -1) = \mathbb{P}_\lambda(X = 1) = \lambda$ et $\mathbb{P}_\lambda(X = 0) = 1 - 2\lambda$. On note $X_1, \ldots X_n$ des v.a. i.i.d. qui suivent la loi Q_λ (λ est inconnu). On note $\bar{X}_n = n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i$.

Question 5 ♣ **Moments** Cochez les bonnes réponses.

☐ $\mathbb{E}_\lambda[X_1] = 1/\lambda$. ☐ $\mathbb{E}_\lambda[X_1] = \lambda$. ☐ $\mathbb{E}_\lambda[X_1^2] = 0$. ☐ $\mathbb{E}_\lambda[X_1] = \lambda/2$.
☐ $\mathbb{E}_\lambda[X_1^2] = \lambda$. ■ $\mathbb{E}_\lambda[X_1] = 0$. ■ $\mathbb{E}_\lambda[X_1^2] = 2\lambda$.

Question 6 ♣ **Méthode des moments**

☐ Un estimateur de λ donné par la méthode des moments est $\hat{\lambda}_n = \bar{X}_n$.

■ Un estimateur de λ donné par la méthode des moments est $\hat{\lambda}_n = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n X_i^2$.

☐ Un estimateur de λ donné par la méthode des moments est $\hat{\lambda}_n = 2\bar{X}_n$.

☐ Un estimateur de λ donné par la méthode des moments est $\hat{\lambda}_n = 1/\bar{X}_n$.

Dans les questions 7 et 8, on note $V_{-1} = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{-1\}}(X_i)$ (respectivement $V_0 = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{0\}}(X_i)$ et $V_1 = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{1\}}(X_i)$) le nombre d'observations égales à -1 (respectivement 0 et 1).

Question 7 ♣ **Vraisemblance** On note $L_{X_1,\ldots,X_n}(\lambda)$ la vraisemblance de l'échantillon $X_1, \ldots, X_n$ sous λ.

☐ $L_{X_1,\ldots,X_n}(\lambda) = (V_{-1} + V_1)\log(\lambda) + V_0\log(1 - 2\lambda)$.

☐ $L_{X_1,\ldots,X_n}(\lambda) = \dfrac{\lambda^{V_{-1}+V_1}}{(1-2\lambda)^{V_0}}\prod_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{-1,0,1\}}(X_i)$.

■ $L_{X_1,\ldots,X_n}(\lambda) = \lambda^{V_{-1}}(1-2\lambda)^{V_0}\lambda^{V_1}\prod_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{-1,0,1\}}(X_i)$.

■ $L_{X_1,\ldots,X_n}(\lambda) = \lambda^{V_{-1}}(1-2\lambda)^{V_0}\lambda^{V_1}\mathbf{1}_{\{n\}}(V_{-1} + V_0 + V_1)$.

☐ $L_{X_1,\ldots,X_n}(\lambda) = \left(\lambda^{V_{-1}} + (1-2\lambda)^{V_0} + \lambda^{V_1}\right)\prod_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{-1,0,1\}}(X_i)$.

Question 8 ♣ **Maximum de vraisemblance** L'estimateur de λ donné par la méthode du maximum de vraisemblance est :

■ $\tilde{\lambda}_n = \dfrac{V_{-1} + V_1}{2n}$. ☐ $\tilde{\lambda}_n = \dfrac{V_{-1} + V_1}{2n - V_0}$. ☐ $\tilde{\lambda}_n = \dfrac{V_{-1} + V_1}{2(V_{-1} + V_1) + V_0}$.

☐ $\tilde{\lambda}_n = \dfrac{\log\left(\frac{V_{-1}V_1}{V_0^2}\right)}{n}$. ■ $\tilde{\lambda}_n = \dfrac{1}{2}\dfrac{V_{-1} + V_1}{V_{-1} + V_1 + V_0}$. ☐ $\tilde{\lambda}_n = 2\bar{X}_n$.

Problème

L'entreprise Sauni est spécialisée dans les nouvelles technologies. Dans ce domaine, la précision est de rigueur. Il se trouve que l'entreprise vient de construire une machine automatisée qui servira à produire la puce que viennent de concevoir leurs ingénieurs. Chaque soudure doit être quasi-parfaite. En effet, si une soudure est effectuée à plus de 10nm de l'emplacement prévu, alors la puce est défectueuse et donc bonne à jeter. On demande à des statisticiens d'évaluer la précision de la machine. On supposera que les décalages de chaque soudure sont indépendants et distribués selon la loi uniforme sur l'intervalle $[0, \nu]$ (de densité $f_\nu : x \mapsto \nu^{-1}\mathbf{1}_{[0,\nu]}(x)$). Le réel positif ν est inconnu.

