

DÉTECTION DE MOTIFS DE DÉPENDANCE ENTRE NEURONES

Laboratoire de Mathématiques J.-A. Dieudonné, Université de Nice Sophia-Antipolis

Stage réalisé dans le cadre du MA2 ENS Lyon (2012-13)

Julien CHEVALLIER



Remerciements. Je remercie tout d'abord le Laboratoire Jean-Alexandre Dieudonné de Nice Sophia-Antipolis pour son accueil. Je remercie principalement Patricia Reynaud-Bouret pour m'avoir proposé ce stage et guidé tout au long de ces semaines. Je tiens également à remercier Melisande Albert et Thomas Laloë qui m'ont apporté leur aide pour la rédaction de ce mémoire.

Table des matières

I	Introduction	4
I.1	Contexte Neurobiologique	4
I.1.1	Potentiel d'action	4
I.1.2	Problématique	5
I.2	Problème Statistique	6
II	Modélisation par Processus de Poisson	7
II.1	Préliminaires	7
II.1.1	Rappels sur les Tests Statistiques	7
II.1.2	Rappels sur les processus de Poisson	7
II.2	Calcul de coïncidences à n neurones	8
II.3	Test d'indépendance	10
II.4	Calculs explicites	11
III	Généralités sur les Processus Ponctuels	11
III.1	Processus ponctuels simples	12
III.2	Processus ponctuels marqués	14
III.3	Processus de Hawkes	16
IV	Méthode de Thinning	16
IV.1	Lemmes de construction par Thinning	16
IV.2	Algorithme de Thinning	21
IV.3	Extension aux processus ponctuels multi-dimensionnels	22
V	Simulations	23
V.1	Vérification du niveau et de la convergence en loi	23
V.2	Puissance du Test	25
A	Annexe	31
A.1	Preuves	31
A.1.1	Preuve du théorème II.1	31
A.1.2	Preuve du théorème II.2	32
A.1.3	Preuve de la Proposition II.1	33
A.2	Algorithmes	38
A.2.1	Calcul nb de coïncidences	38
A.2.2	Simulation de processus de Poisson	40
A.2.3	Simulation de processus de Hawkes	41

I Introduction

I.1 Contexte Neurobiologique

Les études qui portent sur le transport de l'information dans le système nerveux s'attachent à considérer différents aspects de l'activité cérébrale. Par exemple, les techniques d'imagerie cérébrale permettent de mesurer *in vivo* l'activité électrique ou encore les flux sanguins dans le cerveau ce qui permet d'en déduire les zones sollicitées. Dans ce stage, on s'intéressera à un niveau microscopique aux potentiels d'actions qui constituent le substrat de ce transport d'information, par exemple depuis les zones périphériques (récepteurs sensitifs) jusqu'au cortex. Commençons par décrire le rôle de ces potentiels d'action.

I.1.1 Potentiel d'action

Le nombre de neurones dans le système nerveux varie fortement d'un animal à l'autre. Par exemple, l'Homme en possède près de 100 milliards, tandis que le homard ou la mouche du fruit n'en possède qu'une centaine de milliers. Ce sont des cellules spécialisées dans le transfert d'informations qui communiquent via les connexions synaptiques. Les messagers de ces informations sont les potentiels d'action (également appelé influx nerveux, ou spike en anglais).

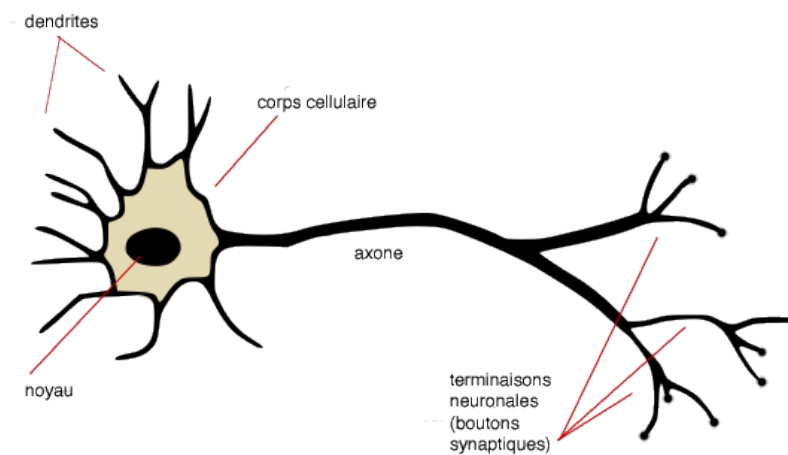


FIGURE 1 – Schéma classique d'un neurone

La genèse d'un potentiel d'action a lieu dans le noyau d'un neurone que l'on qualifiera de pré-synaptique. Il se manifeste ensuite sous la forme d'un signal électrique unidirectionnel transmis par l'axone qui se diffuse uniformément jusqu'aux synapses où il provoque la libération de neurotransmetteurs. Ces neurotransmetteurs se fixent sur les récepteurs des neurones voisins que l'on qualifiera de post-synaptiques. Les dendrites véhiculent alors cette information jusqu'au noyau qui, s'il est suffisamment sollicité, va à son tour émettre un potentiel d'action. Ainsi, on a décrit le transport de l'information pour une relation "père-fils" - au sens où il y a une connexion dirigée du père vers le fils. Cette opération se répétant de père en fils, l'information peut se transmettre.

Le potentiel d'action correspond à une dépolarisation transitoire, locale, brève et stéréotypée (amplitude constante) de la membrane plasmique des neurones, selon une loi du tout ou rien. Comme les potentiels ont la même amplitude, le codage de l'information se fait par l'apparition ou non d'un potentiel d'action. On ne s'intéresse donc pas à la durée très brève de ces potentiels d'action, mais à leur temps d'apparition. Ainsi, l'information pertinente peut se résumer à une suite de points (temps) aléatoires.

Historiquement, les neurones étaient considérés comme des entités indépendantes (Barlow, 1972). Cette conception est principalement due au fait que pour des raisons technologiques, on ne pouvait enregistrer que l'activité d'un neurone à la fois. Mais, depuis l'utilisation de plusieurs électrodes simultanément, des études ont porté sur les interactions entre les neurones et notamment la synchronisation. Ce stage s'inscrit dans cette dynamique.

La Figure 2 illustre l'influence des potentiels d'action reçus sur l'émission d'un potentiel d'action. L'effet d'une stimulation par un neurone père ne dure pas longtemps. En comparant les deux parties de cette figure, on remarque que la réception de quelques potentiels dans un court laps de temps est très

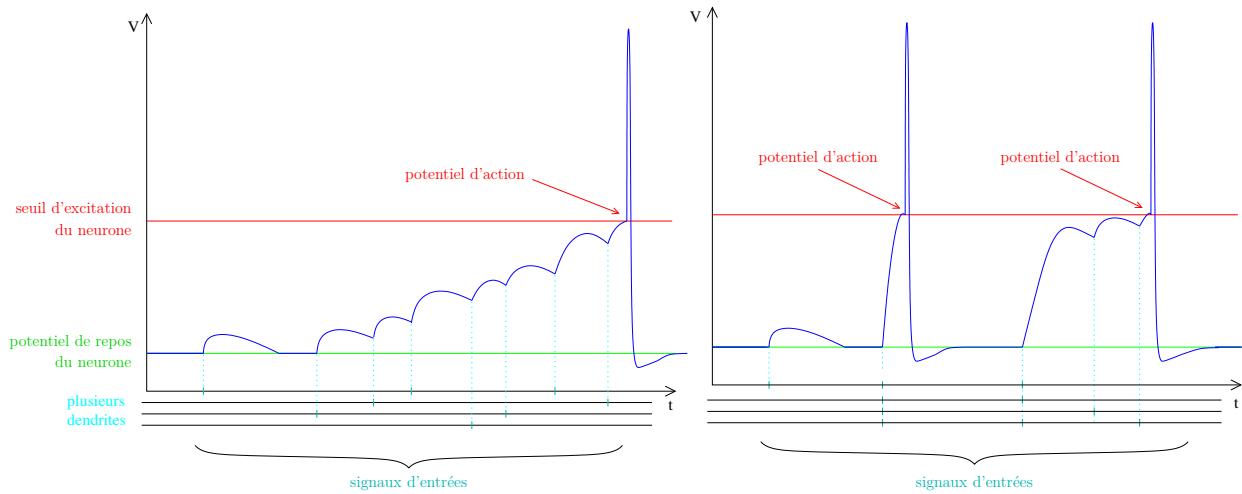


FIGURE 2 – Graphes représentant le potentiel de la membrane d’un neurone en fonction du temps. A gauche, les stimulations apparaissent de manière désordonnée. En revanche, à droite, elles sont synchronisées.

efficace. En réalité, une trentaine de stimulations synchronisées suffisent à atteindre le seuil tandis qu’il en faut près de 300 lorsqu’elles interviennent de manière désordonnée. Ce phénomène de synchronisation a été mis en évidence à plusieurs moments clés d’une tâche sensori-motrice. On cherche donc à mieux comprendre ce phénomène.

Les résultats obtenus pendant ce stage ont pour but l’application à des données expérimentales et le formalisme utilisé tente de s’y conformer. Les mesures sont effectuées grâce à des électrodes implantées dans le cortex. Elles n’enregistrent pas les données exactes du potentiel de la membrane plasmique des neurones. Par contre, elles permettent de détecter les potentiel d’action (ou spike) de neurones voisins. On peut différencier les spikes selon le neurone d’émission grâce à leur “signature” (forme). On va s’intéresser à ces suites (trains) de temps de spikes “signées”, qui forment des processus ponctuels.

Les trains de spikes sont enregistrés pendant que le sujet de l’expérience subit des “épreuves” répétées. Le protocole expérimental utilisé respecte la forme suivante :

- Sollicitation des fonctions sensibles - Stimulus sensitif (visuel ou sonore) déclenché par l’expérimentateur.
- Sollicitation des fonctions motrices - Réaction (mouvement, émission d’un son) du sujet.
- Sollicitation des fonctions cognitives - Apprentissage via un système de récompense.

Finalement, nous avons accès à des données (observations) du type suivant :

- Sur une fenêtre de temps fixée $[0, T]$, le sujet est soumis au protocole fixé et on enregistre les trains de spikes (temps d’émission) N_1, \dots, N_n d’un petit nombre n de neurones.
- On répète cette opération un nombre M de fois.

Comme le temps T est relativement grand et que les sollicitations au cours de l’expérience sont diverses, une hypothèse de stationnarité est peu crédible. Pour se raccrocher à cette hypothèse de stationnarité, on découpera cette fenêtre de temps en de nombreuses fenêtres $[a, b]$ plus petites.

