# Test du 20 février 2015
## Sujet A

Nom et prénom :

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Durée : 1 heure. Documents et appareils électroniques interdits.

La question peut avoir zéro, une ou plusieurs bonnes réponses. Cochez les bonnes réponses en les noircissant. Une mauvaise réponse cochée peut donner des points négatifs !

Dans tout le devoir, $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ désigne la loi normale de moyenne $m$ et variance $\sigma^2$. $\chi^2(\nu)$ désigne la loi du chi-deux à $\nu$ degrés de liberté. Et, $\mathcal{T}(\nu)$ désigne la loi de Student à $\nu$ degrés de liberté.

### Exercice 1

Pour tout $\theta \in ]0, +\infty[$, on note $Q_\theta$ la loi de densité $f_\theta : x \mapsto \theta^2 \exp\left(-\theta^2 x\right) \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x)$. On note $X_1, \dots X_n$ des v.a. i.i.d. de loi $Q_\theta$ ($\theta$ est inconnu). On note $\bar{X}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} X_i$.

**Question 1 ♣ Espérance.** Que vaut l'espérance de $X_1$?

- ☐ $\mathbb{E}[X_1] = \theta$.
- ☐ $\mathbb{E}[X_1] = 1/\theta$.
- ☐ $\mathbb{E}[X_1] = \theta^2$.
- ■ $\mathbb{E}[X_1] = 1/\theta^2$.

**Question 2 ♣ Méthode des moments.** Que nous dit la méthode des moments ?

- ☐ Un estimateur de $\theta$ donné par la méthode des moments est $\hat{\theta}_n = (\bar{X}_n)^2$.
- ☐ Un estimateur de $\theta$ donné par la méthode des moments est $\hat{\theta}_n = \bar{X}_n$.
- ■ Un estimateur de $\theta$ donné par la méthode des moments est $\hat{\theta}_n = \sqrt{1/\bar{X}_n}$.
- ☐ Un estimateur de $\theta$ donné par la méthode des moments est $\hat{\theta}_n = 1/\bar{X}_n$.

### Exercice 2

Pour tout $\eta \in ]0, +\infty[$, on note $Q_\eta$ la loi de densité $f_\eta : x \mapsto \eta^2 x \exp\left(-\eta x\right) \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x)$. On note $X_1, \dots X_n$ des v.a. i.i.d. de loi $Q_\eta$ ($\eta$ est inconnu). On note $\bar{X}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} X_i$.

**Question 3 ♣ Maximum de vraisemblance.** Cochez la bonne réponse.

- ☐ L'estimateur du maximum de vraisemblance de $\eta$ est $\hat{\eta}_n = 1/\bar{X}_n$.
- ☐ L'estimateur du maximum de vraisemblance de $\eta$ est $\hat{\eta}_n = \bar{X}_n$.
- ☐ L'estimateur du maximum de vraisemblance de $\eta$ est $\hat{\eta}_n = 1/(\bar{X}_n)^2$.
- ■ L'estimateur du maximum de vraisemblance de $\eta$ est $\hat{\eta}_n = 2/\bar{X}_n$.

## Problème

On suppose que l'âge (en mois) auquel apparaissent les premiers mots de vocabulaire chez l'enfant suit une loi normale de moyenne $\mu$ et d'écart-type $s$.

**Question 4 ♣** Madame Touille vient de donner naissance au petit Sacha. On note $X$ l'âge (en mois) qu'aura le petit Sacha lorqu'il dira son premier mot : "Bobo". Quelle est la densité de $X$ ?

- ☐ $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2s}\right)$.
- ☐ $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2s^2}\right)$.
- ☐ $f : x \mapsto \mathbf{1}_{[\mu-s/2,\mu+s/2]}(x)$.
- ☐ $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu^2}} \exp\left(-\frac{(x-s)^2}{2\mu^2}\right)$.
- ■ $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi s^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2s^2}\right)$.

Monsieur Touille aimerait avoir plus d'informations sur l'âge qu'aura son fils lorqu'il dira son premier mot. Pour ce faire, il demande une étude qui recense l'âge (en mois) auquel apparaît le premier mot de vocabulaire chez $n = 100$ enfants. Il n'a pas encore reçu les résultats de l'étude. Pour $= 1, \dots, n$, on note $X_i$ l'âge (en mois) auquel apparaît le premier mot de vocabulaire chez le $i$-ème enfant.

