

Modélisation de grands réseaux de neurones par processus de Hawkes

Julien Chevallier
sous la direction de P. Reynaud-Bouret et F. Delarue

Université Nice Sophia Antipolis, LJAD



9 septembre 2016

Sommaire du manuscrit

- 1 Lien entre processus ponctuels et EDP :
 - Approche par espérance mathématique.
 - Approche par limite de champ-moyen.
- 2 Test d'indépendance entre plusieurs processus ponctuels :
 - Application à la détection de synchronisations entre neurones.

Sommaire du manuscrit

- 1 Lien entre processus ponctuels et EDP :
 - Approche par espérance mathématique.
 - Approche par limite de champ-moyen.
- 2 Test d'indépendance entre plusieurs processus ponctuels :
 - Application à la détection de synchronisations entre neurones.

Sommaire de l'exposé

1 Introduction

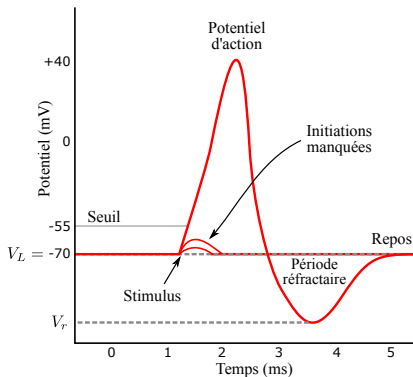
- Contexte neurobiologique
- Modèle microscopique
- Modèle macroscopique
- Objectifs

2 Outil central : procédure de thinning

3 Limite de champ-moyen (LGN)

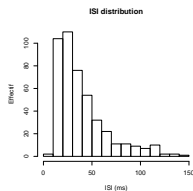
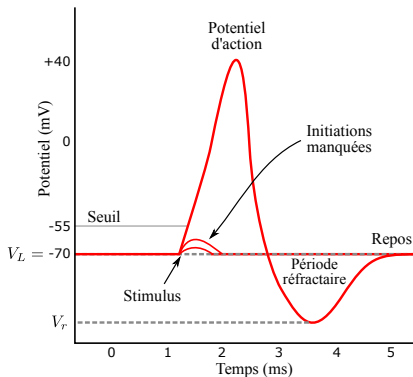
4 Fluctuations (TCL)

Biologie - Plusieurs échelles



- Neurones = cellules électriquement excitables.
- Potentiel d'action = pic (*spike*) du potentiel électrique.
- Contrainte physiologique : période réfractaire.

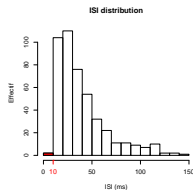
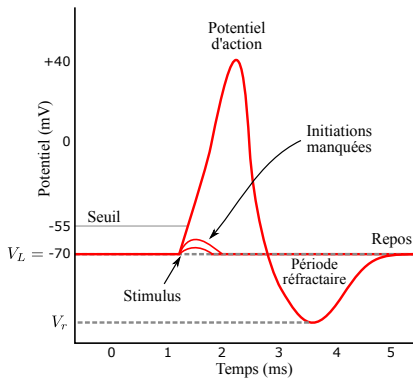
Biologie - Plusieurs échelles



- Neurones = cellules électriquement excitables.
- Potentiel d'action = pic (*spike*) du potentiel électrique.
- Contrainte physiologique : période réfractaire.

Package STAR (C. Pouzat)

Biologie - Plusieurs échelles

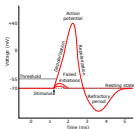


- Neurones = cellules électriquement excitables.
- Potentiel d'action = pic (*spike*) du potentiel électrique.
- Contrainte physiologique : **période réfractaire**.

Package STAR (C. Pouzat)

Biologie - Plusieurs échelles

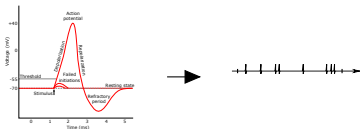
Microscopique



- Neurones = cellules électriquement excitables.
- Potentiel d'action = pic (*spike*) du potentiel électrique.
- Contrainte physiologique : période réfractaire.

Biologie - Plusieurs échelles

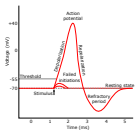
Microscopique



- Neurones = cellules électriquement excitables.
- Potentiel d'action = pic (*spike*) du potentiel électrique.
- Contrainte physiologique : période réfractaire.

Biologie - Plusieurs échelles

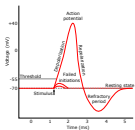
Microscopique



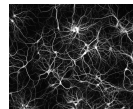
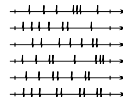
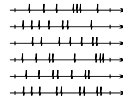
- Neurones = cellules électriquement excitables.
- Potentiel d'action = pic (*spike*) du potentiel électrique.
- Contrainte physiologique : période réfractaire.

Biologie - Plusieurs échelles

Microscopique



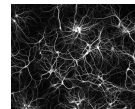
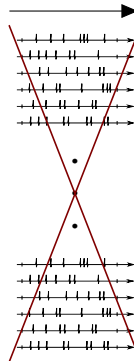
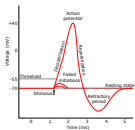
Macroscopique



- Neurones = cellules électriquement excitables.
- Potentiel d'action = pic (*spike*) du potentiel électrique.
- Contrainte physiologique : période réfractaire.

Biologie - Plusieurs échelles

Microscopique

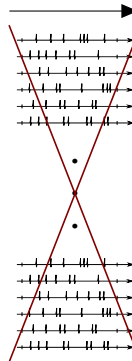
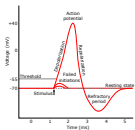


Macroscopique

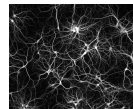
- Neurones = cellules électriquement excitables.
- Potentiel d'action = pic (*spike*) du potentiel électrique.
- Contrainte physiologique : période réfractaire.

Biologie - Plusieurs échelles

Microscopique



Macroscopique



- Neurones = cellules électriquement excitables.
- Potentiel d'action = pic (*spike*) du potentiel électrique.
- Contrainte physiologique : période réfractaire.

Modèle microscopique

Modèle microscopique des trains de spikes

Processus ponctuel temporel = ensemble aléatoire de temps (\mathbb{R} ou \mathbb{R}_+).

- Processus ponctuel : $N = \{T_i, i \in \mathbb{Z}\}$ t.q. $\dots < T_0 \leq 0 < T_1 < \dots$.
- Mesure ponctuelle : $N(dt) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \delta_{T_i}(dt)$, i.e. $\int f(t)N(dt) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} f(T_i)$.

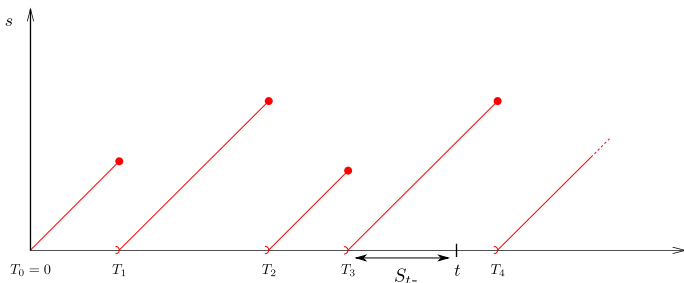
Modèle microscopique

Modèle microscopique des trains de spikes

Processus ponctuel temporel = ensemble aléatoire de temps (\mathbb{R} ou \mathbb{R}_+).

- Processus ponctuel : $N = \{T_i, i \in \mathbb{Z}\}$ t.q. $\dots < T_0 \leq 0 < T_1 < \dots$.
- Mesure ponctuelle : $N(dt) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \delta_{T_i}(dt)$, i.e. $\int f(t)N(dt) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} f(T_i)$.
- Processus d'âge : $(S_{t-})_{t \geq 0}$.

Âge = délai depuis la dernière décharge.



Modèle microscopique

Modèle microscopique des trains de spikes

Processus ponctuel temporel = ensemble aléatoire de temps (\mathbb{R} ou \mathbb{R}_+).

- Processus ponctuel : $N = \{T_i, i \in \mathbb{Z}\}$ t.q. $\dots < T_0 \leq 0 < T_1 < \dots$.
- Mesure ponctuelle : $N(dt) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \delta_{T_i}(dt)$, i.e. $\int f(t)N(dt) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} f(T_i)$.
- Processus d'âge : $(S_{t-})_{t \geq 0}$.