I.1.2 Problématique

Une assemblée neuronale est un groupe de neurones qui entretiennent entre eux des connexions synaptiques renforcées, de sorte qu’ils ont plus de chance d’être actifs tous ensemble en même temps. Les neurones d’une même assemblée ne sont pas nécessairement tous voisins et peuvent être répartis dans différentes régions du cerveau. D’autre part, un même neurone peut participer à plusieurs assemblées au cours du temps. Ces assemblées neuronales se forment suite à des stimulations communes et répétées des neurones concernés. Dans le cadre de l’expérience citée précédemment, au vu du nombre élevé de répétition et de l’apprentissage qui s’en suit, on peut supposer qu’un tel assemblage s’est produit, et qu’il s’active à chaque répétition. On souhaiterait donc repérer ces assemblées, via les dépendances entre neurones.

On dira qu'il y a une coïncidence entre neurones lorsque ceux-ci émettent chacun un spike plus ou moins simultanément (voir la Figure 3). On introduira (mathématiquement) dans la suite la notion de coïncidence qui est centrale dans ce travail.

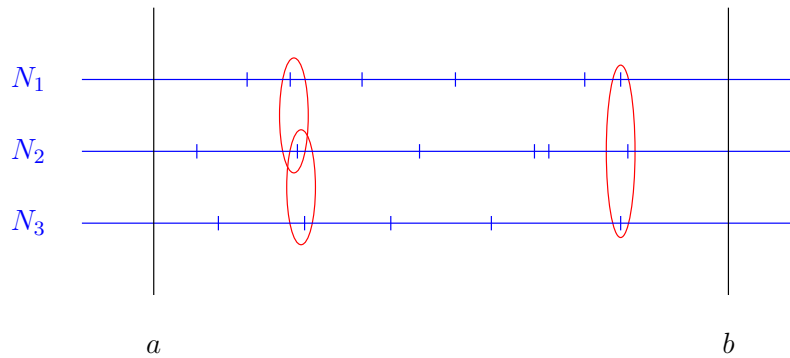


FIGURE 3 – Les trains de spikes correspondant à trois neurones entre a et b . Des motifs de coïncidence entre les neurones sont mis en évidence

Compte tenu des limites techniques des mesures (principalement, le fait que l'on ne sache pas à quel endroit exact de l'axone est placée l'électrode), deux spikes enregistrés à quelques millisecondes d'intervalle peuvent arriver en même temps au niveau du neurone cible. Une dépendance positive (par exemple lorsque deux neurones "souhaitent" stimuler un même neurone cible en même temps) se manifeste donc par des motifs de coïncidences récurrents.

La question de savoir détecter une dépendance peut paraître simple, mais le problème qui se pose est que dans le cas où les trains de spikes sont indépendants, la probabilité d'apparition d'une coïncidence n'est pas nulle. Nous allons donc dans un premier temps quantifier le nombre moyen de ces coïncidences fortuites. On va ensuite se servir de cette valeur attendue pour mettre en place un test statistique dans lequel on rejettera l'hypothèse d'indépendance si le nombre de coïncidences empirique est trop éloigné de la valeur attendue.

I.2 Problème Statistique

Cette approche par la détection des coïncidences a été initiée par Grün (1996) puis améliorée par Grün et al. (1999). Cependant, dans ce travail, le nombre de coïncidences était considéré comme suivant une loi de Poisson, ce qui est faux. La première partie de ce stage s'inspire donc de la correction effectuée pour deux neurones par Christine Tuleau-Malot, Amel Rouis, Franck Grammont et Patricia Reynaud-Bouret [9]. Dans [9] est proposé un test d'indépendance basé sur le calcul d'une quantité (appelée statistique de test) ne dépendant que des observations, et plus particulièrement du nombre de coïncidences empirique. L'article donne la loi asymptotique de cette statistique, ce qui permet de dire que si la statistique obtenue est trop éloignée d'une valeur attendue alors on pourra suspecter de la dépendance entre ces deux neurones. Dans ce stage nous travaillerons sous les mêmes hypothèses que dans [9]. Ces hypothèses sont assez restrictives, on les exposera dans la suite.

Notre premier but a été d'étendre le test statistique obtenu à un nombre quelconque de neurones. Plus précisément, étant données des observations de N_1, \dots, N_n les processus de temps d'émission de potentiel d'action de n neurones sur $[a, b]$, on souhaite répondre à la question suivante :

ÉTANT DONNÉ $\mathcal{J} \subset \llbracket 1, n \rrbracket$, PEUT-ON CONSIDÉRER QUE LES PROCESSUS N_j , $j \in \mathcal{J}$ SONT INDÉPENDANTS ?

On cherche donc à construire un test statistique confrontant les deux hypothèses :

$$\begin{cases} (\mathcal{H}_0) & \text{Les processus } N_j, j \in \mathcal{J} \text{ sont indépendants.} \\ (\mathcal{H}_1) & \text{Les processus } N_j, j \in \mathcal{J} \text{ ne sont pas indépendants.} \end{cases}$$

Ainsi, dans la Section II, sous l'hypothèse que les processus soient de Poisson, nous allons établir un test dont on connaîtra le niveau asymptotique. La suite du travail consistera à étudier une classe de processus ponctuels plus riche que celle des processus de Poisson (partie III). Nous choisirons plus

particulièrement les processus de Hawkes. Ces processus ne respectant pas l'hypothèse du cadre du test, nous n'aurons pas de résultat théorique, mais il sera intéressant de voir le comportement de notre test face à ces processus plus complexes. Pour évaluer la puissance de notre test face à ces processus, il va nous falloir les simuler, ce qui va nous amener à étudier la méthode de Thinning (partie IV). Dans la Section V, on utilisera ces possibilités de simulations pour, dans un premier temps, vérifier l'asymptotique du test, et, dans un second temps, sa puissance face à des processus de Hawkes.

II Modélisation par Processus de Poisson

II.1 Préliminaires

Nous supposons connues les propriétés de base sur les processus stochastiques, notamment les notions de filtration, temps d'arrêt et martingales. En guise de référence, nous citerons par exemple le cours très intéressant de J.F Le Gall ou encore les deux livres de Durrett [4, 5]

II.1.1 Rappels sur les Tests Statistiques

Définition. Une statistique de test S est une fonction mesurable des observations.

Le test étudié ici est un test d'indépendance pour lequel on calcule une statistique que l'on compare à une zone de rejet.

Définition. Tester (\mathcal{H}_0) contre (\mathcal{H}_1) au niveau α revient à trouver une statistique de test S telle que pour toute probabilité \mathbb{P}_0 vérifiant \mathcal{H}_0 (noté $\mathbb{P}_0 \in \mathcal{H}_0$),

$$\mathbb{P}_0(S \in \mathcal{R}_\alpha) \leq \alpha.$$

On appelle \mathcal{R}_α la zone de rejet du test de niveau α :

- si $S \in \mathcal{R}_\alpha$, on rejette l'hypothèse nulle \mathcal{H}_0 ,
- et si au contraire $S \notin \mathcal{R}_\alpha$, on accepte l'hypothèse nulle.

Deux quantités permettent de quantifier l'efficacité du test :

- L'erreur de première espèce $\sup_{\mathbb{P}_0 \in \mathcal{H}_0} \mathbb{P}_0(S \in \mathcal{R})$ correspond au rejet de l'hypothèse nulle à tort.
- La fonction puissance, $\mathbb{P}_1 \in \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathbb{P}_1(S \in \mathcal{R})$ correspond au rejet de l'hypothèse nulle à raison.

Une notion plus forte que le niveau d'un test est celle de la p-valeur.

Définition. La p-valeur d'un test est définie à partir des observations X par

$$p = \sup \{ \alpha \mid S(X) \notin \mathcal{R}_\alpha \}.$$

C'est la valeur de α pour laquelle au vue de nos observations, on passe de l'acceptation au rejet.

II.1.2 Rappels sur les processus de Poisson

On établira notre test sous les hypothèses suivantes.

Hypothèse.

- N_1, \dots, N_n sont des processus de Poisson homogènes sur $[a, b]$.
- Les différents essais sont indépendants et identiquement distribués.

Pour comprendre l'hypothèse sur les temps de spikes, il faut d'abord formaliser la notion de processus ponctuel.

Définition II.1. Soit (\mathcal{X}, d) un espace métrique. On appelle processus ponctuel simple (pas de points multiples) sur \mathcal{X} un ensemble aléatoire N de points de \mathcal{X} (dont le cardinal est également aléatoire). On dit qu'il est localement fini si pour tout A borélien borné de \mathcal{X} , le nombre points de $N \cap A$ est fini p.s.

Dans la suite, on travaillera principalement avec $\mathcal{X} = \mathbb{R}_+$. Dans ce cas là, on adoptera la notation $N = \{T_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$. Pour traiter avec le cas où le cardinal de N est fini, on supposera que $T_n < T_{n+1}$ p.s. sur $\{T_n < \infty\}$ et $\{T_n = +\infty\} \subset \{T_{n+1} = +\infty\}$.

Exemple II.1. Un exemple simple mais non trivial de processus ponctuel est le suivant. Prenons $\mathcal{X} = [0, 1]$ et $\lambda > 0$. Soit K une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λ . Elle représente le nombre de points du processus. Maintenant, on note $(U_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$. Alors $N = \{U_i, i = 1 \dots K\}$ est un processus ponctuel sur $[0, 1]$. Nous verrons dans la suite que c'est un processus de Poisson homogène.

Dans la suite, nous supposerons que les processus ponctuels considérés sont localement finis (se dit également non-explosif dans le cas où $\mathcal{X} = \mathbb{R}_+$).

Définition II.2. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $N = \{T_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ un processus ponctuel simple sur \mathbb{R}_+ . On lui associe la mesure ponctuelle, aussi notée N , définie par

$$N(C) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbf{1}_C(T_n)$$

pour tout $C \subset \mathbb{R}_+$.

Dans la suite, on parlera de manière équivalente de processus ponctuel ou de mesure ponctuelle.

Définition II.3. Un processus ponctuel N est appelé processus de Poisson d'intensité $\lambda(t) \geq 0$ si :

1. $N(\{0\}) = 0$,
2. Le processus est à accroissements indépendants, i.e.

$$\forall 0 \leq a < b < c < d, N([a, b]) \perp\!\!\!\perp N([c, d])$$

3. Le nombre de points se produisant dans un intervalle de temps $[a, b]$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_{a,b} = \int_a^b \lambda(t) dt$, i.e.

$$\forall 0 \leq a < b, \forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(N([a, b]) = k) = e^{-\lambda_{a,b}} \frac{(\lambda_{a,b})^k}{k!}$$

Remarque. Si $\lambda(t)$ est constant, alors N est qualifié de processus de Poisson *homogène*. L'Exemple II.1 propose une représentation différente des processus de Poisson homogènes.

