Université de Nice - L2 - Probabilités

FEUILLE DE TD NUMÉRO 2

1. Variables aléatoires finies

Ici $(\Omega, \mathbb{P})$ désigne un espace de probabilité fini.

Exercice 1. Un joueur de casino parie à la couleur sur une roulette : le gain potentiel est égal à la mise. Le joueur mise, à chaque coup, la même somme. La probabilité de gagner est notée p.

(1) Donner la probabilité que le gain total, au bout de $2n$ coups (n entier naturel), soit nul.
(2) On rappelle la formule de Stirling : $N! \sim \sqrt{2\pi N}(N/e)^N$. Montrer que la probabilité que le gain, au bout de $2n$ coups, soit nul est équivalente, pour n grand, à $\big(4p(1-p)\big)^n/\sqrt{\pi n}$.

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres $(2n, 1/2)$, avec $n \geq 1$.

(1) Montrer que $\mathbb{P}\{X \leq n\} = \mathbb{P}\{X \geq n\}$. En déduire que $\mathbb{P}\{X \leq n\} = \dfrac{1 + 2^{-2n}C_{2n}^n}{2}$.
(2) Donner la limite de $\mathbb{P}\{X \leq n\}$ lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 3. Soit X une variable aléatoire de loi biomiale de paramètres $(2n, 1/2)$, avec n entier naturel pair.

(1) Montrer que pour tout $0 \leq k \leq n-1$, $C_{2n}^k \leq C_{2n}^{k+1}$.
(2) En déduire que
$$\mathbb{P}\{X \in 2\mathbb{N}, X < n\} \leq \mathbb{P}\{X \in 2\mathbb{N}+1, X < n\} \leq \mathbb{P}\{X \in 2\mathbb{N}, X < n\} + \mathbb{P}\{X = n\}.$$
(3) Montrer que $\mathbb{P}\{X \in 2\mathbb{N}\} - \mathbb{P}\{X = n\} \leq \mathbb{P}\{X \in 2\mathbb{N}+1\} \leq \mathbb{P}\{X \in 2\mathbb{N}\} + \mathbb{P}\{X = n\}$.
(4) Donner la limite de $\mathbb{P}\{X \in 2\mathbb{N}\}$ lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 4. On considère la fonction
$$F : t \mapsto 0 \text{ si } t < 0 \ ; \ 1/4 \text{ si } 0 \leq t < 1 \ ; \ 3/4 \text{ si } 1 \leq t < 2 \ ; \ 1 \text{ si } t \geq 2.$$
On considère également une variable aléatoire X (définie sur $(\Omega, \mathbb{P})$) à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$, de loi donnée par la famille de poids (p_0, p_1, p_2). Montrer que l'on peut choisir (p_0, p_1, p_2) de sorte que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}\{X \leq t\} = F(t)$.

2. Probabilités d'événements

Ici, $(\Omega, \mathbb{P})$ désigne un espace de probabilité dénombrable.

Exercice 5. Un signal périodique (de fréquence entière) est transmis depuis un récepteur jusqu'à un émetteur. La fréquence du signal de sortie peut malheureusement être différente de celle du signal d'entrée.

Le problème est modélisé par l'espace produit $\Omega = (\mathbb{N}^*)^2$: la première coordonnée désigne la fréquence du signal d'entrée et la seconde la fréquence du signal de sortie. La fréquence du signal d'entrée est supposée aléatoire et la transmission est elle-aussi supposée soumise à des perturbations aléatoires. Les aléas sont répartis selon une probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω. Exprimer la probabilité que les signaux d'entrée et de sortie aient la même fréquence en fonction des poids $(p_n = \mathbb{P}(\{n,n\}))_{n \geq 0}$.

Exercice 6. Etant donnée une suite d'événements $(A_n)_{n \geq 1}$,

(1) montrer que $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\big(\bigcup_{k=1}^n A_k\big) = \mathbb{P}\big(\bigcup_{n \geq 1} A_n\big)$. (Commencer par vérifier que le membre de gauche est bien défini.)