Intensité stochastique

- Heuristiquement,

$$\lambda_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \mathbb{P} \left(N([t, t + \Delta t]) = 1 \mid \mathcal{F}_{t-}^N \right),$$

où \mathcal{F}_{t-}^N est l'histoire de N avant le temps t .

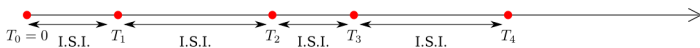
- Comportement local : probabilité d'avoir une nouvelle décharge.
- Dépendance par rapport au passé (e.g. période réfractaire, stimuli excitateurs).

Exemples de processus ponctuels

- Poisson : $\lambda_t = \lambda(t)$ (déterministe, pas de période réfractaire).

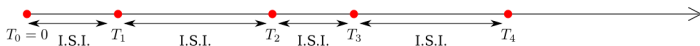
Exemples de processus ponctuels

- Poisson : $\lambda_t = \lambda(t)$ (déterministe, pas de période réfractaire).
- Renouvellement : $\lambda_t = f(S_{t-}) \Leftrightarrow$ ISI i.i.d. (période réfractaire).



Exemples de processus ponctuels

- Poisson : $\lambda_t = \lambda(t)$ (déterministe, pas de période réfractaire).
- Renouvellement : $\lambda_t = f(S_{t-}) \Leftrightarrow$ ISI i.i.d. (période réfractaire).

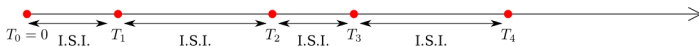


- Hawkes multivarié : $(i = 1, \dots, n)$

$$\lambda_t^i = \Phi \left(\int_0^{t-} h_{i \rightarrow i}(t-x) N^i(dx) + \sum_{j \neq i} \int_0^{t-} h_{j \rightarrow i}(t-x) N^j(dx) \right).$$

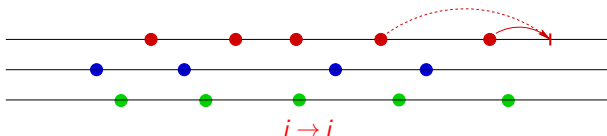
Exemples de processus ponctuels

- Poisson : $\lambda_t = \lambda(t)$ (déterministe, pas de période réfractaire).
- Renouvellement : $\lambda_t = f(S_{t-}) \Leftrightarrow$ ISI i.i.d. (période réfractaire).



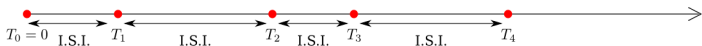
- Hawkes multivarié : ($i = 1, \dots, n$)

$$\lambda_t^i = \Phi \left(\int_0^{t-} h_{i \rightarrow i}(t-x) N^i(dx) + \sum_{j \neq i} \int_0^{t-} h_{j \rightarrow i}(t-x) N^j(dx) \right).$$



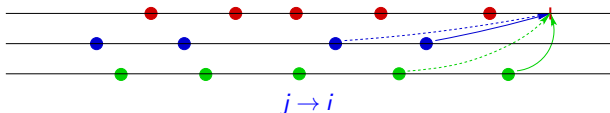
Exemples de processus ponctuels

- Poisson : $\lambda_t = \lambda(t)$ (déterministe, pas de période réfractaire).
- Renouvellement : $\lambda_t = f(S_{t-}) \Leftrightarrow$ ISI i.i.d. (période réfractaire).



- Hawkes multivarié : $(i = 1, \dots, n)$

$$\lambda_t^i = \Phi \left(\int_0^{t-} h_{i \rightarrow i}(t-x) N^i(dx) + \sum_{j \neq i} \int_0^{t-} h_{j \rightarrow i}(t-x) N^j(dx) \right).$$



EDP structurée en âge (K. Pakdaman, B. Perthame, D. Salort, 2010)

- Âge = délai depuis la dernière décharge.
- $u(t, s) = \begin{cases} \text{probabilité de trouver un neurone d'âge } s \text{ au temps } t. \\ \text{ratio de la population avec âge } s \text{ au temps } t. \end{cases}$

$$\text{Taux de décharge moyen} \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u(t, s)}{\partial t} + \frac{\partial u(t, s)}{\partial s} + \Psi(s, x(t)) u(t, s) = 0, \\ u(t, 0) = \int_0^{+\infty} \Psi(s, x(t)) u(t, s) ds. \end{cases} \quad (\text{PPS})$$

EDP structurée en âge (K. Pakdaman, B. Perthame, D. Salort, 2010)

- Âge = délai depuis la dernière décharge.
- $u(t, s) = \begin{cases} \text{probabilité de trouver un neurone d'âge } s \text{ au temps } t. \\ \text{ratio de la population avec âge } s \text{ au temps } t. \end{cases}$

Taux de décharge moyen $\rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u(t, s)}{\partial t} + \frac{\partial u(t, s)}{\partial s} + \Psi(s, x(t)) u(t, s) = 0, \\ u(t, 0) = \int_0^{+\infty} \Psi(s, x(t)) u(t, s) ds. \end{cases} \quad (\text{PPS})$

Paramètres

- Fonction de taux de décharge Ψ . Par exemple, $\Psi(s, x) = \mathbb{1}_{\{s > \sigma(x)\}}$.

$$x(t) = \int_0^t h(t-z) u(z, 0) dz \quad (\text{activité neuronale})$$

- Temps de propagation.
- $h =$ fonction de délai ; e.g. $h(z) = e^{-\tau z}$.

EDP structurée en âge (K. Pakdaman, B. Perthame, D. Salort, 2010)

- Âge = délai depuis la dernière décharge.
- $u(t, s) = \begin{cases} \text{probabilité de trouver un neurone d'âge } s \text{ au temps } t. \\ \text{ratio de la population avec âge } s \text{ au temps } t. \end{cases}$

$$\text{Taux de décharge moyen} \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u(t, s)}{\partial t} + \frac{\partial u(t, s)}{\partial s} + \Psi(s, x(t)) u(t, s) = 0, \\ u(t, 0) = \int_0^{+\infty} \Psi(s, x(t)) u(t, s) ds. \end{cases} \quad (\text{PPS})$$

Paramètres

- Fonction de taux de décharge Ψ . Par exemple, $\Psi(s, x) = \mathbb{1}_{\{s > \sigma(x)\}}$.

$$x(t) = \int_0^t h(t-z) u(z, 0) dz \quad (\text{activité neuronale})$$

- Temps de propagation.
- $h =$ fonction de délai ; e.g. $h(z) = e^{-\tau z}$.

$$\text{Pierre angulaire : } x(t) \longleftrightarrow \int_0^{t-} h(t-x) N(dx).$$

Objectifs de l'exposé

- 1 Montrer que (PPS) est la limite macroscopique d'un système (microscopique) de processus de Hawkes multivariés en interaction de type champ-moyen.

Objectifs de l'exposé

- 1 Montrer que (PPS) est la limite macroscopique d'un système (microscopique) de processus de Hawkes multivariés en interaction de type champ-moyen.

Loi des grands nombres

$$n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i = \mathbb{E}[X_1] + o(1)$$

Objectifs de l'exposé

- 1 Montrer que (PPS) est la limite macroscopique d'un système (microscopique) de processus de Hawkes multivariés en interaction de type champ-moyen.

Loi des grands nombres

$$n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i = \mathbb{E}[X_1] + o(1)$$

- 2 Caractériser les fluctuations du système microscopique autour de sa limite macroscopique.

Objectifs de l'exposé

- 1 Montrer que (PPS) est la limite macroscopique d'un système (microscopique) de processus de Hawkes multivariés en interaction de type champ-moyen.

Loi des grands nombres

$$n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i = \mathbb{E}[X_1] + o(1)$$

- 2 Caractériser les fluctuations du système microscopique autour de sa limite macroscopique.