La notion de processus de Poisson s'étend clairement aux dimensions d quelconques.

Définition II.4. Un processus ponctuel N est appelé processus de Poisson sur \mathbb{R}_+^d d'intensité $\lambda(t_1, \dots, t_d) \geq 0$ si :

1. $N(\{0\}) = 0$,
2. Le processus est à accroissements indépendants, i.e.

$$\forall A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^d), A \cap B = \emptyset \Rightarrow N(A) \perp\!\!\!\perp N(B)$$

3. Pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^d)$, si $\Lambda(A) = \int_A \lambda(t_1, \dots, t_d) dt_1 \dots dt_d < \infty$, alors le nombre de points se produisant dans A suit une loi de Poisson de paramètre $\Lambda(A)$.

II.2 Calcul de coïncidences à n neurones

Dans la suite, on notera N_1, \dots, N_n des processus de Poisson homogènes sur $[a, b]$ (fenêtre de courte durée sur laquelle l'hypothèse d'homogénéité est raisonnable) d'intensités respectives $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Ces n processus représentent les n trains de spikes enregistrés.

Dans un premier temps, il nous faut formaliser la notion de coïncidence. Pour garder le plus de généralité possible, nous allons introduire le concept de fonction de coïncidence.

Définition II.5. Soit $2 \leq J \leq n$. On appellera fonction de coïncidence sur un sous-ensemble de cardinal J toute fonction $c : \mathbb{R}^J \rightarrow \{0, 1\}$.

Soit $\mathcal{J} \subset \llbracket 1, n \rrbracket$. On note $J \geq 2$ son cardinal, $\mathcal{J} = \{i_1 < \dots < i_J\}$ et $N_{\mathcal{J}}$ l'ensemble des neurones indexés par des éléments de \mathcal{J} .

Soit $(x_1, \dots, x_J) \in \prod_{j=1}^J N_{i_j}$ un J -uplet formé d'un temps de spike de chaque neurone de $N_{\mathcal{J}}$. On dira que (x_1, \dots, x_J) est une coïncidence dans $N_{\mathcal{J}}$ si et seulement si $c(x_1, \dots, x_J) = 1$.

Il est à noter que les résultats théoriques (Théorèmes II.1 et II.2) que l'on va obtenir sont valables quelque soit la fonction de coïncidence considérée. Cependant, pour ne pas perdre le lien avec notre problématique de départ, nous donnons deux exemples de fonctions de coïncidence qui correspondent à l'idée informelle de notion de coïncidence formulée dans l'introduction.

Exemple. Deux exemples de fonctions de coïncidence sont naturels :

$$c_{\delta}(x_1, \dots, x_J) = \mathbf{1}_{\left| \max_{i \in \llbracket 1, J \rrbracket} x_i - \min_{i \in \llbracket 1, J \rrbracket} x_i \right| \leq \delta} \quad (1)$$

$$c_{\delta}(x_1, \dots, x_J) = \prod_{j=1}^J \mathbf{1}_{|x_j - \bar{x}| \leq \delta} \quad (2)$$

Ces deux exemples dépendent d'un paramètre δ qui correspond à la taille de la fenêtre de coïncidence. Dans le premier, on considère qu'il y a coïncidence si on peut trouver un intervalle de longueur δ qui contient tous les points du J -uplet. Dans le second, on considère qu'il y a coïncidence si chaque point est éloigné au plus de δ de la moyenne des points du J -uplet.

Définition II.6. Soit $\mathcal{J} \subset \llbracket 1, n \rrbracket$. On note $J \geq 2$ son cardinal, $\mathcal{J} = \{i_1 < \dots < i_J\}$. Soit $\delta > 0$ et c_{δ} une fonction de coïncidence. Le nombre X de coïncidences de délai δ sur $[a, b]$ dans $N_{\mathcal{J}}$ est défini par :

$$X = \int_{[a, b]^J} c_{\delta}(x_1, \dots, x_J) dN_{i_1}(x_1) \dots dN_{i_J}(x_J)$$

où $dN_{i_1}, \dots, dN_{i_J}$ sont les mesures associées à N_{i_1}, \dots, N_{i_J} .

Les calculs qui suivent vont nous permettre de mettre en place un test statistique de l'hypothèse H_0 : "Les processus de l'ensemble $N_{\mathcal{J}}$ sont indépendants" contre H_1 , son alternative.

Définition II.7. Soit \mathcal{J} comme précédemment. On pose :

$$\forall k \in \llbracket 0, J \rrbracket, I(J, k) = \int_{[a, b]^{J-k}} \left(\int_{[a, b]^k} c_{\delta}(x_1, \dots, x_J) dx_1 \dots dx_k \right)^2 dx_{k+1} \dots dx_J$$

Remarque. On prendra la convention $\int_{[a, b]^0} f(x) = f(x)$. On remarquera que tous les $I(J, k)$ sont strictement positifs et $I(J, J) = I(J, 0)^2$.

Théorème II.1. Soient \mathcal{J} et X comme dans II.6. Sous l'hypothèse que N_1, \dots, N_n sont des processus de Poisson homogènes et sous \mathcal{H}_0 , l'espérance et la variance du nombre X de coïncidences sont données par :

$$m_0 := \mathbb{E}[X] = \left(\prod_{j=1}^J \lambda_{i_j} \right) I(J, 0)$$

et

$$Var(X) = \mathbb{E}[X] + \sum_{k=1}^{J-1} \left(\sum_{\substack{\mathcal{L} \subset \mathcal{J} \\ \#\mathcal{L}=k}} \prod_{l \in \mathcal{L}} \lambda_{i_l}^2 \prod_{j \notin \mathcal{L}} \lambda_{i_j} \right) I(J, k)$$

Démonstration. La preuve repose sur le calcul des moments d'un processus de Poisson (voir Annexe). \square

II.3 Test d'indépendance

Dans cette partie, on s'intéresse au test d'indépendance basé sur le calcul du nombre de coïncidences. Ce test est basé sur la méthode delta et s'effectue en comparant deux estimés de m_0 , sous \mathcal{H}_0 . On se donne M réalisations de notre expérience.

- $\bar{m} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M X^{(k)}$, où $X^{(k)}$ est le nombre de coïncidences de la $k^{\text{ème}}$ réalisation.
- $\hat{m}_0 = \prod_{j=1}^J \hat{\lambda}_{i_j} \cdot I(0)$, où $\hat{\lambda}_{i_j} := \frac{1}{M(b-a)} \sum_{k=1}^M N_{i_j}^{(k)}([a, b])$.

On souhaite créer un test qui va nous permettre de rejeter \mathcal{H}_0 quand la différence entre ces deux estimateurs est trop grande. Que l'on soit sous \mathcal{H}_0 ou sous \mathcal{H}_1 , \bar{m} converge vers $\mathbb{E}[X]$ (par la loi des grands nombres) et le Théorème Central-Limite donne un résultat asymptotique sur $\sqrt{M}(\bar{m} - \mathbb{E}[X])$.

$$\sqrt{M}(\bar{m} - \mathbb{E}[X]) \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \text{Var}(X))$$

Sous \mathcal{H}_1 , \hat{m}_0 n'a aucune raison de converger vers $\mathbb{E}[X]$ et la différence entre \bar{m} et \hat{m}_0 n'a aucune raison de converger vers 0. Au contraire, sous \mathcal{H}_0 , \hat{m}_0 est un estimateur convergent de $\mathbb{E}[X]$. Cependant, le résultat obtenu via le Théorème Central-Limite ne tient pas si l'on remplace m_0 par son estimateur \hat{m}_0 , mais on peut obtenir un résultat similaire explicité dans le Théorème II.2 en appliquant la méthode delta.

Théorème II.2. Soient \mathcal{J} et X comme dans II.6. Sous l'hypothèse que N_1, \dots, N_n sont des processus de Poisson homogènes et sous \mathcal{H}_0 , on a la convergence en loi suivante :

$$\sqrt{M}(\bar{m} - \hat{m}_0) \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2),$$

où

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) - (b-a)^{-1} \mathbb{E}[X]^2 \left(\sum_{j=1}^J \lambda_{i_j}^{-1} \right).$$

De plus, σ^2 peut être estimé par

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{v}(X) - (b-a)^{-1} I(J, J) \prod_{j=1}^J \hat{\lambda}_{i_j}^2 \left(\sum_{k=1}^J \hat{\lambda}_{i_k}^{-1} \right),$$

où

$$\hat{v}(X) = \hat{m}_0 + \sum_{k=1}^{J-1} \left(\sum_{\substack{\mathcal{L} \subset \mathcal{J} \\ \#\mathcal{L}=k}} \prod_{l \in \mathcal{L}} \hat{\lambda}_{i_l}^2 \prod_{j \notin \mathcal{L}} \hat{\lambda}_{i_j} \right) I(J, k),$$

et

$$\sqrt{M} \frac{(\bar{m} - \hat{m}_0)}{\sqrt{\hat{\sigma}^2}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Démonstration. La preuve repose sur une simple application de la méthode delta (voir Annexe). \square

Définition II.8. Pour $\alpha \in]0, 1[$, on note z_α le quantile d'ordre α de la loi normale centrée réduite. Étant donné $\alpha \in]0, 1[$, on définit le test pour la statistique $S_M = \sqrt{M} \frac{(\bar{m} - \hat{m}_0)}{\sqrt{\hat{\sigma}^2}}$ dont la zone de rejet \mathcal{R}_α est égale à

1. $] -\infty, z_\alpha]$ dans le cas d'un test unilatéral par en dessous.
2. $[z_{1-\alpha}, +\infty[$ dans le cas d'un test unilatéral par au dessus.
3. $] -\infty, z_{\frac{\alpha}{2}}] \cup [z_{1-\frac{\alpha}{2}}, +\infty[$ dans le cas d'un test bilatéral.

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate du Théorème II.2.

Corollaire II.1. Dans les trois cas, le test ainsi défini est asymptotiquement d'erreur de première espèce α , i.e.

$$\forall \mathbb{P}_0 \in \mathcal{H}_0, \mathbb{P}_0(S_M \in \mathcal{R}_\alpha) \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{} \alpha.$$

II.4 Calculs explicites

Si l'on veut que notre test théorique puisse être appliqué, il faut pouvoir quantifier $\hat{\sigma}^2$. Le Théorème II.2 nous indique que $\hat{\sigma}^2$ ne dépend que des observations (par l'intermédiaire des estimateurs) et des intégrales $I(J, k)$. Les résultats précédents sont valables quelque soit la fonction de coïncidence considérée. De plus, la dépendance en la fonction de coïncidence utilisée ne se traduit que dans les quantités $I(J, k)$. Dans un cadre général, pour une fonction de coïncidence donnée, on peut espérer approcher ces intégrales via des méthodes numériques.

