Test du 10 décembre 2014
Sujet A

Nom et prénom :
....

Durée : 1 heure. Documents et appareils électroniques interdits.

La question peut avoir zéro, une ou plusieurs bonnes réponses. Cochez les bonnes réponses en les noircissant. Une mauvaise réponse cochée peut donner des points négatifs !

Dans tout le devoir, $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ désigne la loi normale de moyenne m et variance σ^2.

Exercice 1 Soit $\theta > 0$ un réel. Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi uniforme sur $[0, \theta]$. En particulier, la densité de X_1 est donnée par $f : x \mapsto \theta^{-1}\mathbf{1}_{[0,\theta]}(x)$. On pose $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ pour tout $n \geq 1$.

Question 1 ♣ Généralités

- [ ] $\mathbb{E}[X_1] = \theta/2$ et $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1) = \theta^2/4$.
- [ ] $\mathbb{E}[X_1] = \theta$ et $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1) = \theta^2/6$.
- [ ] $\mathbb{E}[X_1] = \theta/2$ et $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1) = \theta^2/3$.
- [x] $\mathbb{E}[X_1] = \theta/2$ et $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1) = \theta^2/12$.
- [ ] $\mathbb{E}[X_1] = \theta$ et $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1) = 0$.
- [ ] $\mathbb{E}[X_1] = \theta$ et $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1) = \theta/2$.
- [ ] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 2 ♣ Inégalités de Markov et Bienaymé-Chebychev.

- [x] $\forall t > 0$, $\mathbb{P}(X_1 \geq t) \leq \theta/(2t)$.
- [ ] $\forall a > 0$, $\forall n \geq 1$, $\mathbb{P}\left(\left|2\bar{X}_n - \theta\right| \geq a\right) \leq \theta^2/(12na^2)$.
- [x] $\forall a > 0$, $\forall n \geq 1$, $\mathbb{P}\left(\left|2\bar{X}_n - \theta\right| \geq a\right) \leq \theta^2/(3na^2)$.
- [ ] $\forall t > 0$, $\forall n \geq 1$, $\mathbb{P}\left(\bar{X}_n \geq t\right) \leq \theta/(2nt)$.
- [ ] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 3 ♣ Loi des grands nombres, Théorème de la limite centrale et lemme de Slutsky.

- [ ] $\sqrt{6n}\frac{2\bar{X}_n-\theta}{\theta} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathcal{N}(0,1)$ en loi.
- [ ] $\lfloor \frac{4\bar{X}_n}{\theta} \rfloor \xrightarrow[n\to\infty]{} 2$ presque sûrement, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.
- [ ] $\sqrt{6n}(2\bar{X}_n - \theta) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathcal{N}(0, \theta^2)$ en loi.
- [x] $$\forall a < b, \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(a \leq \sqrt{3n}\left(1 - \frac{\theta}{2\bar{X}_n}\right) \leq b\right) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx.$$
- [ ] $$\forall a < b, \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(a \leq \sqrt{3n}\left(1 - \frac{\theta}{\bar{X}_n}\right) \leq b\right) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx.$$
- [x] $n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta^2/3$ presque sûrement.
- [x] $\sqrt{3n}(2\bar{X}_n - \theta) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathcal{N}(0, \theta^2)$ en loi.
- [ ] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Exercice 2 Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées à valeur dans $\{-1,0,1\}$ telle que $\mathbb{P}(X_1=-1)=\mathbb{P}(X_1=0)=1/4$. On pose $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ pour tout $n \geq 1$.

Question 4 ♣ Généralités

- ☐ $\mathbb{E}[X_1] = 1/4$ et $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1) = 11/4$.
- ☐ $\forall n \geq 1$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\bar{X}_n) = 11/(4n)$.
- ☐ $\mathbb{E}[X_1] = 0$ et $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1) = 5/4$.
- ■ $\mathbb{E}[X_1] = 1/4$ et $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1) = 11/16$.
- ☐ $\forall n \geq 1$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\bar{X}_n) = 11/16$.
- ■ $\forall n \geq 1$, $\mathbb{E}\left[\bar{X}_n\right] = 1/4$.
- ☐ $\mathbb{E}[X_1] = -1/2$ et $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1) = 0$.
- ☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 5 ♣ Inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebychev.

- ☐ $\forall t > 0$, $\mathbb{P}(X_1 \geq t) \leq 1/(4t)$.
- ☐ $\forall a > 0$, $\forall n \geq 1$, $\mathbb{P}\left(\left|4\bar{X}_n - 1\right| \geq a\right) \leq 11/(4na^2)$.
- ■ $\forall a > 0$, $\forall n \geq 1$, $\mathbb{P}\left(\left|4\bar{X}_n - 1\right| \geq a\right) \leq 11/(na^2)$.
- ■ $\forall t > 0$, $\forall n \geq 1$, $\mathbb{P}\left(\bar{X}_n + 1 \geq t\right) \leq 5/(4t)$.
- ☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 6 ♣ Loi des grands nombres, Théorème de la limite centrale et lemme de Slutsky

- ☐ $$\forall a < b, \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(a \leq \sqrt{n}\left(4\bar{X}_n - 1\right) \leq b\right) = \int_a^b \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11\pi}} e^{-\frac{2x^2}{11}}\,dx.$$
- ■ $(\bar{X}_n)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1/16$ presque sûrement.
- ☐ $n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1/2$ presque sûrement.
- ■ $$\forall a < b, \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(a \leq \sqrt{n}\left(4\bar{X}_n - 1\right) \leq b\right) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{22\pi}} e^{-\frac{x^2}{22}}\,dx.$$
- ■ $\sqrt{n}(4\bar{X}_n - 1) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathcal{N}(0,11)$ en loi.
- ☐ $\sqrt{n}(4\bar{X}_n - 1) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathcal{N}(0,\frac{11}{4})$ en loi.
- ■ $\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - (1/4)}{\sqrt{11}/4} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathcal{N}(0,1)$ en loi.
- ☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*