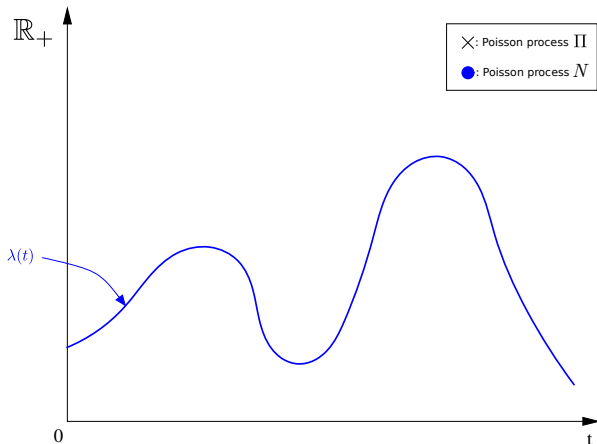
Théorème central limite

$$n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i = \mathbb{E}[X_1] + n^{-1/2} \mathcal{N}(0, \text{Var}(X_1)) + o(n^{-1/2})$$

Sommaire de l'exposé

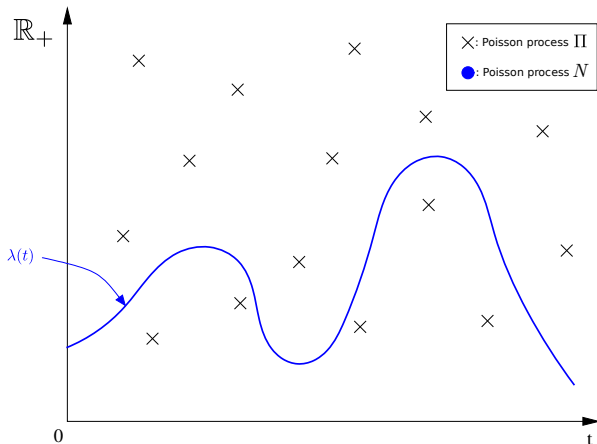
- 1 Introduction
- 2 Outil central : procédure de thinning
- 3 Limite de champ-moyen (LGN)
- 4 Fluctuations (TCL)

Lewis and Shedler, 1979



■ λ est déterministe.

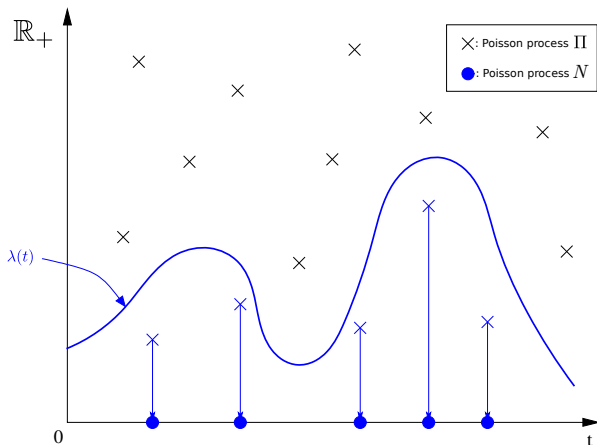
Lewis and Shedler, 1979



- Π : processus de Poisson d'intensité 1.
- $\Pi(dt, dx) = \sum \delta_x$.
- $\mathbb{E}[\Pi(dt, dx)] = dt dx$.
- Indépendance spatiale.

- λ est déterministe.

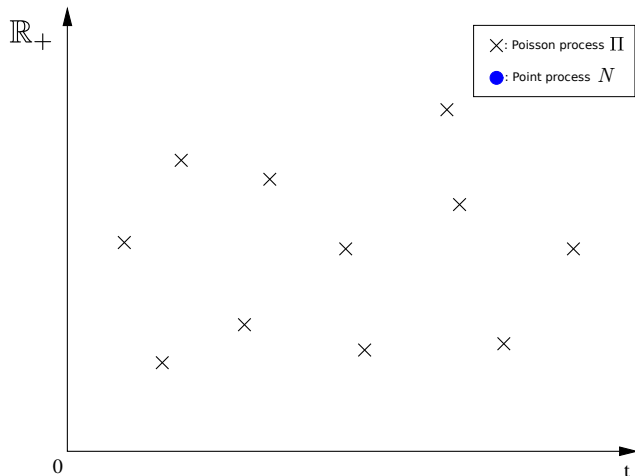
Lewis and Shedler, 1979



- Π : processus de Poisson d'intensité 1.
- $\Pi(dt, dx) = \sum \delta_x$.
- $\mathbb{E}[\Pi(dt, dx)] = dt dx$.
- Indépendance spatiale.

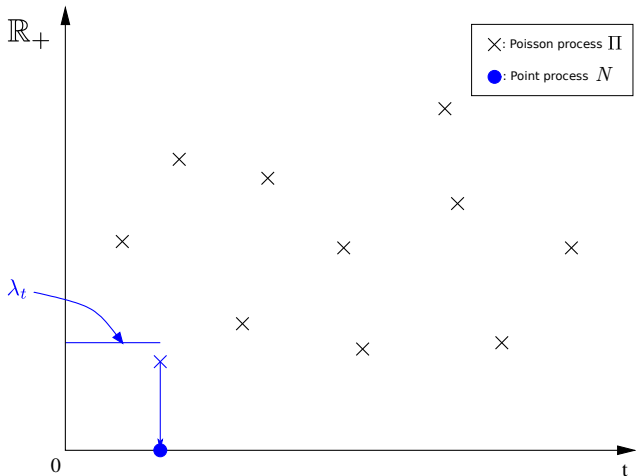
- λ est déterministe.
- N admet λ comme intensité.

Ogata, 1981



- Π : processus de Poisson d'intensité 1.
- $\Pi(dt, dx) = \sum \delta_x$.
- $\mathbb{E}[\Pi(dt, dx)] = dt dx$.
- Indépendance spatiale.

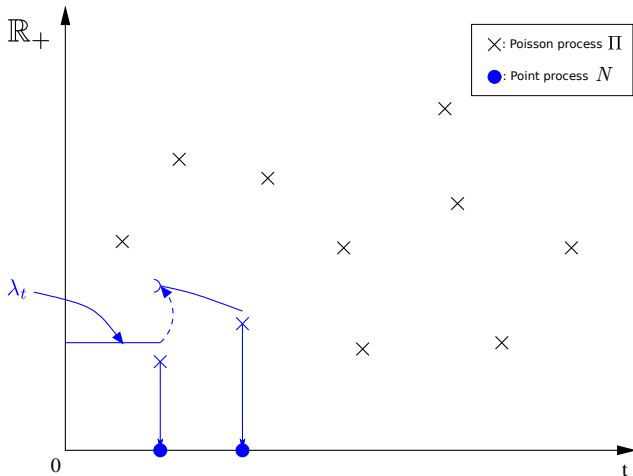
Ogata, 1981



- Π : processus de Poisson d'intensité 1.
- $\Pi(dt, dx) = \sum \delta_x$.
- $\mathbb{E}[\Pi(dt, dx)] = dt dx$.
- Indépendance spatiale.

- λ est aléatoire.
- N admet λ comme intensité.

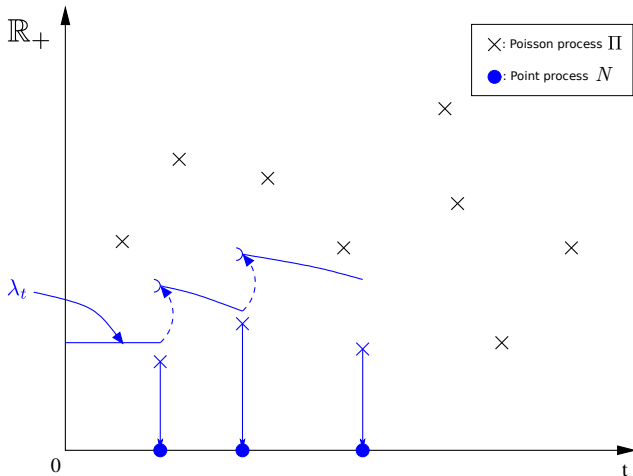
Ogata, 1981



- Π : processus de Poisson d'intensité 1.
- $\Pi(dt, dx) = \sum \delta_x$.
- $\mathbb{E}[\Pi(dt, dx)] = dt dx$.
- Indépendance spatiale.

- λ est aléatoire.
- N admet λ comme intensité.