Dans cette partie, nous allons présenter un résultat fort pour les fonction de coïncidences du type (1). Dans ce cadre, le calcul explicite des $I(J, k)$ est possible.

Fait.

$$I(J, k) = \int_{[a,b]^{J-k}} \left(\int_{[a,b]^k} \mathbf{1}_{\left| \max_{i \in [1,J]} x_i - \min_{i \in [1,J]} x_i \right| \leq \delta} dx_1 \dots dx_k \right)^2 dx_{k+1} \dots dx_J$$

Proposition II.1. $\forall J \geq 2, \forall \delta < \frac{b-a}{2},$

- $I(J, J) = J^2 (b-a)^2 \delta^{2J-2} - 2J(J-1)(b-a)\delta^{2J-1} + (J-1)^2 \delta^{2J}$
- $\forall k \in \llbracket 0, J-1 \rrbracket,$

$$I(J, k) = f(J, k) (b-a) \delta^{J+k-1} - h(J, k) \delta^{J+k} \quad (3)$$

où

$$f(J, k) = \frac{k(k+1) + J(J+1)}{J-k+1}$$

et

$$h(J, k) = \frac{-k^3 + k^2(2+J) + k(5+2J-J^2) + J^3 + 2J^2 - J - 2}{(J-k+2)(J-k+1)}$$

Démonstration. La preuve de ce résultat repose sur deux lemmes calculatoires dont la démonstration est donnée en annexe. \square

Remarque. $I(J, 0)$ et $I(J, J-1)$ ont des expressions plus lisibles,

$$I(J, 0) = J(b-a)\delta^{J-1} - (J-1)\delta^J$$

et

$$I(J, J-1) = J^2(b-a)\delta^{2J-2} + \frac{2}{3}(-2J^2 + J + 1)\delta^{2J-1}$$

$I(J, J) = I(J, 0)^2$ est un cas particulier comme on peut le voir dans la démonstration (Annexe). On notera que pour $k < J$, $I(J, k)$ est de l'ordre de δ^{J+k-1} ($\delta \ll b-a$).

Vu que l'on a une expression explicite des $I(J, k)$, la statistique de test $S = \sqrt{M} \frac{(\bar{m} - \hat{m}_0)}{\sqrt{\hat{\sigma}^2}}$ ne dépend que des observations. Dans la suite, on ne considérera que des fonctions de coïncidences du type (1), ce qui nous permettra d'implémenter un programme calculant la statistique pour des trains de spikes donnés. On retrouve que dans le cas où $J = 2$, les valeurs des $I(J, k)$ pour $k = 0, 1, 2$ coïncident avec celles obtenues dans [9]. De plus, dans [9], on remarque que la renormalisation σ^2 est plus proche de m_0 que $Var(X)$, le terme correctif est alors en δ^3 . Cela se rapproche de l'approximation poissonnienne de Grün. On remarque ici que cette propriété ne se conserve pas pour $J > 2$.

III Généralités sur les Processus Ponctuels

Les résultats des parties précédentes nous donnent le comportement de notre test face à des processus de Poisson homogènes qui respectent l'hypothèse d'indépendance \mathcal{H}_0 . Obtenir un test d'indépendance similaire en se libérant de l'hypothèse de Poisson homogène est hors de portée de ce stage.

Cependant, on peut se poser la question de l'utilité de notre test face à des processus qui ne soient pas de Poisson. Pour aller dans ce sens, nous allons mettre à l'épreuve notre test de manière numérique en le confrontant à des processus dépendants que l'on simulera. Dans ce but, nous allons rappeler des

résultats généraux sur les processus ponctuels, et présenter deux types de processus qui vont servir cette mise à l'épreuve.

Les aspects théoriques sur les processus ponctuels sont inspirés du livre de Brémaud [1]. On se placera dans le cadre des processus non explosifs.

III.1 Processus ponctuels simples

Définition III.1. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $N = \{T_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ un processus ponctuel simple sur \mathbb{R}_+ (Définition II.2).

On définit $N_t = N([0, t])$ le processus de comptage associé à N et on associe la mesure de comptage $N(dt)$. Les trois notions seront parfois confondues.

Pour $t \in \mathbb{R}_+$, on note \mathcal{F}_t^N la tribu générée par les $N(C)$, pour tout $C \in \mathcal{B}([0, t])$. La filtration $(\mathcal{F}_t^N)_{t \geq 0}$ est appelée filtration (ou histoire) minimale de N . On dit que la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est adaptée pour N si $\forall t \geq 0, \mathcal{F}_t^N \subset \mathcal{F}_t$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et processus stochastique $(X_s)_{s \geq 0}$, $S_t X^+$ désignera la restriction de X après t , i.e. $S_t X^+$ est un processus stochastique sur \mathbb{R}_+ et $\forall s \geq 0, (S_t X^+)_s = X_{t+s}$.

La notion de filtration est intimement liée à celle de processus stochastique. En particulier, on peut étendre la notion de processus de Poisson à celle de processus de Poisson par rapport à une filtration.

Définition III.2. Soit (\mathcal{F}_t) une filtration. Soit N un processus de Poisson d'intensité $\lambda(t)$. Si $\forall t \geq 0, \mathcal{F}_t^N \subset \mathcal{F}_t$ (i.e. N est (\mathcal{F}_t) -adapté) et que

$$\forall 0 \leq s < t, N([s, t]) \perp \mathcal{F}_s$$

alors N est qualifié de (\mathcal{F}_t) -processus de Poisson d'intensité $\lambda(t)$.

Dans la suite, on va définir la notion d'intensité d'un processus ponctuel. On a tout d'abord besoin de définir la notion de processus progressif.

Définition III.3. Un processus X_t est dit (\mathcal{F}_t) -progressif si $\forall t \geq 0, X : (s, \omega) \in [0, t] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ -mesurable.

Dans ce cas, X_t est clairement adapté et mesurable pour la tribu produit $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$.

La notion d'intensité est étroitement liée aux processus prévisibles.

Définition III.4. Soit $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ une filtration sur Ω . On définit la tribu prévisible $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$ comme la tribu engendrée par les $(s, \infty) \times A$ pour $s < \infty$ et $A \in \mathcal{F}_s$. Alors, un processus $X_t(\omega)$ est dit (\mathcal{F}_t) -prévisible si en tant que fonction de $(t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, il est mesurable par rapport à la tribu prévisible, ou de manière équivalente, que $\forall t \geq 0, X_t$ est \mathcal{F}_{t-} -mesurable.

Remarque. Si X_t est (\mathcal{F}_t) -prévisible alors X_t est (\mathcal{F}_t) -progressif.

On donne ensuite la définition d'une intensité stochastique, un processus aléatoire qui caractérise notre processus ponctuel.

Définition III.5. Intensité Stochastique

Soit N_t un processus de comptage adapté par rapport à une filtration (\mathcal{F}_t) . Soit λ_t un processus positif (\mathcal{F}_t) -progressif tel que $\forall t \geq 0,$

$$\int_0^t \lambda_s ds < \infty \quad p.s. \quad (4)$$

Si pour tout processus positif et (\mathcal{F}_t) -prévisible $C_t,$

$$\mathbb{E} \left[\int_0^\infty C_s N(ds) \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^\infty C_s \lambda_s ds \right]$$

alors on dit que N_t admet la (\mathcal{F}_t) -intensité λ_t .

Remarque. La notion d'intensité stochastique étend celle d'intensité pour les processus de Poisson. En effet, si N est un processus de Poisson d'intensité $\lambda(t)$ par rapport à (\mathcal{F}_t) alors N admet la (\mathcal{F}_t) -intensité $\lambda(t)$. Inversement, si N est un processus ponctuel admettant la (\mathcal{F}_t) -intensité déterministe $\lambda(t)$, alors N est un processus de Poisson de (\mathcal{F}_t) -intensité $\lambda(t)$ (voir [1]).

Par souci de clarté, on utilisera une notation différente pour une fonction du temps déterministe et pour un processus stochastique. Par exemple, l'intensité d'un processus de Poisson (toujours déterministe) sera notée $\lambda(t)$ tandis qu'une intensité stochastique d'un processus quelconque sera notée λ_t .

Proposition III.1. *Soit N_t un processus de comptage de (\mathcal{F}_t) -intensité λ_t (en particulier, λ_t vérifie (4)). Alors le processus ponctuel associé N est non explosif.*

Démonstration. Soit $S_n = \inf \left\{ t \mid \int_0^t \lambda_s ds \geq n \right\}$. Cela définit des temps d'arrêts par rapport à (\mathcal{F}_t) et par (4), on a $S_n \nearrow +\infty$ p.s. Comme λ_t est une intensité pour N , en appliquant la définition à $C_s = \mathbf{1}_{s \leq S_n}$, on obtient

$$\mathbb{E} [N_{S_n}] = \mathbb{E} \left[\int_0^{S_n} \lambda_s ds \right] \leq n < \infty.$$

Donc, $N_{S_n} < \infty$ p.s., ce qui implique la non-explosion car $S_n \nearrow +\infty$ p.s. \square

La condition de progressivité est utilisée pour obtenir de la régularité sur $\int_0^t \lambda_s ds$. En effet, cela implique que $\int_0^t \lambda_s ds$ est \mathcal{F}_t -mesurable, et cette condition est requise dans le résultat suivant : $N_t - \int_0^t \lambda_s ds$ est une (\mathcal{F}_t) -martingale. On pouvait pressentir ce résultat en remarquant que l'intensité est liée à l'espérance du nombre de points (prendre $C_t = \mathbf{1}_{[0,s]}(t)$ pour s fixé). Ce résultat admet une réciproque énoncée dans le théorème suivant.

Théorème III.1. *Caractérisation de l'intensité par martingale*

Soit N_t un processus de comptage non-explosif adapté par rapport à (\mathcal{F}_t) . Supposons que λ_t soit un processus positif (\mathcal{F}_t) -progressif tel que $N_t - \int_0^t \lambda_s ds$ soit une (\mathcal{F}_t) -martingale locale. Alors N_t admet la (\mathcal{F}_t) -intensité λ_t .