Dans les questions 5 à 7, on suppose que $s$ est connu. On souhaite construire un intervalle de confiance pour $\mu$. On note $\bar{X}_n = n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i$. On note $Z = \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n-\mu}{s}$ et pour tout $\alpha \in ]0,1[$, on note $t_\alpha$ un nombre réel tel que $\mathbb{P}(Z \le t_\alpha) = 1-\alpha$.

**Question 5 ♣** **Variable Pivot.** Quelle est la loi de $Z$?

- ■ $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.
- ☐ $Z \sim \chi^2(n-1)$.
- ☐ $Z \sim \chi^2(n)$.
- ☐ $Z \sim \mathcal{N}(\mu, s^2)$.

**Question 6 ♣** Cochez les bonnes réponses.

- ■ $\forall \alpha < \beta \in ]0,1[$, $\mathbb{P}(t_\beta \le Z \le t_\alpha) = \beta - \alpha$.
- ■ $\forall \alpha \in ]0,1/2[$, $\mathbb{P}(t_{1-\alpha} \le Z \le t_\alpha) = 1-2\alpha$.
- ☐ $\forall \alpha \in ]0,1[$, $\mathbb{P}(Z \ge t_\alpha) = \alpha/2$.
- ☐ $\forall \alpha \in ]0,1[$, $\mathbb{P}(t_{1-\alpha} \le Z \le t_\alpha) = 1-\alpha$.
- ☐ $\forall \alpha \in ]0,1/2[$, $\mathbb{P}(t_{1-\alpha} \le Z \le t_\alpha) = 2\alpha$.

**Question 7 ♣** **Intervalles de confiance pour $\mu$.**

- ■ $\forall \alpha < \beta \in ]0,1[$, $[\bar{X}_n - \frac{t_\alpha s}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n - \frac{t_\beta s}{\sqrt{n}}]$ est un intervalle de confiance de niveau $1-\beta+\alpha$ pour $\mu$.
- ☐ $\forall \alpha \in ]0,1/2[$, $[\bar{X}_n - \frac{t_\alpha s}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n - \frac{t_{1-\alpha} s}{\sqrt{n}}]$ est un intervalle de confiance de niveau $\alpha$ pour $\mu$.
- ■ $\forall \alpha \in ]0,1[$, $[\bar{X}_n - \frac{t_\alpha s}{\sqrt{n}}, +\infty[$ est un intervalle de confiance de niveau $\alpha$ pour $\mu$.
- ☐ $\forall \alpha \in ]0,1[$, $[\bar{X}_n - \frac{t_\alpha s}{\sqrt{n}}, +\infty[$ est un intervalle de confiance de niveau $\alpha/2$ pour $\mu$.
- ■ $\forall \alpha \in ]0,1[$, $[\bar{X}_n - \frac{t_\alpha s}{\sqrt{n}}, +\infty[$ est un intervalle de confiance de niveau $2\alpha$ pour $\mu$.
- ☐ $\forall \alpha < \beta \in ]0,1[$, $[\bar{X}_n - \frac{t_\alpha s}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n - \frac{t_\beta s}{\sqrt{n}}]$ est un intervalle de confiance de niveau $1-\beta-\alpha$ pour $\mu$.
- ■ $\forall \alpha \in ]0,1/2[$, $[\bar{X}_n - \frac{t_\alpha s}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n - \frac{t_{1-\alpha} s}{\sqrt{n}}]$ est un intervalle de confiance de niveau $2\alpha$ pour $\mu$.

Dans les questions 8 à 10, on suppose que $\mu$ est connu. On souhaite construire un intervalle de confiance pour $s^2$. On note $\tilde{s}_n^2 = n^{-1}\sum_{i=1}^n (X_i-\mu)^2$. On note $V = \frac{n\tilde{s}_n^2}{s^2}$ et pour tout $\alpha \in ]0,1[$, on note $t_\alpha$ un nombre réel tel que $\mathbb{P}(V \leq t_\alpha) = 1 - \alpha$.