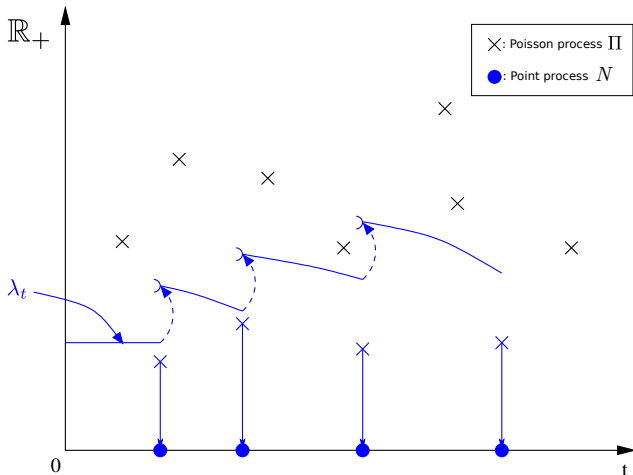
Ogata, 1981



- Π : processus de Poisson d'intensité 1.
- $\Pi(dt, dx) = \sum \delta_x$.
- $\mathbb{E}[\Pi(dt, dx)] = dt dx$.
- Indépendance spatiale.

- λ est aléatoire.
- N admet λ comme intensité.

Ogata, 1981



- Π : processus de Poisson d'intensité 1.
 - $\Pi(dt, dx) = \sum \delta_x$.
 - $\mathbb{E}[\Pi(dt, dx)] = dt dx$.
 - Indépendance spatiale.
-
- λ est aléatoire.
 - N admet λ comme intensité.

Sommaire de l'exposé

- 1 Introduction
- 2 Outil central : procédure de thinning
- 3 Limite de champ-moyen (LGN)
 - Généralités
 - Dynamiques micro et macro
 - Couplage
- 4 Fluctuations (TCL)

Limite de champ-moyen

Système de n neurones en champ-moyen

- Faible dépendance : interactions homogènes à l'ordre $1/n$.
- Symétrie : les neurones sont échangeables.
- Le nombre d'équations qui décrivent la dynamique augmente.

Limite de champ-moyen

Système de n neurones en champ-moyen

- Faible dépendance : interactions homogènes à l'ordre $1/n$.
- Symétrie : les neurones sont échangeables.
- Le nombre d'équations qui décrivent la dynamique augmente.

Quand $n \rightarrow +\infty$

- Les neurones "deviennent" indépendants (propagation du chaos).
- Leur loi commune est décrite par une EDP non-linéaire.

Limite de champ-moyen

Système de n neurones en champ-moyen

- Faible dépendance : interactions homogènes à l'ordre $1/n$.
- Symétrie : les neurones sont échangeables.
- Le nombre d'équations qui décrivent la dynamique augmente.

Quand $n \rightarrow +\infty$

- Les neurones "deviennent" indépendants (propagation du chaos).
- Leur loi commune est décrite par une EDP non-linéaire.

Champ-moyen

- Neurosciences : spikes intrinsèques (Faugeras et al. 2012, Stannat et al. 2014), I&F (Delarue et al. 2015), processus ponctuels (Galves et Löcherbach 2015).
- Hawkes : approximation champ-moyen (Delattre et al., 2015), multi-population (Ditlevsen et Löcherbach 2015).

Limite de champ-moyen

Système de n neurones en champ-moyen

- Faible dépendance : interactions homogènes à l'ordre $1/n$.
- Symétrie : les neurones sont échangeables.
- Le nombre d'équations qui décrivent la dynamique augmente.

Quand $n \rightarrow +\infty$

- Les neurones "deviennent" indépendants (propagation du chaos).
- Leur loi commune est décrite par une EDP non-linéaire.

Champ-moyen

- Neurosciences : spikes intrinsèques (Faugeras et al. 2012, Stannat et al. 2014), I&F (Delarue et al. 2015), processus ponctuels (Galves et Löcherbach 2015).
- Hawkes : approximation champ-moyen (Delattre et al., 2015), multi-population (Ditlevsen et Löcherbach 2015).

- Ici : processus de Hawkes dépendants de l'âge.

Généralisation des processus de Hawkes

Renouvellement

$$\lambda_t = f(S_{t-})$$

Hawkes multivarié

$$\lambda_t^i = \Phi \left(\sum_{j=1}^n \int_0^{t-} h_{j \rightarrow i}(t-x) N^j(dx) \right)$$

Généralisation des processus de Hawkes

Renouvellement

$$\lambda_t = f(S_{t-})$$

Hawkes multivarié

$$\lambda_t^i = \Phi \left(\sum_{j=1}^n \int_0^{t-} h_{j \rightarrow i}(t-x) N^j(dx) \right)$$

mélange

Généralisation des processus de Hawkes

Renouvellement

$$\lambda_t = f(S_{t-})$$

Hawkes multivarié

$$\lambda_t^i = \Phi \left(\sum_{j=1}^n \int_0^{t-} h_{j \rightarrow i}(t-x) N^j(dx) \right)$$

} mélange

Processus de Hawkes dépendant de l'âge

C'est un processus ponctuel multivarié $(N^i)_{i=1,\dots,n}$ dont les intensités sont données par

$$\lambda_t^i = \Psi \left(S_{t-}^i, \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \int_0^{t-} h(t-z) N^j(dz) \right), \quad "h_{j \rightarrow i} = \frac{1}{n} h".$$

- Exemple : $\Psi(s, x) = \Phi(x) \mathbb{1}_{s \geq \delta} \rightsquigarrow$ période réfractaire de durée δ .

Généralisation des processus de Hawkes

Renouvellement

$$\lambda_t = f(S_{t-})$$

Hawkes multivarié

$$\lambda_t^i = \Phi \left(\sum_{j=1}^n \int_0^{t-} h_{j \rightarrow i}(t-x) N^j(dx) \right)$$

mélange

Processus de Hawkes dépendant de l'âge

C'est un processus ponctuel multivarié $(N^i)_{i=1,\dots,n}$ dont les intensités sont données par

$$\lambda_t^i = \Psi \left(S_{t-}^i, \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \int_0^{t-} h(t-z) N^j(dz) \right), \quad "h_{j \rightarrow i} = \frac{1}{n} h".$$

- Exemple : $\Psi(s, x) = \Phi(x) \mathbb{1}_{s \geq \delta} \rightsquigarrow$ période réfractaire de durée δ .
- Comment les approcher quand $n \rightarrow +\infty$?

Méthodes

- Compacité : plus général (Méléard, ...),
- Couplage : vitesse de convergence (Sznitman, ...).

Méthodes

- Compacité : plus général (Méléard, ...),
- Couplage : vitesse de convergence (Sznitman, ...).

Méthode de couplage

Il faut trouver un couplage adéquat entre le système microscopique et n copies i.i.d. d'un processus limite à déterminer.

Méthodes

- Compacité : plus général (Méléard, ...),
- Couplage : vitesse de convergence (Sznitman, ...).

Méthode de couplage

Il faut trouver un couplage adéquat entre le système microscopique et n copies i.i.d. d'un processus limite à déterminer.

- 1 Bon candidat au processus limite (LGN).
- 2 Montrer qu'il est bien défini (problème de McKean-Vlasov).
- 3 Bon outil pour le couplage.
- 4 Montrer la convergence.

Méthodes

- Compacité : plus général (Méléard, ...),
- Couplage : vitesse de convergence (Sznitman, ...).

Méthode de couplage

Il faut trouver un couplage adéquat entre le système microscopique et n copies i.i.d. d'un processus limite à déterminer.

- 1 Bon candidat au processus limite (LGN).
- 1' Utiliser l'EDP pour caractériser la loi du processus limite.
- 2 Montrer qu'il est bien défini (problème de McKean-Vlasov).
- 3 Bon outil pour le couplage.
- 4 Montrer la convergence.

1/ Processus limite (heuristique)

Rappel : intensités associées au modèle microscopique

$$\lambda_t^i = \Psi \left(S_{t-}^i, \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \int_0^{t-} h(t-z) N^j(dz) \right).$$

1/ Processus limite (heuristique)

Rappel : intensités associées au modèle microscopique

$$\lambda_t^i = \Psi \left(S_{t-}^i, \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \int_0^{t-} h(t-z) N^j(dz) \right).$$

- Indépendance asymptotique (chaos) \Rightarrow LGN.

1/ Processus limite (heuristique)

Rappel : intensités associées au modèle microscopique

$$\lambda_t^i = \Psi \left(S_{t-}^i, \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \int_0^{t-} h(t-z) N^j(dz) \right).$$

- Indépendance asymptotique (chaos) \Rightarrow LGN.

Processus limite

C'est un processus ponctuel \bar{N} dont l'intensité est donnée par

$$\bar{\lambda}_t = \Psi \left(\bar{S}_{t-}, \int_0^{t-} h(t-z) \mathbb{E} [\bar{N}(dz)] \right).$$

1/ Processus limite (heuristique)

Rappel : intensités associées au modèle microscopique

$$\lambda_t^i = \Psi \left(S_{t-}^i, \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \int_0^{t-} h(t-z) N^j(dz) \right).$$

- Indépendance asymptotique (chaos) \Rightarrow LGN.