Démonstration. Soit $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de temps d'arrêt qui localise $\left(N_t - \int_0^t \lambda_s ds \right)_{t \geq 0}$. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrons que pour tout processus positif et (\mathcal{F}_t) -prévisible C_t ,

$$\mathbb{E} \left[\int_0^{V_n} C_s N(ds) \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^{V_n} C_s \lambda_s ds \right].$$

Comme $\left(N_{t \wedge V_n} - \int_0^{t \wedge V_n} \lambda_s ds \right)_{t \geq 0}$ est une martingale, on a pour $t \geq s \geq 0$

$$\mathbb{E} [N_{t \wedge V_n} - N_{s \wedge V_n} | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E} \left[\int_s^t \lambda_u du \middle| \mathcal{F}_s \right]$$

Ainsi, si on note \mathcal{C}_n l'espace des processus bornés et (\mathcal{F}_t) -prévisible C_t tels que $\mathbb{E} \left[\int_0^{V_n} C_s N(ds) \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^{V_n} C_s \lambda_s ds \right]$, alors \mathcal{C}_n contient les fonctions indicatrices du π -système

$$\Pi = \{(s, t] \times A, 0 \leq s \leq t, A \in \mathcal{F}_s\}.$$

Ce π -système engendre $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$. De plus, \mathcal{C}_n contient les constantes et est stable par limite simple en (t, ω) . On en déduit par le Théorème des classes monotones que \mathcal{C}_n contient tous les processus bornés et (\mathcal{F}_t) -prévisible. Enfin, par convergence monotone, \mathcal{C}_n contient tous les processus positifs et (\mathcal{F}_t) -prévisible.

Soit C_t un processus positif et (\mathcal{F}_t) -prévisible. Comme $V_n \rightarrow \infty$ et que C_t est positif, il reste à appliquer le Théorème de convergence monotone pour en déduire que

$$\mathbb{E} \left[\int_0^\infty C_s N(ds) \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^\infty C_s \lambda_s ds \right]$$

et donc N_t admet la (\mathcal{F}_t) -intensité λ_t . \square

Voici une propriété qui souligne l'importance de la filtration associée à une intensité, et à quelle point cette filtration peut être modifiée sans changer d'intensité.

Proposition III.2.

1. Soit N un processus (non marqué) de (\mathcal{F}_t) -intensité λ_t . Soit (\mathcal{G}_t) une filtration telle que λ_t est (\mathcal{G}_t) -progressif et $\mathcal{F}_t^N \subset \mathcal{G}_t \subset \mathcal{F}_t$. Alors λ_t est l'intensité de N par rapport à (\mathcal{G}_t) .
2. Soit N un processus de (\mathcal{F}_t) -intensité λ_t . Soit (\mathcal{G}_t) une filtration telle que $\forall t \geq 0, \mathcal{F}_t$ est indépendante de \mathcal{G}_∞ . Alors λ_t est aussi l'intensité de N par rapport à $(\mathcal{F}_t \vee \mathcal{G}_t)$.

Démonstration.

1. Soit C_t un processus (\mathcal{G}_t) -prévisible. Comme $\mathcal{G}_t \subset \mathcal{F}_t$, alors C_t est (\mathcal{F}_t) -prévisible, et donc $\mathbb{E} [\int_0^\infty C_s N(ds)] = \mathbb{E} [\int_0^\infty C_s \lambda_s ds]$. D'où le résultat par définition de l'intensité.
2. Il suffit de voir que la propriété de martingale est conservée lorsque l'on conditionne par rapport à $(\mathcal{F}_t \vee \mathcal{G}_\infty)$. En effet, pour m_t une (\mathcal{F}_t) -martingale,

$$\mathbb{E} [m_t | \mathcal{F}_s \vee \mathcal{G}_\infty] = \mathbb{E} [m_t | \mathcal{F}_s]$$

car \mathcal{G}_∞ est indépendant de \mathcal{F}_s et m_t . Et ensuite, on applique le point 1. □

Remarque. Un processus ponctuel n'admet pas une unique intensité, même pour une filtration donnée. Cependant, pour une histoire (\mathcal{F}_t) donnée, on a l'unicité p.s. de l'intensité prévisible et également l'existence d'une version prévisible de l'intensité. Lorsque l'on parlera de "l'intensité" d'un processus ponctuel dans la suite, on parlera de cette représentation prévisible.

La version prévisible de l'intensité possède de nombreuses propriétés remarquables et simples à démontrer.

Par exemple, $\lambda_{T_n} > 0$ p.s. sur $\{T_n < \infty\}$ (où les T_n sont les temps de saut). Pour montrer cela, il suffit d'appliquer la définition III.5 avec $C_t = \mathbf{1}_{\{\lambda_t=0\}} \mathbf{1}_{\{T_{n-1} < t \leq T_n\}}$ qui est prévisible.

III.2 Processus ponctuels marqués

Définition III.6. Soient $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ un processus ponctuel simple sur \mathbb{R}_+ et $\{Z_n\}$ une suite de v.a. à valeurs dans (E, \mathcal{E}) un espace métrique quelconque. On appelle processus ponctuel sur \mathbb{R}_+ marqué dans (E, \mathcal{E}) , le processus $N = \{T_n, Z_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$. On lui associe le processus de comptage défini par

$$N(C) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbf{1}_C(T_n, Z_n)$$

pour tout $C \subset \mathbb{R}_+ \times E$. En particulier, on note $N_t(A) = N([0, t] \times A)$. On associe également la mesure de comptage $N(dt \times dz)$.

Pour $t \in \mathbb{R}_+$, on note \mathcal{F}_t^N la tribu générée par les $N(C)$, pour $C \in \mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{E}$. La filtration $(\mathcal{F}_t^N)_{t \geq 0}$ est appelée histoire minimale de N . On dit que la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est une histoire pour N si $\forall t \geq 0, \mathcal{F}_t^N \subset \mathcal{F}_t$.

Remarque. Les processus non marqués peuvent être vus comme un cas particulier en prenant E un singleton. Il est à noter qu'un processus de Poisson \bar{N} sur \mathbb{R}_+^2 d'intensité 1 ne peut pas être vu comme un processus sur \mathbb{R}_+ marqué dans \mathbb{R}_+ . En effet, pour tout $A \subset \mathbb{R}_+$ borné, $\bar{N}(A \times \mathbb{R}_+) = +\infty$, ce qui est impossible pour un processus marqué.

Définition III.7. Supposons que pour tout $A \in \mathcal{E}$, $N_t(A)$ admet l'intensité $\lambda_t(A)$ prévisible par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Alors on dit que N admet le noyau d'intensité $\lambda_t(dz)$ par rapport à (\mathcal{F}_t) .

Remarque. Dans le cas des processus non marqués, $\lambda_t(dz) = \lambda_t$ est un nombre aléatoire.

La notion de noyau d'intensité est liée aux processus "prévisibles", mais ceux-ci ne sont plus définis sur le même espace $(\mathbb{R}_+ \times \Omega \times E$ au lieu de $\mathbb{R}_+ \times \Omega)$. Pour les processus marqués, il faut considérer la tribu prévisible marquée $\tilde{\mathcal{P}}(\mathcal{F}_t) = \mathcal{P}(\mathcal{F}_t) \otimes \mathcal{E}$.

Définition III.8. Soit $H : (0, \infty) \times \Omega \times E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction $\tilde{\mathcal{P}}(\mathcal{F}_t)$ -mesurable. On dira que H est un processus (\mathcal{F}_t) -prévisible indexé par E .

Remarque. $\tilde{\mathcal{P}}(\mathcal{F}_t)$ est généré par les fonctions H du type $H(t, \omega, z) = C_t(\omega) \mathbf{1}_A(z)$, où C_t est un processus (\mathcal{F}_t) -prévisible et $A \in \mathcal{E}$.

Le théorème suivant donne un analogue à la définition III.5 pour le noyau d'intensité.

Théorème III.2. *Théorème de Projection*

Soit N un processus marqué dans E et de noyau d'intensité $\lambda_t(dz)$. Alors pour tout H processus (\mathcal{F}_t) -prévisible indexé par E ,

$$\mathbb{E} \left[\int_0^\infty \int_E H(s, \omega, z) N^\omega(ds \times dz) \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^\infty \int_E H(s, \omega, z) \lambda_s^\omega(dz) ds \right]$$

Démonstration. L'égalité est réalisée pour les processus H du type $H(t, \omega, z) = C_t(\omega) \mathbf{1}_A(z)$ par définition du noyau d'intensité. Il suffit de conclure en appliquant le théorème des classes monotones comme pour le Théorème III.1. \square

Dans la suite on utilisera ce résultat sous la forme du corollaire suivant

Corollaire III.1. *Théorème d'intégration*

Soit N un processus marqué dans E et de noyau d'intensité $\lambda_t(dz)$. Soit H un processus (\mathcal{F}_t) -prévisible indexé par E tel que $\forall t \geq 0, \int_0^t \int_E |H(s, z)| \lambda_s(dz) ds < \infty$ p.s.

Alors, en posant $M(ds \times dz) = N(ds \times dz) - \lambda_s(dz) ds$,

$$\left(\int_0^t \int_E H(s, z) M(ds \times dz) \right)_{t \geq 0} \text{ est une } (\mathcal{F}_t)\text{-martingale locale.}$$

Démonstration. Premièrement, montrons que $\forall t \geq 0, \int_0^t \int_E H(s, z) M(ds \times dz)$ est bien défini. $\forall n > 0$, on définit les temps d'arrêt

$$S_n = \inf \left\{ t \geq 0 \mid \int_0^t \int_E |H(s, z)| \lambda_s(dz) ds \geq n \right\}$$

et $S_0 = 0$.

On note $H_n(s, z) = H(s, z) \mathbf{1}_{\{s \leq S_n\}}$. C'est un processus (\mathcal{F}_t) -prévisible indexé par E . On peut appliquer le Théorème III.2 à H_n , ce qui nous donne

$$\mathbb{E} \left[\int_0^{S_n} \int_E |H(s, z)| N(ds \times dz) \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^{S_n} \int_E |H(s, z)| \lambda_s^\omega(dz) ds \right] \leq n < \infty$$

On en déduit que $\int_0^{S_n} \int_E |H(s, z)| N(ds \times dz) < \infty$ p.s., et comme $S_n \rightarrow \infty$, on conclut que $\int_0^t \int_E H(s, z) M(ds \times dz)$ est bien défini hors d'un ensemble de mesure nulle.

On note alors

$$m_t = \int_0^t \int_E H(s, z) M(ds \times dz)$$

Montrons que la suite (S_n) est une suite localisante pour m_t .

Soit $t > s \geq 0$. On note $t_n = t \wedge S_n$ et $s_n = s \wedge S_n$. On a

$$m_{t_n} - m_{s_n} = \int_{s_n}^{t_n} \int_E H(u, z) M(du \times dz) = \int_0^\infty \int_E H(u, z) \mathbf{1}_{\{s < u \leq t\}} \mathbf{1}_{\{u \leq S_n\}} M(du \times dz)$$

Soit $A \in \mathcal{F}_s$, on note $H_A(u, \omega, z) = H(u, \omega, z) \mathbf{1}_{\{s < u \leq t\}} \mathbf{1}_{\{u \leq S_n\}} \mathbf{1}_A(\omega)$. Or, $\mathbf{1}_{\{s < u \leq t\}} \mathbf{1}_A(\omega)$ et $\mathbf{1}_{\{u \leq S_n\}}$ sont clairement prévisibles. Donc, on peut appliquer le Théorème III.2 à H_A , ce qui donne

$$\mathbb{E}[(m_{t_n} - m_{s_n}) \mathbf{1}_A(\omega)] = 0.$$

Cette égalité étant vraie pour tout $A \in \mathcal{F}_s$, on en déduit que $\mathbb{E}[m_{t_n} - m_{s_n} | \mathcal{F}_s] = 0$ et que (S_n) est une suite localisante pour m_t . \square

III.3 Processus de Hawkes

Dans cette partie, on définit les deux types de processus dépendants que l'on va utiliser pour évaluer l'erreur de seconde espèce de notre test.