**Question 8 ♣** **Variable Pivot.** Quelle est la loi de $V$?

- [ ] $V \sim \mathcal{T}(n)$.
- [ ] $V \sim \chi^2(n-1)$.
- [x] $V \sim \chi^2(n)$.
- [ ] $V \sim \mathcal{N}(0,1)$.

**Question 9 ♣** Cochez les bonnes réponses.

- [x] $\forall \alpha < \beta \in ]0,1[$, $\mathbb{P}(t_\beta \leq V \leq t_\alpha) = \beta - \alpha$.
- [ ] $\forall \alpha \in ]0,1/2[$, $\mathbb{P}(t_{1-\alpha} \leq V \leq t_\alpha) = 2\alpha$.
- [ ] $\forall \alpha \in ]0,1[$, $\mathbb{P}(t_{1-\alpha} \leq V \leq t_\alpha) = 1 - \alpha$.
- [x] $\forall \alpha \in ]0,1/2[$, $\mathbb{P}(t_{1-\alpha} \leq V \leq t_\alpha) = 1 - 2\alpha$.
- [ ] $\forall \alpha \in ]0,1[$, $\mathbb{P}(V \geq t_\alpha) = \alpha/2$.

**Question 10 ♣** **Intervalles de confiance pour $s^2$.** Cochez les bonnes réponses.

- [x] $\forall \alpha \in ]0,1/2[$, $[\frac{n\tilde{s}_n^2}{t_\alpha}, \frac{n\tilde{s}_n^2}{t_{1-\alpha}}]$ est un intervalle de confiance de niveau $2\alpha$ pour $s^2$.
- [ ] $\forall \alpha \in ]0,1[$, $[0, \frac{n\tilde{s}_n^2}{t_{1-\alpha}}]$ est un intervalle de confiance de niveau $\alpha/2$ pour $s^2$.
- [x] $\forall \alpha \in ]0,1[$, $[\frac{n\tilde{s}_n^2}{t_\alpha}, +\infty[$ est un intervalle de confiance de niveau $2\alpha$ pour $s^2$.
- [ ] $\forall \alpha \in ]0,1[$, $[\frac{n\tilde{s}_n^2}{t_\alpha}, \frac{n\tilde{s}_n^2}{t_{1-\alpha}}]$ est un intervalle de confiance de niveau $\alpha/2$ pour $s^2$.
- [x] $\forall \alpha \in ]0,1[$, $[\frac{n\tilde{s}_n^2}{t_\alpha}, +\infty[$ est un intervalle de confiance de niveau $\alpha$ pour $s^2$.
- [ ] $\forall \alpha \in ]0,1[$, $[\frac{n\tilde{s}_n^2}{t_\alpha}, \frac{n\tilde{s}_n^2}{t_{1-\alpha}}]$ est un intervalle de confiance de niveau $\alpha$ pour $s^2$.
- [ ] $\forall \alpha \in ]0,1[$, $[\frac{n\tilde{s}_n^2}{t_\alpha}, +\infty[$ est un intervalle de confiance de niveau $\alpha/2$ pour $s^2$.

Pour la dernière question, il est (fortement) conseillé d'utiliser les tables des lois distribuées en TD.

**Question 11 ♣** **Tables des lois.** Cochez les bonnes réponses.

- [ ] $\mathbb{P}\left(\chi^2(20) \geq 10\right) < 0,95$ et $\mathbb{P}\left(2 \leq \chi^2(10) \leq 26\right) \leq 0,98$.
- [x] $\mathbb{P}\left(\chi^2(20) \leq 11\right) \geq 0,05$ et $\mathbb{P}\left(2,156 \leq \chi^2(10) \leq 15,987\right) \geq 0,85$.
- [x] $\mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) \leq 1,96) \leq 0,975$ et $\mathbb{P}(-1,96 \leq \mathcal{N}(0,1) \leq 1,96) \geq 0,95$.
- [ ] $\mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) \geq 1,96) \geq 0,03$ et $\mathbb{P}(-1 \leq \mathcal{N}(0,1) \leq 1) \leq 0,50$.