Processus limite

C'est un processus ponctuel \bar{N} dont l'intensité est donnée par

$$\bar{\lambda}_t = \Psi \left(\bar{S}_{t-}, \int_0^{t-} h(t-z) \mathbb{E} [\bar{N}(dz)] \right).$$

1/ Processus limite (heuristique)

Rappel : intensités associées au modèle microscopique

$$\lambda_t^i = \Psi \left(S_{t-}^i, \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \int_0^{t-} h(t-z) N^j(dz) \right).$$

- Indépendance asymptotique (chaos) \Rightarrow LGN.

Processus limite

C'est un processus ponctuel \bar{N} dont l'intensité est donnée par

$$\bar{\lambda}_t = \Psi \left(\bar{S}_{t-}, \int_0^{t-} h(t-z) \mathbb{E} [\bar{N}(dz)] \right).$$

- Les termes bleus sont proches \Rightarrow les intensités sont proches.

1/ Processus limite (heuristique)

Rappel : intensités associées au modèle microscopique

$$\lambda_t^i = \Psi \left(S_{t-}^i, \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \int_0^{t-} h(t-z) N^j(dz) \right).$$

- Indépendance asymptotique (chaos) \Rightarrow LGN.

Processus limite

C'est un processus ponctuel \bar{N} dont l'intensité est donnée par

$$\bar{\lambda}_t = \Psi \left(\bar{S}_{t-}, \int_0^{t-} h(t-z) \mathbb{E} [\bar{N}(dz)] \right).$$

- Les termes bleus sont proches \Rightarrow les intensités sont proches.
- A priori : le processus \bar{N} dépend de sa propre loi (McKean-Vlasov). Existence non triviale.
- Indice : utiliser l'EDP.
- A posteriori : $\bar{\lambda}_t$ ne dépend que de \bar{S}_{t-} et t . Existence triviale.

2/ Processus limite bien défini

Rappel : point fixe vérifié par l'intensité associée au processus limite

$$\bar{\lambda}_t = \Psi \left(\bar{S}_{t-}, \int_0^{t-} h(t-z) \mathbb{E} [\bar{N}(dz)] \right).$$

On s'intéresse au système d'EDP associé,

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t,s)}{\partial t} + \frac{\partial u(t,s)}{\partial s} + \Psi(s, x(t)) u(t,s) = 0, \\ u(t,0) = \int_{s \in \mathbb{R}_+} \Psi(s, x(t)) u(t,s) ds, \end{cases} \quad (\text{PPS})$$

où $x(t) = \int_0^t h(t-z) u(z,0) dz$. Fait : il admet une unique solution u .

2/ Processus limite bien défini

Rappel : point fixe vérifié par l'intensité associée au processus limite

$$\bar{\lambda}_t = \Psi \left(\bar{S}_{t-}, \int_0^{t-} h(t-z) \mathbb{E} [\bar{N}(dz)] \right).$$

On s'intéresse au système d'EDP associé,

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t,s)}{\partial t} + \frac{\partial u(t,s)}{\partial s} + \Psi(s, x(t)) u(t,s) = 0, \\ u(t,0) = \int_{s \in \mathbb{R}_+} \Psi(s, x(t)) u(t,s) ds, \end{cases} \quad (\text{PPS})$$

où $x(t) = \int_0^t h(t-z) u(z,0) dz$. Fait : il admet une unique solution u .

Proposition

- La distribution de l'âge, \bar{S}_{t-} , est l'unique solution de (PPS).

2/ Processus limite bien défini

Rappel : point fixe vérifié par l'intensité associée au processus limite

$$\bar{\lambda}_t = \Psi \left(\bar{S}_{t-}, \int_0^{t-} h(t-z) \mathbb{E} [\bar{N}(dz)] \right).$$

On s'intéresse au système d'EDP associé,

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t,s)}{\partial t} + \frac{\partial u(t,s)}{\partial s} + \Psi(s, x(t)) u(t,s) = 0, \\ u(t,0) = \int_{s \in \mathbb{R}_+} \Psi(s, x(t)) u(t,s) ds, \end{cases} \quad (\text{PPS})$$

où $x(t) = \int_0^t h(t-z) u(z,0) dz$. Fait : il admet une unique solution u .

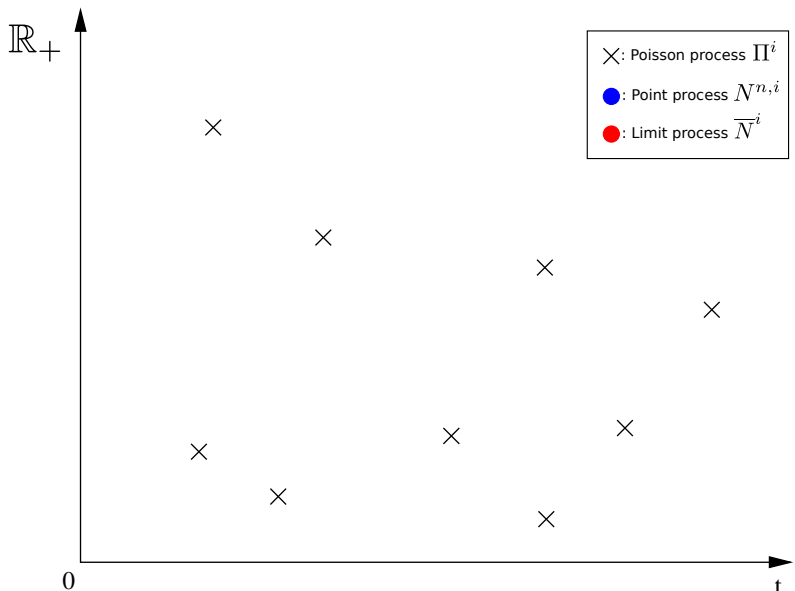
Proposition

- La distribution de l'âge, \bar{S}_{t-} , est l'unique solution de (PPS).
- Ainsi, l'équation de point fixe se réécrit

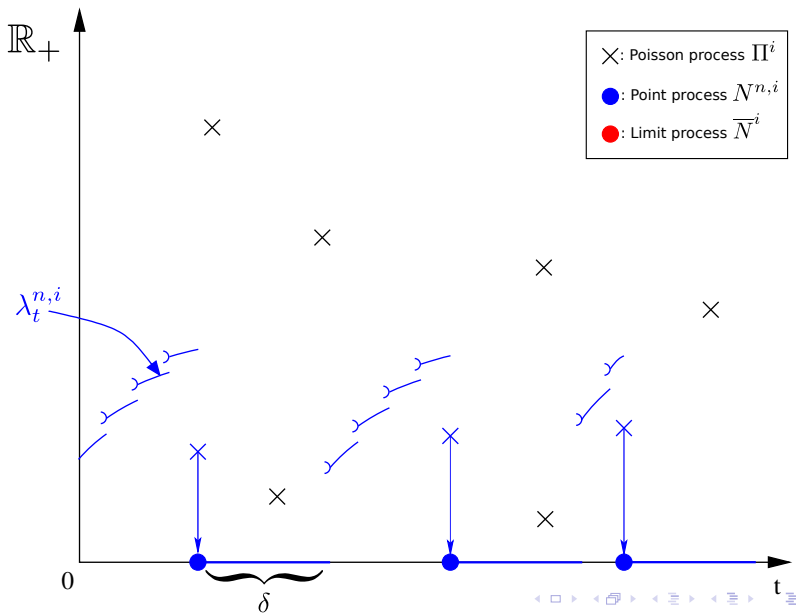
$$\bar{\lambda}_t = \Psi \left(\bar{S}_{t-}, \int_0^t h(t-z) u(z,0) dz \right).$$

- Et donc, l'existence est devenue triviale.