Définition III.9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(N^i)_{i=1\dots n}$ un processus ponctuel n -dimensionnel. On dit que (N^i) est un processus de Hawkes multivarié si il existe $(h_{ij})_{i,j=1\dots n}$ des fonctions (appelées fonctions d'interactions) et $(\mu_i)_{i=1\dots n}$ des constantes positives (intensités spontanées) telles que des intensités λ^j respectives des N^i soient de la forme :

$$\lambda_t^j = \max \left(0, \mu_j + \sum_{i=1}^n \int_0^t h_{ij}(t-s) N^i(ds) \right)$$

Remarque.

- Si toutes les fonctions d'interactions h_{ij} sont positives, alors (N^i) est qualifié de linéaire.
- La stationnarité ou la non-explosion d'un tel processus est conditionné sur les fonctions $(h_{ij})_{i,j=1\dots n}$, mais on ne s'intéressera pas à ces conditions ici. Pour information, il suffit que le rayon spectral de la matrice $(H_{ij})_{i,j=1\dots n}$ soit strictement plus petit que 1, où $H_{ij} = \int_0^\infty |h_{ij}|(s) ds$. (voir [2] par exemple)

Définition III.10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(N^i)_{i=1\dots n}$ un processus ponctuel n -dimensionnel. On dit que (N^i) est un processus de Hawkes bi-dépendant si il existe $(h_{ij})_{i,j=1\dots n}$ (fonctions d'interactions) et $(g_{i,j \rightarrow k})_{i,j,k=1\dots n}$ des fonctions (dites de bi-interactions) et $(\mu_i)_{i=1\dots n}$ des constantes positives telles que des intensités λ^k respectives des N^k soient de la forme :

$$\lambda_t^k = \max \left(0, \mu_k + \sum_{j=1}^n \int_0^t h_{jk}(t-s) N^j(ds) + \sum_{i,j=1}^n \int_0^t g_{i,j \rightarrow k}(t-s, t-u) N^i(ds) N^j(du) \right)$$

Remarque. Je ne connais pas les conditions de stationnarité ou de non-explosion dans le cadre général des processus de Hawkes bi-dépendants, mais ce problème ne se posera pas car l'on se limitera à des processus non auto-excitants pour lesquels les conditions sont plus évidentes.

IV Méthode de Thinning

Deux méthodes sont principalement utilisées pour simuler des processus ponctuels. La première utilise la propriété de CLUSTER (grappes) de certain processus ponctuels, notamment les processus de Hawkes linéaires. On ne s'y intéressera pas ici, car elle trop restrictive et ne permet pas de gérer les processus de Hawkes "bi-dépendants". Nous lui préférons la technique de THINNING (élagage), qui permet de simuler une classe de processus ponctuels beaucoup plus générale.

IV.1 Lemmes de construction par Thinning

Introduite par Lewis et Shedler [6] en 1978 pour les processus de Poisson non homogènes, la technique du thinning est la source des algorithmes de simulation des processus ponctuels les plus généraux possibles. En effet, inspiré par ce travail, Ogata [8] l'a étendu pour des processus ponctuels qui ne vérifient pas l'hypothèse de Poisson, mais uniquement une condition de majoration sur l'intensité. Cette technique admet également des utilisations plus théoriques. On citera par exemple son utilisation dans l'article de Møller et Rasmussen [7] en 2005 pour raffiner la simulation par cluster. Ou également dans des preuves théoriques de convergence, notamment dans l'article de Brémaud et Massoulié [2] en 1996.

Nous noterons qu'une démonstration rigoureuse du Thinning de Ogata est difficile à trouver. La plupart des articles citent [3] (preuve heuristique très courte) ou [8] (preuve plus longue qui n'est pas beaucoup plus rigoureuse) en guise de référence. C'est pour cette raison que nous allons nous attacher à prouver cette technique de simulation en utilisant les résultats préliminaires de la Section III.

Les deux résultats qui suivent peuvent paraître similaires, mais chacun a son utilité. Premièrement, la Proposition IV.1 est conforme au cadre initial du thinning. On se donne un processus ponctuel sur

\mathbb{R}_+ d'intensité dominante que l'on va élaguer. C'est de cette manière que fonctionnera l'algorithme. Deuxièmement, la Proposition IV.2 est plus facilement représentable, notamment via un graphe dans \mathbb{R}_+^2 . De plus, c'est ce second résultat que nous utiliserons dans la preuve effective de l'algorithme de thinning.

Proposition IV.1. *Soit $N^* = \{(T_n, U_n)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ un processus ponctuel sur \mathbb{R}_+ marqué dans $E = [0, 1]$. Soit (\mathcal{F}_t) une histoire pour N^* telle que $\lambda_t^* \mathcal{L}_1$ (où \mathcal{L}_1 désigne la mesure de Lebesgue sur E , et λ_t^* ne dépend pas de z) soit le noyau d'intensité de N^* par rapport à (\mathcal{F}_t) , où $\lambda^* > 0$ est un processus prévisible. Soit λ_t un processus positif, (\mathcal{F}_t) -prévisible et uniformément borné en (t, ω) par λ^* .*

Alors le processus ponctuel N défini par

$$N(C) = \int_C N^* \left(dt \times \left[0, \frac{\lambda_t}{\lambda_t^*} \right] \right)$$

pour tout $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$ admet λ_t pour (\mathcal{F}_t) -intensité.

Remarque. La condition sur le noyau d'intensité de N^* peut paraître obscure. Nous en donnons une condition suffisante dans le corollaire IV.1.

Démonstration. On cherche à utiliser le théorème de caractérisation de l'intensité par martingale. Soit $t \geq 0$, $N_t = \int_0^t N^* \left(du \times \left[0, \frac{\lambda_u}{\lambda_u^*} \right] \right) = \int_0^t \int_0^1 \mathbf{1}_{\left\{ z \leq \frac{\lambda_u}{\lambda_u^*} \right\}} N^* (du \times dz)$.

Comme λ et λ^* sont prévisibles et $\lambda^* > 0$, on en déduit que $\frac{\lambda}{\lambda^*}$ est prévisible. Ainsi, pour $z \in [0, 1]$ fixé, $\left\{ (u, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \text{ tq } z \leq \frac{\lambda_u(\omega)}{\lambda_u^*(\omega)} \right\} \in \mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$. Notons

$$\Gamma = \left\{ (u, \omega, z) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \times E \text{ tq } z \leq \frac{\lambda_u(\omega)}{\lambda_u^*(\omega)} \right\}.$$

On a

$$\Gamma = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]} \left\{ (u, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \text{ tq } q \leq \frac{\lambda_u(\omega)}{\lambda_u^*(\omega)} \right\} \times \left[0, q + \frac{1}{n} \right] \in \tilde{\mathcal{P}}(\mathcal{F}_t)$$

Donc, $\mathbf{1}_{\left\{ z \leq \frac{\lambda_u}{\lambda_u^*} \right\}}$ est $\tilde{\mathcal{P}}(\mathcal{F}_t)$ mesurable. On peut appliquer le corollaire III.1. Ainsi,

$$\left(\int_0^t \int_0^1 \mathbf{1}_{\left\{ z \leq \frac{\lambda_u}{\lambda_u^*} \right\}} M^* (du \times dz) \right)_{t \geq 0} \text{ est une } (\mathcal{F}_t)\text{-martingale locale}$$

où $M^*(du \times dz) = N^*(du \times dz) - \lambda_u^* dz du$.

Or, $\int_0^t \int_0^1 \mathbf{1}_{\left\{ z \leq \frac{\lambda_u}{\lambda_u^*} \right\}} N^* (du \times dz) = N_t$ et $\int_0^t \int_0^1 \mathbf{1}_{\left\{ z \leq \frac{\lambda_u}{\lambda_u^*} \right\}} \lambda_u^* dz du = \int_0^t \lambda_u du$. Donc $(N_t - \int_0^t \lambda_u du)_{t \geq 0}$ est une (\mathcal{F}_t) -martingale locale, et par le Théorème III.1, N_t admet la (\mathcal{F}_t) -intensité λ_t . \square

Remarque. L'intensité peut sembler dépendre de la variable $z \in E$. Mais en fait, λ_t ne dépend que des marques des points de N^* avant t . Et cette information est contenue dans la tribu $\mathcal{F}_t \supset \mathcal{F}_t^{N^*}$. Or, comme on suppose λ_t mesurable par rapport à \mathcal{F}_t , la pseudo-dépendance en z est cachée dans la dépendance en $\omega \in \Omega$.

Si, à posteriori, λ_t s'avère être (\mathcal{F}_t^N) -mesurable, alors le résultat de diminution de filtration III.2 permet de dire que N_t admet la (\mathcal{F}_t^N) -intensité λ_t . Plus généralement, selon les particularités de l'intensité, on peut étendre (en terme de filtration) les résultats précédent grâce à la Proposition III.2.

Le corollaire qui suit présente une condition suffisante pour avoir l'hypothèse requise pour le noyau d'intensité de N^* . De plus, on précisera que ce corollaire est l'énoncé du Lemme 2 de [2], qui m'a inspiré pour la mise en place de la Proposition IV.1.

Corollaire IV.1. *Soit $N^* = \{(T_n, U_n)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ un processus ponctuel marqué tel que $\{T_n\}$ soit un processus de Poisson d'intensité (déterministe) $\lambda^*(t) > 0$ et $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.i.id de loi uniforme sur*

$[0, 1]$, indépendantes de $\{T_n\}$. Soit (\mathcal{F}_t) une histoire de N^* telle que \mathcal{F}_s et $S_t N^{*+}$ sont indépendants pour tout $s \leq t$. Soit λ_t un processus positif, (\mathcal{F}_t) -prévisible et uniformément borné en (t, ω) par λ^* .

Alors le processus ponctuel N défini par

$$N(C) = \int_C N^* \left(dt \times \left[0, \frac{\lambda_t}{\lambda^*(t)} \right] \right)$$

pour tout $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$ admet λ_t pour (\mathcal{F}_t) -intensité.