Pour i allant de 1 à $n = 50$, on note X_i le décalage de la soudure du i-ème composant.

Question 9 ♣ Moments Calculez $\mathbb{E}_\nu[X_1]$ et $\mathbb{E}_\nu\left[X_1^2\right]$ et cochez les bonnes réponses.

☐ $\mathbb{E}_\nu\left[X_1^2\right] = 1/12$. ☐ $\mathbb{E}_\nu\left[X_1^2\right] = \nu^2/12$. ■ $\mathbb{E}_\nu[X_1] = \nu/2$.
☐ $\mathbb{E}_\nu[X_1] = \nu$. ☐ $\mathbb{E}_\nu[X_1] = 0$. ■ $\mathbb{E}_\nu\left[X_1^2\right] = \nu^2/3$. ☐ $\mathbb{E}_\nu\left[X_1^2\right] = 0$.

Question 10 ♣ Méthode des moments

■ Un estimateur de ν donné par la méthode des moments est $\hat{\nu}_n = 2\bar{X}_n$.

■ Un estimateur de ν donné par la méthode des moments est $\hat{\nu}_n = \sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2}$.

☐ Un estimateur de ν donné par la méthode des moments est $\hat{\nu}_n = \bar{X}_n$.

☐ Un estimateur de ν donné par la méthode des moments est $\hat{\nu}_n = 1/\bar{X}_n$.

Question 11 ♣ Biais Que dire du biais de l'estimateur (ou des estimateurs) trouvé(s) à la question 10.

☐ Tous les estimateurs sont sans biais.

☐ Tous les estimateurs admettent un biais non nul.

■ Au moins un estimateur est sans biais.

Question 12 ♣ Vraisemblance On note $L_{X_1,\dots,X_n}(\nu)$ la vraisemblance de l'échantillon $X_1, \dots, X_n$ sous ν.

■ $L_{X_1,\dots,X_n}(\nu) = \frac{1}{\nu^n}\prod_{i=1}^n \mathbf{1}_{[0,\nu]}(X_i)$. ☐ $L_{X_1,\dots,X_n}(\nu) = \frac{1}{\nu^n}$.
☐ $L_{X_1,\dots,X_n}(\nu) = \frac{1}{\nu^{\sum_{i=1}^n X_i}}$. ☐ $L_{X_1,\dots,X_n}(\nu) = \prod_{i=1}^n \mathbf{1}_{[0,1]}(X_i)$.
☐ $L_{X_1,\dots,X_n}(\nu) = -n\log(\nu)\mathbf{1}_{[0,\nu]}(X_i)$.

Question 13 ♣ Maximum de vraisemblance L'estimateur de ν donné par la méthode du maximum de vraisemblance est :

☐ $\tilde{\nu}_n = 2\bar{X}_n$. ☐ $\tilde{\nu}_n = \log(1 + \bar{X}_n)$. ■ $\tilde{\nu}_n = \max_{i=1,\dots,n}(X_i)$. ☐ $\tilde{\nu}_n = 0$.
☐ $\tilde{\nu}_n = \bar{X}_n$.

On suppose dans la question suivante que l'estimateur trouvé à la question 13, noté $\tilde{\nu}_n$, est tel que pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{P}_\nu\left(n\left(1 - \frac{\tilde{\nu}_n}{\nu}\right) > t\right) \leq e^{-t}. \qquad (\star)$$

De plus, pour tout $\alpha \in]0, 1[$, on note (u_α, t_α) un couple qui satisfait

$$\mathbb{P}\left(u_\alpha \leq \mathcal{N}(0, 1) \leq t_\alpha\right) = 1 - \alpha. \qquad (\star\star)$$

Question 14 ♣ **Intervalle de confiance** Déduire un intervalle de confiance (I.C.) pour ν à partir de $(\star)$

☐ $\forall \alpha \in]0, 1/2[$, $\left[\tilde{\nu}_n - \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}, \tilde{\nu}_n - \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right]$ est un I.C. de niveau 2α pour ν.

☐ $\forall \alpha \in]0, 1[$, $\left[\frac{\tilde{\nu}_n}{1 + \frac{\alpha}{n}}, +\infty\right[$ est un I.C. de niveau 2α pour ν.

☐ $\forall \alpha \in]0, 1/2[$, $\left[\tilde{\nu}_n - \frac{\alpha}{\sqrt{n}}, \tilde{\nu}_n - \frac{\alpha}{\sqrt{n}}\right]$ est un I.C. de niveau α pour ν.

☐ $\forall \alpha \in]0, 1[$, $\left[\tilde{\nu}_n - \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}, +\infty\right[$ est un I.C. de niveau α pour ν.