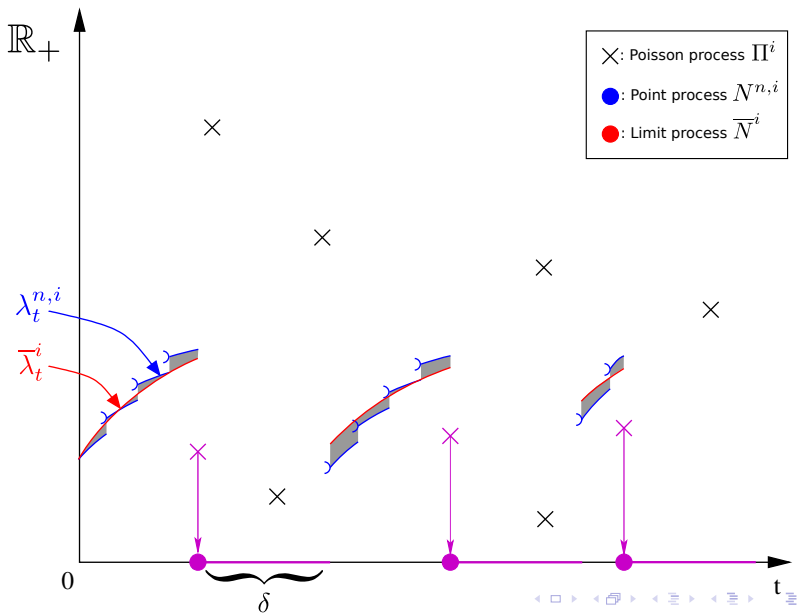
3/ Le couplage



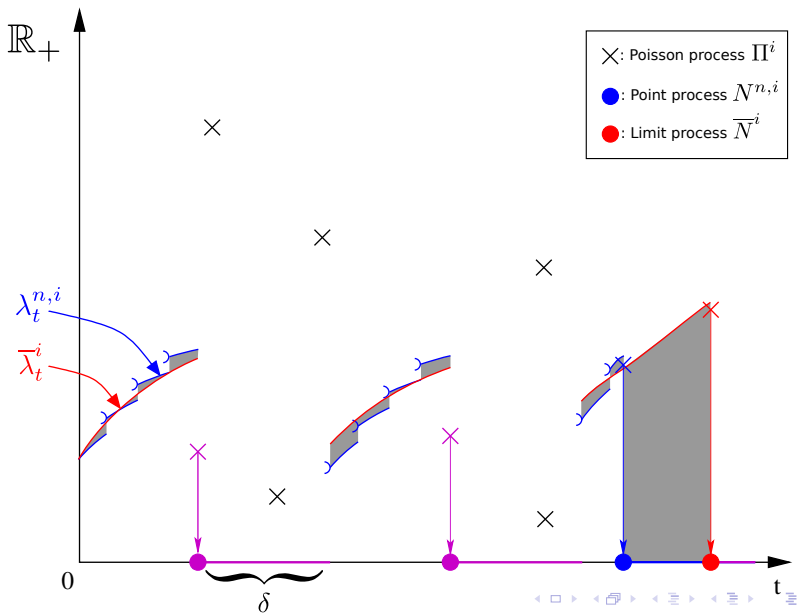
3/ Le couplage



3/ Le couplage



3/ Le couplage



4/ Contrôle/Convergence 1

Théorème

Le couplage précédent est tel que

$$\mathbb{E} \left[\underbrace{\int_0^\theta |\lambda_t^i - \bar{\lambda}_t^i| dt}_{\text{aire de } \blacksquare} \right] \lesssim n^{-1/2}.$$

La constante dépend de θ , Ψ et h .

4/ Contrôle/Convergence 1

Théorème

Le couplage précédent est tel que

$$\mathbb{E} \left[\underbrace{\text{Card}((N^i \Delta \bar{N}^i) \cap [0, \theta])}_{\text{nombre de } \times \text{ dans } \blacksquare} \right] = \mathbb{E} \left[\underbrace{\int_0^\theta |\lambda_t^i - \bar{\lambda}_t^i| dt}_{\text{aire de } \blacksquare} \right] \lesssim n^{-1/2}.$$

La constante dépend de θ , Ψ et h .

4/ Contrôle/Convergence 1

Théorème

Le couplage précédent est tel que

$$\mathbb{P}\left(\underbrace{(S_t^i)_{t \in [0, \theta]} \neq (\bar{S}_t^i)_{t \in [0, \theta]}}_{\text{il y a une } \times \text{ dans } \blacksquare}\right) \leq$$

$$\mathbb{E}\left[\underbrace{\text{Card}((N^i \Delta \bar{N}^i) \cap [0, \theta])}_{\text{nombre de } \times \text{ dans } \blacksquare}\right] = \mathbb{E}\left[\underbrace{\int_0^\theta |\lambda_t^i - \bar{\lambda}_t^i| dt}_{\text{aire de } \blacksquare}\right] \lesssim n^{-1/2}.$$

La constante dépend de θ , Ψ et h .

4/ Contrôle/Convergence 2

Propagation du chaos

Soit k un entier. Si les conditions initiales sont i.i.d., alors les processus $(S_t^1)_{t \geq 0}, \dots, (S_t^k)_{t \geq 0}$ se comportent (quand $n \rightarrow +\infty$) comme des copies i.i.d. du processus limite $(\bar{S}_t)_{t \geq 0}$.

4/ Contrôle/Convergence 2

Propagation du chaos

Soit k un entier. Si les conditions initiales sont i.i.d., alors les processus $(S_t^1)_{t \geq 0}, \dots, (S_t^k)_{t \geq 0}$ se comportent (quand $n \rightarrow +\infty$) comme des copies i.i.d. du processus limite $(\bar{S}_t)_{t \geq 0}$.

Théorème (LGN trajectorielle)

De manière équivalente, on a

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{(S_t^i)_{t \geq 0}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mathcal{L}((\bar{S}_t)_{t \geq 0}).$$

4/ Contrôle/Convergence 2

Propagation du chaos

Soit k un entier. Si les conditions initiales sont i.i.d., alors les processus $(S_t^1)_{t \geq 0}, \dots, (S_t^k)_{t \geq 0}$ se comportent (quand $n \rightarrow +\infty$) comme des copies i.i.d. du processus limite $(\bar{S}_t)_{t \geq 0}$.

Théorème (LGN trajectorielle)

De manière équivalente, on a

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{(S_t^i)_{t \geq 0}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mathcal{L}((\bar{S}_t)_{t \geq 0}).$$

Théorème (LGN ponctuelle)

$$\bar{\mu}_{S_t}^n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{S_t^i} = u(t, \cdot) + O(n^{-1/2})$$

Sommaire de l'exposé

- 1 Introduction
- 2 Outil central : procédure de thinning
- 3 Limite de champ-moyen (LGN)
- 4 Fluctuations (TCL)**
 - Résultat limite
 - Dérivation d'une EDPS

Mesure des fluctuations

Motivations

- Intervalles de confiance et procédures statistiques.
- Échelle mesoscopique : effets de taille finie dans le modèle macroscopique.

Mesure des fluctuations

Motivations

- Intervalles de confiance et procédures statistiques.
- Échelle mesoscopique : effets de taille finie dans le modèle macroscopique.
- Rappel : $\bar{\mu}_{S_t}^n = u(t, \cdot) + O(n^{-1/2})$.
- On s'intéresse donc à $\eta_t^n := \sqrt{n}(\bar{\mu}_{S_t}^n - u(t, \cdot))$. \triangleleft : c'est une mesure.
On va la tester contre des fonctions $\varphi : \langle \eta_t^n, \varphi \rangle$. (Méléard, 96+)

Mesure des fluctuations

Motivations

- Intervalles de confiance et procédures statistiques.
- Échelle mesoscopique : effets de taille finie dans le modèle macroscopique.