Démonstration. La preuve repose sur le fait que la condition d'indépendance entre la filtration et N^* implique que $\lambda_t^*(dz) = \lambda^*(t) dz$ est le noyau d'intensité de N^* par rapport à (\mathcal{F}_t) . En effet, on a

$$\mathbb{E}[N^*((s, t] \times [a, b]) | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[N^*((s, t] \times [a, b])] = \int_s^t \int_a^b \lambda^*(u) du dz$$

Ensuite, il suffit d'appliquer la Proposition IV.1. □

Remarque. Ce corollaire permet de grossir la filtration à priori. Par exemple, supposons que l'on ait besoin de l'information d'un processus auxiliaire indépendant de N^* pour construire le processus λ_t . On peut ajouter cette information à la filtration avant d'appliquer le corollaire. Cette augmentation n'est pas possible à posteriori compte tenu du fait que sans le processus auxiliaire, on ne peut pas construire le processus λ_t .

Pour énoncer la variante, il faut d'abord une définition préliminaire.

Définition IV.1. Soit (\mathcal{F}_t) une filtration. Soit \bar{N} un processus de Poisson sur \mathbb{R}_+^2 d'intensité $\lambda(t_1, t_2)$. Si $\forall t \geq 0, \mathcal{F}_t^{\bar{N}} \subset \mathcal{F}_t$ (où $\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ est la tribu générée par les $\bar{N}(C)$, pour $C \in \mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$) et que

$$\forall 0 \leq s < t, \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \quad N([s, t] \times A) \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_s$$

alors \bar{N} est qualifié de (\mathcal{F}_t) -processus de Poisson d'intensité $\lambda(t_1, t_2)$.

La proposition suivante est une variante de la Proposition IV.1 où l'on "élague" un processus de Poisson homogène d'intensité 1 sur \mathbb{R}_+^2 . On l'utilisera de préférence dans la suite, car elle permet des élagages successifs.

Proposition IV.2. Soit \bar{N} un (\mathcal{F}_t) -processus de Poisson d'intensité 1 sur \mathbb{R}_+^2 . Soit λ_t un processus positif et (\mathcal{F}_t) -prévisible qui vérifie la condition de non-explosion (4).

Alors le processus ponctuel N défini par

$$N(C) = \int_{C \times \mathbb{R}_+} \mathbf{1}_{z \in [0, \lambda_t]} \bar{N}(dt \times dz)$$

pour tout $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ admet λ_t pour (\mathcal{F}_t) -intensité.

Démonstration. On cherche à utiliser le théorème de caractérisation de l'intensité par martingale. On ne peut pas considérer que \bar{N} est un processus ponctuel sur \mathbb{R}_+ marqué dans \mathbb{R}_+ . Cependant, pour $k \in \mathbb{N}$, si on définit $\bar{N}^{(k)}$ ¹ par

$$\bar{N}^{(k)}(C) = \int_C \bar{N}(dt \times dz)$$

pour tout $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+ \times [0, k])$, alors $\bar{N}^{(k)}$ peut être vu comme un processus ponctuel sur \mathbb{R}_+ marqué dans $[0, k]$ et de noyau d'intensité $1.dz$ par rapport à (\mathcal{F}_t) .

De même, on définit $N^{(k)}$ par

$$N^{(k)}(C) = \int_{C \times \mathbb{R}_+} \mathbf{1}_{z \in [0, \lambda_t]} \bar{N}^{(k)}(dt \times dz)$$

pour tout $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$.

1. C'est la restriction de \bar{N} aux points dont la deuxième coordonnée est plus petite que k .

Soit $k \in \mathbb{N}$, on note $E_k = [0, k]$ l'espace des marques, $\mathcal{E}_k = \mathcal{B}([0, k])$ et $\tilde{\mathcal{P}}_k(\mathcal{F}_t) = \mathcal{P}(\mathcal{F}_t) \otimes \mathcal{E}_k$ la tribu prévisible marquée associée. Montrons que $\mathbf{1}_{z \in [0, \lambda_u] \cap E_k}$ est $\tilde{\mathcal{P}}_k(\mathcal{F}_t)$ -mesurable.

Soit $z \in E$ fixé, $\{(u, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \text{ tq } \lambda_u(\omega) \geq z\} \in \mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$ car λ est prévisible. Notons $\Gamma_k = \{(u, \omega, z) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \times E_k \text{ tq } \lambda_u(\omega) \geq z\}$. On a

$$\Gamma_k = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{q \in \mathbb{Q}_+} \{(u, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \text{ tq } \lambda_u(\omega) \geq q\} \times \left(\left[0, q + \frac{1}{n}\right] \cap E_k \right) \in \tilde{\mathcal{P}}_k(\mathcal{F}_t)$$

Donc, $\mathbf{1}_{z \in [0, \lambda_u]}$ est $\tilde{\mathcal{P}}_k(\mathcal{F}_t)$ -mesurable. On peut appliquer le corollaire III.1. Ainsi,

$$\left(\int_0^t \int_E \mathbf{1}_{z \in [0, \lambda_u]} \bar{M}^{(k)}(du \times dz) \right)_{t \geq 0} \text{ est une } (\mathcal{F}_t)\text{-martingale locale}$$

où $\bar{M}^{(k)}(du \times dz) = \bar{N}^{(k)}(du \times dz) - \mathbf{1}_{z \in E_k} dz du$.

Or ,

$$\int_0^t \int_{E_k} \mathbf{1}_{z \in [0, \lambda_u]} \bar{N}^{(k)}(du \times dz) = N_t^{(k)}$$

et

$$\int_0^t \int_{E_k} \mathbf{1}_{z \in [0, \lambda_u]} dz du = \int_0^t \min(\lambda_u, k) du.$$

$N_t^{(k)}$ et $\int_0^t \min(\lambda_u, k) du$ convergent en croissant vers, respectivement, N_t et $\int_0^t \lambda_u du$, qui sont des quantités finies p.s. par non explosivité (Proposition III.1). On en déduit par convergence monotone dans l'espérance conditionnelle que $(N_t - \int_0^t \lambda_u du)_{t \geq 0}$ est une (\mathcal{F}_t) -martingale locale, et par le Théorème III.1, N_t admet la (\mathcal{F}_t) -intensité λ_t . \square

Le résultat qui suit ne sera pas explicitement utilisé dans ce travail. On le présente ici pour son intérêt théorique. En effet, cela montre que tout processus ponctuel possédant une intensité peut être construit par l'intermédiaire de la Proposition IV.2.

La construction est en fait simple et s'effectue de la manière suivante :

Dans la bande d'ordonnées $[0, \lambda_t]$ on fait remonter les points T_n du processus N (sur \mathbb{R}_+) avec une ordonnée uniforme dans $[0, \lambda_{T_n}]$. Hors de cette bande, on complète par un processus de Poisson indépendant et d'intensité 1 sur \mathbb{R}_+^2 .

Proposition IV.3. Théorème d'inversion

Soit $N = \{T_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ un processus ponctuel non explosif sur \mathbb{R}_+ d'intensité λ_t par rapport à la filtration (\mathcal{F}_t) tel que λ_t soit prévisible. Soit $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. i.i.d, uniformes sur $[0, 1]$ et indépendante de \mathcal{F}_∞ . On note $\mathcal{G}_t = \sigma(U_n, \text{ pour } n \text{ tq } T_n \leq t)$. Soit \hat{N} un processus de Poisson homogène sur \mathbb{R}_+^2 d'intensité 1, indépendant de $\mathcal{F}_\infty \vee \mathcal{G}_\infty$. On définit le processus ponctuel \bar{N} sur \mathbb{R}_+^2 par

$$\bar{N}((a, b] \times A) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbf{1}_{(a, b]}(T_n) \mathbf{1}_A(\lambda_{T_n} U_n) + \int_{(a, b]} \int_{A - [0, \lambda_t]} \hat{N}(dt \times dz)$$

pour $0 \leq a < b$ et $A \subset \mathbb{R}_+$.

Alors \bar{N} est un processus de Poisson homogène d'intensité 1 sur \mathbb{R}_+^2 par rapport à la filtration $(\mathcal{H}_t) = (\mathcal{F}_t \vee \mathcal{G}_t \vee \mathcal{F}_t^{\hat{N}})$

Démonstration. D'après la Proposition III.2, par indépendance entre \mathcal{F}_∞ et $\mathcal{G}_\infty \vee \mathcal{F}_\infty^{\hat{N}}$, l'intensité de N par rapport à la filtration (\mathcal{H}_t) est λ_t . De même, par indépendance entre $\mathcal{F}_\infty^{\hat{N}}$ et $\mathcal{F}_\infty \vee \mathcal{G}_\infty$, \hat{N} est un processus de Poisson homogène sur \mathbb{R}_+^2 d'intensité 1 par rapport à (\mathcal{H}_t) .

Montrons que pour tout $k \in \mathbb{N}$, si on définit $\bar{N}^{(k)}$ par

$$\bar{N}^{(k)}(C) = \int_C \bar{N}(dt \times dz)$$

pour tout $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+ \times [0, k])$, alors $\bar{N}^{(k)}$ est un processus ponctuel sur \mathbb{R}_+ marqué dans $E_k = [0, k]$ et de noyau d'intensité $1.dz$ par rapport à (\mathcal{H}_t) .

Pour cela, il suffit de montrer que pour tout $A_k \in \mathcal{E}_k$, $\bar{N}_t^{(k)}(A_k)$ admet l'intensité $\mathcal{L}_1(A_k)$ par rapport à (\mathcal{H}_t) , où \mathcal{L}_1 est la mesure de Lebesgue uni-dimensionnelle. Soit $k \in \mathbb{N}$, on note $\hat{N}^{(k)}$ la restriction de \hat{N} aux points dont la deuxième coordonnée est plus petite que k . On a

$$\bar{N}_t^{(k)}(A_k) = \int_0^t \int_{A_k} \bar{N}^{(k)}(du \times dz) = \int_0^t \int_0^1 \mathbf{1}_{A_k}(\lambda_u y) dy N(du) + \int_0^t \int_E \mathbf{1}_{A_k - [0, \lambda_u]}(z) \hat{N}^{(k)}(du \times dz).$$

Il reste à vérifier les conditions de prévisibilité. Premièrement, à $y \in [0, 1]$ fixé, comme λ_t est (\mathcal{F}_t) -prévisible et donc (\mathcal{H}_t) -prévisible, on voit que $\mathbf{1}_{A_k}(\lambda_u y)$ est (\mathcal{H}_t) -prévisible. Deuxièmement, comme λ est prévisible, pour $z \in E_k$ fixé, $\{(u, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \text{ tq } z \leq \lambda_u(\omega)\} \in \mathcal{P}(\mathcal{H}_t)$. Notons

$$\Gamma = \{(u, \omega, z) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \times E_k \text{ tq } z \in A_k - [0, \lambda_u(\omega)]\}.$$

On a

$$\Gamma = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{q \in \mathbb{Q}_+} \{(u, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \text{ tq } q \leq \lambda_u(\omega)\} \times \left(A \cap \left[q + \frac{1}{n}, k \right] \right) \in \tilde{\mathcal{P}}_k(\mathcal{H}_t)$$

En notant $M(du) = N(du) - \lambda_u du$ et $\hat{M}^{(k)}(du \times dz) = \hat{N}^{(k)}(du \times dz) - dudz$, puis en appliquant respectivement le théorème d'intégration des processus non marqués et celui des processus marqués, on en déduit que

$$M_t(A_k) = \int_0^t \int_0^1 \mathbf{1}_{A_k}(\lambda_u y) dy M(du)$$

et

$$\hat{M}_t^{(k)}(A_k) = \int_0^t \int_{E_k} \mathbf{1}_{A_k - [0, \lambda_u]}(z) \hat{M}^{(k)}(du \times dz)$$

sont des (\mathcal{H}_t) -martingales.