(2) En déduire que $\mathbb{P}\big(\bigcup_{n\geq 1} A_n\big) \leq \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n)$. (Remarquer le membre de droite a toujours un sens, même si la série ne converge pas.)

Exercice 7. Soit une suite $(A_n)_{n\geq 1}$ d'événements.

(1) Montrer que $\big(\bigcap_{n\geq 1} A_n\big)^{\complement} = \bigcup_{n\geq 1} A_n^{\complement}$.
(2) On suppose que la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ est décroissante, i.e. $A_{n+1} \subset A_n$, $n \geq 1$. Que peut-on dire de la suite $(A_n^{\complement})_{n\geq 1}$? En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\big(\bigcap_{n\geq 1} A_n\big)$.

Exercice 8. Donner un exemple d'espace (dénombrable) et de suite $(A_n)_{n\geq 1}$ d'événements tels que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big(A_n\big) \neq \mathbb{P}\big(\bigcup_{n\geq 1} A_n\big)$. (Remarquer au passage que le membre de gauche n'existe pas nécessairement.)

Exercice 9. Montrer qu'il n'est pas possible de trouver une mesure de probabilité sur $\mathbb{N}$ sous laquelle tous les singletons aient la même masse.

3. Variables aléatoires

Exercice 10. La durée de vie d'un composant électronique est modélisée comme suit. Toutes les Δ secondes, une pièce déséquilibrée de (petit) paramètre p est tirée à pile ou face. Si la pièce tombe sur 1, le composant tombe en panne ; sinon, il demeure en fonctionnement. Donner la loi du premier instant de panne du composant.

Exercice 11. Une machine de haute précision fabrique des pièces détachées pour l'aéronautique. Expliquer pourquoi il est légitime d'approcher la loi du nombre de défauts d'une pièce fabriquée par la machine par une loi de Poisson.

Supposons que le paramètre de la loi de Poisson soit donné par 2. Calculer la probabilité que la pièce n'ait aucun défaut, qu'elle ait plus de 3 défauts et qu'elle ait 1 ou 2 défauts.

Exercice 12. Calculer la probabilité que le premier instant de succès d'un jeu à pile ou face de paramètre de succès p soit pair.

Exercice 13. Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathbb{P})$.

(1) Montrer que $\bigcap_{n\geq 1}\{X \geq n\} = \emptyset$.
(2) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\{X \geq n\} = 0$.
(3) On appelle fonction de répartition de la variable aléatoire X la fonction $F_X : t \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{P}\{X \leq t\}$. Montrer que F_X tend vers 1 lorsque t tend vers l'infini.
(4) Sur le même modèle, donner la limite en $-\infty$.

Exercice 14. On appelle fonction de répartition d'une variable aléatoire X la fonction

$$F_X : t \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{P}\{X \leq t\}.$$

(1) Calculer la fonction de répartition d'une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre p sur $\mathbb{N}^*$.
(2) On suppose que p s'écrit sous la forme $p = \lambda/N$ avec $\lambda > 0$ fixé et N entier naturel très grand. Montrer que, pour tout $t \geq 0$

$$F_X(tN) \to 1 - \exp(-\lambda t).$$

(3) On reprend maintenant le modèle de l'Exercice 10. On suppose que $p = \lambda\Delta$ avec $\lambda > 0$ et Δ suffisamment petit pour que $p < 1$.

Donner, pour Δ tendant vers 0, une approximation de la probabilité que le composant soit encore en fonctionnement une heure après sa mise en marche.

Exercice 15. Soit X une loi géométrique de paramètre $1 - \exp(-1)$ sur $\mathbb{N}^*$. Calculer la loi de $\exp(-X + 1)$. Tracer sa fonction de répartition. Que peut-on observer ?