- Rappel : $\bar{\mu}_{S_t}^n = u(t, \cdot) + O(n^{-1/2})$.
- On s'intéresse donc à $\eta_t^n := \sqrt{n}(\bar{\mu}_{S_t}^n - u(t, \cdot))$. \triangleleft : c'est une mesure.
On va la tester contre des fonctions $\varphi : \langle \eta_t^n, \varphi \rangle$. (Méléard, 96+)
- En notant $R : \varphi \mapsto \varphi(0) - \varphi$ et $L_t \varphi(s) = \varphi'(s) + \Psi(s, x(t))R\varphi(s)$, on a

Mesure des fluctuations

Motivations

- Intervalles de confiance et procédures statistiques.
- Échelle mesoscopique : effets de taille finie dans le modèle macroscopique.
- Rappel : $\bar{\mu}_{S_t}^n = u(t, \cdot) + O(n^{-1/2})$.
- On s'intéresse donc à $\eta_t^n := \sqrt{n}(\bar{\mu}_{S_t}^n - u(t, \cdot))$. Δ_t : c'est une mesure.
On va la tester contre des fonctions $\varphi : \langle \eta_t^n, \varphi \rangle$. (Méléard, 96+)
- En notant $R : \varphi \mapsto \varphi(0) - \varphi$ et $L_t \varphi(s) = \varphi'(s) + \Psi(s, x(t))R\varphi(s)$, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \langle \eta_t^n, \varphi \rangle = \langle \eta_t^n, L_t \varphi \rangle + F(\bar{\mu}_{S_t}^n, \Gamma_t^n)(R\varphi) + \dot{W}_t^n(R\varphi) + o(1), \\ \Gamma_t^n = \int_0^t h(t-z) G(\bar{\mu}_{S_z}^n, \Gamma_z^n) dz + \int_0^t h(t-z) \langle \eta_z^n, \Psi(\cdot, x(z)) \rangle dz \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad + \int_0^t h(t-z) dW_z^n(1) + o(1). \end{array} \right.$$

Mesure des fluctuations

Motivations

- Intervalles de confiance et procédures statistiques.
- Échelle mesoscopique : effets de taille finie dans le modèle macroscopique.

- Rappel : $\bar{\mu}_{S_t}^n = u(t, \cdot) + O(n^{-1/2})$.
- On s'intéresse donc à $\eta_t^n := \sqrt{n}(\bar{\mu}_{S_t}^n - u(t, \cdot))$. Δ : c'est une mesure. On va la tester contre des fonctions $\varphi : \langle \eta_t^n, \varphi \rangle$. (Méléard, 96+)
- En notant $R : \varphi \mapsto \varphi(0) - \varphi$ et $L_t \varphi(s) = \varphi'(s) + \Psi(s, x(t))R\varphi(s)$, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \langle \eta_t^n, \varphi \rangle = \langle \eta_t^n, L_t \varphi \rangle + F(\bar{\mu}_{S_t}^n, \Gamma_t^n)(R\varphi) + \dot{W}_t^n(R\varphi), \\ \Gamma_t^n = \int_0^t h(t-z)G(\bar{\mu}_{S_z}^n, \Gamma_z^n)dz + \int_0^t h(t-z) \langle \eta_z^n, \Psi(\cdot, x(z)) \rangle dz \\ \quad + \int_0^t h(t-z)dW_z^n(\mathbf{1}). \end{array} \right.$$

Mesure des fluctuations

Motivations

- Intervalles de confiance et procédures statistiques.
- Échelle mesoscopique : effets de taille finie dans le modèle macroscopique.

■ Rappel : $\bar{\mu}_{S_t}^n = u(t, \cdot) + O(n^{-1/2})$.

■ On s'intéresse donc à $\eta_t^n := \sqrt{n}(\bar{\mu}_{S_t}^n - u(t, \cdot))$. Δ : c'est une mesure. On va la tester contre des fonctions $\varphi : \langle \eta_t^n, \varphi \rangle$. (Méléard, 96+)

■ En notant $R : \varphi \mapsto \varphi(0) - \varphi$ et $L_t \varphi(s) = \varphi'(s) + \Psi(s, x(t))R\varphi(s)$, on a

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \langle \eta_t^n, \varphi \rangle = \langle \eta_t^n, L_t \varphi \rangle + F(u(t, \cdot), \Gamma_t^n)(R\varphi) + \dot{W}_t^n(R\varphi), \\ \Gamma_t^n = \int_0^t h(t-z)G(u(z, \cdot), \Gamma_z^n)dz + \int_0^t h(t-z) \langle \eta_z^n, \Psi(\cdot, x(z)) \rangle dz \\ \quad + \int_0^t h(t-z)dW_z^n(\mathbf{1}). \end{cases}$$

Théorème (Résultat trajectorienl)

Les suites $(\eta^n)_{n \geq 1}$, $(\Gamma^n)_{n \geq 1}$ et $(W^n)_{n \geq 1}$ sont tendues. On peut en déduire l'équation vérifiée par les valeurs d'adhérence η , Γ et W .

Remarque : la structure de covariance de W est explicite.

Mesure des fluctuations

Motivations

- Intervalles de confiance et procédures statistiques.
- Échelle mesoscopique : effets de taille finie dans le modèle macroscopique.

■ Rappel : $\bar{\mu}_{S_t}^n = u(t, \cdot) + O(n^{-1/2})$.

■ On s'intéresse donc à $\eta_t^n := \sqrt{n}(\bar{\mu}_{S_t}^n - u(t, \cdot))$. Δ : c'est une mesure. On va la tester contre des fonctions $\varphi : \langle \eta_t^n, \varphi \rangle$. (Méléard, 96+)

■ En notant $R : \varphi \mapsto \varphi(0) - \varphi$ et $L_t \varphi(s) = \varphi'(s) + \Psi(s, x(t))R\varphi(s)$, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \langle \eta_t, \varphi \rangle = \langle \eta_t, L_t \varphi \rangle + F(u(t, \cdot), \Gamma_t^n)(R\varphi) + \dot{W}_t^n(R\varphi), \\ \Gamma_t^n = \int_0^t h(t-z)G(u(z, \cdot), \Gamma_z^n)dz + \int_0^t h(t-z) \langle \eta_z, \Psi(\cdot, x(z)) \rangle dz \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad + \int_0^t h(t-z)dW_z^n(\mathbf{1}). \end{array} \right.$$

Théorème (Résultat trajectorienl)

Les suites $(\eta^n)_{n \geq 1}$, $(\Gamma^n)_{n \geq 1}$ et $(W^n)_{n \geq 1}$ sont tendues. On peut en déduire l'équation vérifiée par les valeurs d'adhérence η , Γ et W .

Remarque : la structure de covariance de W est explicite.

Mesure des fluctuations

Motivations

- Intervalles de confiance et procédures statistiques.
- Échelle mesoscopique : effets de taille finie dans le modèle macroscopique.

- Rappel : $\bar{\mu}_{S_t}^n = u(t, \cdot) + O(n^{-1/2})$.
- On s'intéresse donc à $\eta_t^n := \sqrt{n}(\bar{\mu}_{S_t}^n - u(t, \cdot))$. \triangleleft : c'est une mesure. On va la tester contre des fonctions $\varphi : \langle \eta_t^n, \varphi \rangle$. (Méléard, 96+)
- En notant $R : \varphi \mapsto \varphi(0) - \varphi$ et $L_t\varphi(s) = \varphi'(s) + \Psi(s, x(t))R\varphi(s)$, on a

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \langle \eta_t, \varphi \rangle = \langle \eta_t, L_t\varphi \rangle + F(u(t, \cdot), \Gamma_t)(R\varphi) + \dot{W}_t^n(R\varphi), \\ \Gamma_t = \int_0^t h(t-z)G(u(z, \cdot), \Gamma_z)dz + \int_0^t h(t-z)\langle \eta_z, \Psi(\cdot, x(z)) \rangle dz \\ \quad + \int_0^t h(t-z)dW_z^n(1). \end{cases}$$

Théorème (Résultat trajectorien)

Les suites $(\eta^n)_{n \geq 1}$, $(\Gamma^n)_{n \geq 1}$ et $(W^n)_{n \geq 1}$ sont tendues. On peut en déduire l'équation vérifiée par les valeurs d'adhérence η , Γ et W .

Remarque : la structure de covariance de W est explicite.

Mesure des fluctuations

Motivations

- Intervalles de confiance et procédures statistiques.
- Échelle mesoscopique : effets de taille finie dans le modèle macroscopique.

- Rappel : $\bar{\mu}_{S_t}^n = u(t, \cdot) + O(n^{-1/2})$.
- On s'intéresse donc à $\eta_t^n := \sqrt{n}(\bar{\mu}_{S_t}^n - u(t, \cdot))$. Δ : c'est une mesure. On va la tester contre des fonctions $\varphi : \langle \eta_t^n, \varphi \rangle$. (Méléard, 96+)
- En notant $R : \varphi \mapsto \varphi(0) - \varphi$ et $L_t \varphi(s) = \varphi'(s) + \Psi(s, x(t))R\varphi(s)$, on a

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \langle \eta_t, \varphi \rangle = \langle \eta_t, L_t \varphi \rangle + F(u(t, \cdot), \Gamma_t)(R\varphi) + \dot{W}_t(R\varphi), \\ \Gamma_t = \int_0^t h(t-z)G(u(z, \cdot), \Gamma_z)dz + \int_0^t h(t-z) \langle \eta_z, \Psi(\cdot, x(z)) \rangle dz \\ \quad + \int_0^t h(t-z)dW_z(\mathbf{1}). \end{cases}$$

Théorème (Résultat trajectorienl)

Les suites $(\eta^n)_{n \geq 1}$, $(\Gamma^n)_{n \geq 1}$ et $(W^n)_{n \geq 1}$ sont tendues. On peut en déduire l'équation vérifiée par les valeurs d'adhérence η , Γ et W .