■ $\forall \alpha \in]e^{-n}, 1[$, $\left[0, \frac{\tilde{\nu}_n}{1 + \frac{\log \alpha}{n}}\right]$ est un I.C. de niveau 2α pour ν.

☐ $\forall \alpha \in]e^{-n}, 1[$, $\left[\frac{\tilde{\nu}_n}{1 + \frac{\log \alpha}{n}}, +\infty\right[$ est un I.C. de niveau 2α pour ν.

■ $\forall \alpha \in]e^{-n}, 1[$, $\left[0, \frac{\tilde{\nu}_n}{1 + \frac{\log \alpha}{n}}\right]$ est un I.C. de niveau α pour ν.

☐ $\forall \alpha \in]0, 1[$, $\left[\tilde{\nu}_n - \frac{\alpha}{\sqrt{n}}, +\infty\right[$ est un I.C. de niveau 2α pour ν.

☐ $\forall \alpha \in]e^{-n}, 1[$, $\left[\frac{\tilde{\nu}_n}{1 + \frac{\log \alpha}{n}}, +\infty\right[$ est un I.C. de niveau α pour ν.

Dans les questions 11 et 12, on note $\hat{\nu}_n$ un estimateur consistant de ν.

Question 15 ♣ **Comportement asymptotique** En utilisant le Théorème de la limite centrale et le Lemme de Slutsky, déterminez le comportement asymptotique de $\bar{X}_n$. Cochez les suites de variables qui convergent vers une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

☐ $Z_n = \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \nu}{\hat{\nu}_n^2}$ ☐ $Z_n = \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \nu}{\nu^2}$ ■ $Z_n = \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - (\nu/2)}{\hat{\nu}_n/2\sqrt{3}}$

☐ $Z_n = \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - (\nu/2)}{1/2\sqrt{3}}$ ☐ $Z_n = \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \nu}{\nu/\sqrt{3}}$ ☐ $Z_n = \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \hat{\nu}}{\hat{\nu}_n/\sqrt{3}}$

■ $Z_n = \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - (\nu/2)}{\nu/2\sqrt{3}}$

Question 16 ♣ **I.C. asymptotique** *Indication :* On rappelle $(\star\star)$.

☐ $\forall \alpha \in]0, 1[$, $\left[2\bar{X}_n - \frac{t_\alpha}{2\sqrt{3n}}\hat{\nu}_n, 2\bar{X}_n - \frac{u_\alpha}{2\sqrt{3n}}\hat{\nu}_n\right[$ est un I.C. asymptotique de niveau 2α pour ν.

☐ $\forall \alpha \in]0, 1[$, $\left[2\bar{X}_n - \frac{t_\alpha}{2\sqrt{3n}}\nu, 2\bar{X}_n - \frac{u_\alpha}{2\sqrt{3n}}\nu\right[$ est un I.C. asymptotique de niveau 2α pour ν.

☐ $\forall \alpha \in]0, 1[$, $\left[\bar{X}_n - \frac{t_\alpha}{\sqrt{3n}}\hat{\nu}_n, \bar{X}_n - \frac{u_\alpha}{\sqrt{3n}}\hat{\nu}_n\right[$ est un I.C. asymptotique de niveau 2α pour ν.

☐ $\forall \alpha \in]0, 1[$, $\left[2\bar{X}_n - \frac{t_\alpha}{2\sqrt{3n}}\hat{\nu}_n, 2\bar{X}_n - \frac{u_\alpha}{2\sqrt{3n}}\hat{\nu}_n\right[$ est un I.C. asymptotique de niveau α pour ν.

☐ $\forall \alpha \in]0, 1[$, $\left[\bar{X}_n - \frac{t_\alpha}{\sqrt{3n}}\hat{\nu}_n, \bar{X}_n - \frac{u_\alpha}{\sqrt{3n}}\hat{\nu}_n\right[$ est un I.C. asymptotique de niveau α pour ν.

☐ $\forall \alpha \in]0, 1[$, $\left[\bar{X}_n - \frac{t_\alpha}{2\sqrt{3n}}\hat{\nu}_n, \bar{X}_n - \frac{u_\alpha}{2\sqrt{3n}}\hat{\nu}_n\right[$ est un I.C. asymptotique de niveau 2α pour ν.

☐ $\forall \alpha \in]0, 1[$, $\left[\bar{X}_n - \frac{t_\alpha}{2\sqrt{3n}}\hat{\nu}_n, \bar{X}_n - \frac{u_\alpha}{2\sqrt{3n}}\hat{\nu}_n\right[$ est un I.C. asymptotique de niveau α pour ν.