Remarque : la structure de covariance de W est explicite.

Mesure limite

Théorème

Une fois que le bruit gaussien W est fixé, l'équation limite admet une unique solution (η, Γ) . En particulier, la suite $(\eta^n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers η .

Mesure limite

Théorème

Une fois que le bruit gaussien W est fixé, l'équation limite admet une unique solution (η, Γ) . En particulier, la suite $(\eta^n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers η .

$$\bar{\mu}_{S_t}^n = u(t, \cdot) + n^{-1/2} \eta_t + o(n^{-1/2})$$

Mesure limite

Théorème

Une fois que le bruit gaussien W est fixé, l'équation limite admet une unique solution (η, Γ) . En particulier, la suite $(\eta^n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers η .

$$\bar{\mu}_{S_t}^n = u(t, \cdot) + n^{-1/2} \eta_t + o(n^{-1/2})$$

Remarque

Le processus η est caractérisé par le bruit gaussien (W) dont la structure de covariance est "donnée par"

$$\Psi(s, x(t))u(t, s).$$

Version bruitée de (PPS) - Dumont et al. 201 ?

Peut-on améliorer (PPS) en y ajoutant le terme de fluctuations gaussiennes ?

Version bruitée de (PPS) - Dumont et al. 201 ?

Peut-on améliorer (PPS) en y ajoutant le terme de fluctuations gaussiennes ?

EDPS obtenue heuristiquement par Dumont et al.

$$\begin{cases} \frac{\partial u^n(t,s)}{\partial t} + \frac{\partial u^n(t,s)}{\partial s} + \Psi(s, x^n(t)) u^n(t,s) + \sqrt{\frac{\Psi(s, x^n(t)) u^n(t,s)}{n}} \zeta(t,s) = 0, \\ u^n(t,0) = \int_{s \in \mathbb{R}} \Psi(s, x^n(t)) u^n(t,s) + \sqrt{\frac{\Psi(s, x^n(t)) u^n(t,s)}{n}} \zeta(t,s) ds, \end{cases}$$

où $x^n(t) = \int_0^t h(t-z) u^n(z,0) dz.$

Version bruitée de (PPS) - Dumont et al. 201 ?

Peut-on améliorer (PPS) en y ajoutant le terme de fluctuations gaussiennes ?

EDPS obtenue heuristiquement par Dumont et al.

$$\begin{cases} \frac{\partial u^n(t,s)}{\partial t} + \frac{\partial u^n(t,s)}{\partial s} + \Psi(s, x^n(t)) u^n(t,s) + \sqrt{\frac{\Psi(s, x^n(t)) u^n(t,s)}{n}} \zeta(t,s) = 0, \\ u^n(t,0) = \int_{s \in \mathbb{R}} \Psi(s, x^n(t)) u^n(t,s) + \sqrt{\frac{\Psi(s, x^n(t)) u^n(t,s)}{n}} \zeta(t,s) ds, \end{cases}$$

où $x^n(t) = \int_0^t h(t-z) u^n(z,0) dz$.

- 1 En utilisant l'EDP vérifiée par u et l'équation d'évolution vérifiée par η , on peut montrer que $u + n^{-1/2} \eta$ est "presque-solution" de l'EDPS.

Version bruitée de (PPS) - Dumont et al. 201 ?

Peut-on améliorer (PPS) en y ajoutant le terme de fluctuations gaussiennes ?

EDPS obtenue heuristiquement par Dumont et al.

$$\begin{cases} \frac{\partial u^n(t,s)}{\partial t} + \frac{\partial u^n(t,s)}{\partial s} + \Psi(s, x^n(t)) u^n(t,s) + \sqrt{\frac{\Psi(s, x^n(t)) u^n(t,s)}{n}} \zeta(t,s) = 0, \\ u^n(t,0) = \int_{s \in \mathbb{R}} \Psi(s, x^n(t)) u^n(t,s) + \sqrt{\frac{\Psi(s, x^n(t)) u^n(t,s)}{n}} \zeta(t,s) ds, \end{cases}$$

où $x^n(t) = \int_0^t h(t-z) u^n(z,0) dz$.

- 1 En utilisant l'EDP vérifiée par u et l'équation d'évolution vérifiée par η , on peut montrer que $u + n^{-1/2} \eta$ est "presque-solution" de l'EDPS.

Version bruitée de (PPS) - Dumont et al. 201 ?

Peut-on améliorer (PPS) en y ajoutant le terme de fluctuations gaussiennes ?

EDPS obtenue heuristiquement par Dumont et al.

$$\begin{cases} \frac{\partial u^n(t,s)}{\partial t} + \frac{\partial u^n(t,s)}{\partial s} + \Psi(s, x^n(t)) u^n(t,s) + \sqrt{\frac{\Psi(s, x^n(t)) u^n(t,s)}{n}} \zeta(t,s) = 0, \\ u^n(t,0) = \int_{s \in \mathbb{R}} \Psi(s, x^n(t)) u^n(t,s) + \sqrt{\frac{\Psi(s, x^n(t)) u^n(t,s)}{n}} \zeta(t,s) ds, \end{cases}$$

où $x^n(t) = \int_0^t h(t-z) u^n(z,0) dz$.

- 1 En utilisant l'EDP vérifiée par u et l'équation d'évolution vérifiée par η , on peut montrer que $u + n^{-1/2} \eta$ est "presque-solution" de l'EDPS.
- 2 On espère pouvoir montrer que u^n est elle que $\bar{\mu}_{S_t}^n = u^n(t, \cdot) + o(n^{-1/2})$.

Objectifs de l'exposé

- 1 Montrer que (PPS) est la limite macroscopique d'un système (microscopique) de processus de Hawkes multivariés.

$$\bar{\mu}_{S_t}^n = u(t, \cdot) + O(n^{-1/2})$$

Objectifs de l'exposé

- 1 Montrer que (PPS) est la limite macroscopique d'un système (microscopique) de processus de Hawkes multivariés.

$$\bar{\mu}_{S_t}^n = u(t, \cdot) + O(n^{-1/2})$$

- 2 Caractériser les fluctuations du système microscopique autour de sa limite macroscopique.

$$\bar{\mu}_{S_t}^n = u(t, \cdot) + n^{-1/2} \eta_t + o(n^{-1/2})$$

Objectifs de l'exposé

- 1 Montrer que (PPS) est la limite macroscopique d'un système (microscopique) de processus de Hawkes multivariés.

$$\bar{\mu}_{S_t}^n = u(t, \cdot) + O(n^{-1/2})$$

- 2 Caractériser les fluctuations du système microscopique autour de sa limite macroscopique.

$$\bar{\mu}_{S_t}^n = u(t, \cdot) + n^{-1/2} \eta_t + o(n^{-1/2})$$

- 3 Faire le lien entre le développement asymptotique à l'ordre $n^{-1/2}$ et une version bruitée de (PPS).

- Développement à l'ordre 0 :

- Développement à l'ordre 0 :
 - ▶ Casser la propagation du chaos (poids synaptiques corrélés (Faugeras et al.), biais d'échantillonnage,...).
 - ▶ Dépendance spatiale (modèles *neural fields*).

Perspectives

- Développement à l'ordre 0 :
 - Casser la propagation du chaos (poids synaptiques corrélés (Faugeras et al.), biais d'échantillonnage,...).
 - Dépendance spatiale (modèles *neural fields*).

- Développement à l'ordre $n^{-1/2}$:

Perspectives

- Développement à l'ordre 0 :
 - ▶ Casser la propagation du chaos (poids synaptiques corrélés (Faugeras et al.), biais d'échantillonnage,...).
 - ▶ Dépendance spatiale (modèles *neural fields*).

- Développement à l'ordre $n^{-1/2}$:
 - ▶ Clarifier la dérivation du système macroscopique bruité.
 - ▶ Intervalles de confiance et tests d'adéquation de loi.