Reste à remarquer que le fait que $\bar{M}_t^{(k)}(A_k) = M_t(A_k) + \hat{M}_t^{(k)}(A_k)$ soit une (\mathcal{H}_t) -martingale va nous donner le résultat. En effet,

$$\bar{M}_t^{(k)}(A_k) = \bar{N}_t^{(k)}(A_k) - \left(\int_0^t \int_0^1 \mathbf{1}_{A_k}(\lambda_u y) \lambda_u dy du + \int_0^t \int_{E_k} \mathbf{1}_{A_k - [0, \lambda_u]}(z) dz du \right)$$

Or, à $u \in [0, t]$ fixé, par changement de variable $z = \lambda_u y$,

$$\int_0^t \int_0^1 \mathbf{1}_{A_k}(\lambda_u y) \lambda_u dy du = \int_0^t \int_{E_k} \mathbf{1}_{A_k \cap [0, \lambda_u]}(z) dz du$$

Et donc,

$$\int_0^t \int_0^1 \mathbf{1}_{A_k}(\lambda_u y) \lambda_u dy du + \int_0^t \int_{E_k} \mathbf{1}_{A_k - [0, \lambda_u]}(z) dz du = \int_0^t \int_{E_k} \mathbf{1}_{A_k}(z) dudz$$

Finalement, $\bar{M}_t^{(k)}(A_k) = \bar{N}_t^{(k)}(A_k) - \int_0^t \mathcal{L}_1(A_k) du$ est une (\mathcal{H}_t) -martingale. Par le Théorème III.1, $\bar{N}_t^{(k)}(A_k)$ admet l'intensité $\mathcal{L}_1(A_k)$ par rapport à (\mathcal{H}_t) et par définition du noyau d'intensité, $\bar{N}^{(k)}$ est un processus ponctuel sur \mathbb{R}_+ marqué dans $[0, k]$ et de noyau d'intensité $1.dz$ par rapport à (\mathcal{H}_t) , i.e. $\bar{N}^{(k)}$ est un (\mathcal{H}_t) -processus de Poisson sur $\mathbb{R}_+ \times [0, k]$ d'intensité 1.

Il reste maintenant à montrer que \bar{N} est un (\mathcal{H}_t) -processus de Poisson sur \mathbb{R}_+^2 d'intensité 1.

Les points 1 et 3 de la définition d'un processus de Poisson sont clairement vérifiés par \bar{N} . De plus, on a clairement $\mathcal{F}_t^{\bar{N}} \subset \mathcal{H}_t$ pour tout $t \geq 0$. Il reste donc seulement à démontrer que

$$\forall 0 \leq s < t, \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \quad N([s, t] \times A) \perp\!\!\!\perp \mathcal{H}_s \quad (5)$$

Soient $0 \leq a < b$, on note $k_b = [b] + 1$. On a alors $N([s, t] \times [a, b]) = N^{(k_b)}([s, t] \times [a, b])$, or $\bar{N}^{(k_b)}$ est un (\mathcal{H}_t) -processus de Poisson sur $\mathbb{R}_+ \times [0, k_b]$, ce qui implique

$$N^{(k_b)}([s, t] \times [a, b]) \perp\!\!\!\perp \mathcal{H}_s.$$

Pour conclure, il suffit de voir que $\{[a, b], 0 \leq a < b\}$ génère $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ et on en déduit (5). \square

IV.2 Algorithme de Thinning

Proposition IV.4. Algorithme de Thinning

On souhaite simuler un processus ponctuel N d'intensité prévisible λ_t .

Soit $k > 0$. Supposons que pour tout $t > 0$ on ait, sachant $\{N(t, +\infty) = 0\}$, un majorant de λ sachant \mathcal{F}_t noté $M(t) < +\infty$.

1. Poser $i = n = 0$. Poser $t_0 = s_0 = 0$.
2. Si $n = k$, stop. Sinon, poser $i = i + 1$.
3. Poser $\Lambda_i^* = M(s_{i-1})$, générer² \mathcal{E}_i et poser $\epsilon_i = -\log(\mathcal{E}_i)/\Lambda_i^*$.
4. Poser $s_i = s_{i-1} + \epsilon_i$.
5. Générer U_i . Si $U_i \leq \lambda_{s_i}/\Lambda_i^*$, poser $n = n + 1$ et $t_n = s_i$. Aller à l'étape 2.

Alors les temps t_1, \dots, t_k forment une réalisation des k premiers points d'un processus ponctuel d'intensité λ .

Remarque. On peut également arrêter l'algorithme à un temps T fixé. Mais, pour que l'algorithme termine, on a besoin de condition de non-explosion telle que $\int_0^T \lambda_t dt < \infty$ p.s.

Démonstration. Pour démontrer la proposition précédente, il suffit d'itérer le lemme suivant.

Lemme IV.1. Soit N un processus ponctuel de (\mathcal{F}_t) -intensité prévisible λ_t majorée par M sous la condition $\{N(t, +\infty) = 0\}$. Soit $N^* = \{(T_n, U_n)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ un processus ponctuel marqué (\mathcal{F}_t) -adapté tel que $\{T_n\}$ soit un processus ponctuel d'intensité M et $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. i.i.d de loi uniforme sur $[0, 1]$, indépendantes de $\{T_n\}$.

Alors, la loi du premier point de N est la loi de T_S où $S = \inf \left\{ n \in \mathbb{N}^* \mid U_n \leq \frac{\lambda_{T_n}}{M} \right\}$.

Démonstration. Nous allons appliquer la Proposition IV.2. Notons \bar{N} un (\mathcal{F}_t) -processus de Poisson d'intensité 1 sur \mathbb{R}_+^2 . On note N_M le processus tronqué en ordonnée à M défini par

$$N_M(A \times B) = \int_{A \times B_M} \mathbf{1}_{z \in [0, M]} \bar{N}(dt \times dz)$$

pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$, $B \in \mathcal{B}([0, 1])$ et où $B_M = M \cdot B$. Alors, en appliquant la Proposition IV.2, on obtient que N_M est de même loi que N^* . Et donc,

$$T = \inf \left\{ t \in \mathbb{R}_+ \mid (t, z) \in \bar{N} \text{ et } z \leq \lambda_t \right\} = \inf \left\{ t \in \mathbb{R}_+ \mid (t, z) \in N_M \text{ et } z \leq \frac{\lambda_t}{M} \right\}$$

est de même loi que T_S . Or, d'après la Proposition IV.2 le premier point d'un processus ponctuel d'intensité λ_t est de même loi que T . \square

Reste à voir comment fonctionne l'itération.

On note σ la réalisation du processus ponctuel de (\mathcal{F}_t) -intensité λ_t . Par le lemme, on a construit T_1 le premier point de σ . On va construire le deuxième point, et conclure par récurrence.

On note $\sigma^1 = S_{T_1} \sigma^+$ la restriction de σ après T_1 , $\mathcal{F}_t^1 = \mathcal{F}_{t+T_1}$ et $\lambda_t^1 = \lambda_{t+T_1}$ pour tout $t \geq 0$. Alors S^1 est la réalisation d'un processus ponctuel de (\mathcal{F}_t^1) -intensité λ_t^1 . En appliquant le lemme à S^1 , on peut construire T_2 le premier point de S^1 qui est donc le deuxième point de S . \square

Remarque. Grâce à l'algorithme IV.4, dans lequel on construit pas à pas l'intensité majorante, on peut simuler des processus de Hawkes. Cela nous donne un exemple concret de processus pour lequel la remarque qui suit la Proposition IV.1 s'applique. En effet, l'intensité que l'on utilise pour simuler un processus de Hawkes ne dépend que des points de celui-ci.

2. Quand l'on dit "générer", cela signifie générer un nombre uniforme sur $[0, 1]$.

IV.3 Extension aux processus ponctuels multi-dimensionnels

A ce point, l'algorithme de thinning permet de simuler un processus ponctuel uni-dimensionnel. Pour étendre ce résultat aux processus multi-dimensionnels, il suffit du résultat suivant.

Théorème IV.1. *Soit $M = \{(T_n, Z_n)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ un processus ponctuel m -dimensionnel (i.e. l'ensemble des marques est $E = \{1, \dots, m\}$). Pour, $1 \leq i \leq m$, on note $N^i = \{t \mid (t, z) \in M \text{ et } z = i\}$. Soit (\mathcal{F}_t) une filtration de la forme*

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_0 \vee \left(\bigvee_{i=1}^m \mathcal{F}_t^{N^i} \right),$$

où $(\mathcal{F}_t^{N^i})$ est l'histoire minimale de N^i , et supposons que pour tout i, λ_t^i est la (\mathcal{F}_t) -intensité prévisible de N^i . Alors, $\forall n \geq 1$

$$\frac{\lambda_{T_n}^i}{\lambda_{T_n}} = \mathbb{P}(Z_n = i \mid \mathcal{F}_{T_n-}) \quad \text{sous } \{T_n < \infty\} \quad (6)$$

où λ_t est la (\mathcal{F}_t) -intensité de $N = \{T_n\}_n$ (le processus non marqué induit), i.e. $\lambda_t = \sum_{i=1}^m \lambda_t^i$.

Démonstration. La preuve se trouve dans [1], Chapitre 2 T15. □

Remarque. La condition sur la filtration n'est pas aussi restrictive qu'il n'y paraît. Si on souhaite ajouter l'information donnée par une filtration indépendante, le terme de gauche dans l'égalité (6) est inchangé (par le résultat d'augmentation de filtration) et celui de droite non plus par indépendance.

On peut maintenant étendre l'Algorithme IV.4 aux processus multi-dimensionnels. Il suffit d'appliquer l'algorithme précédent au processus non marqué induit, en modifiant la procédure lors de l'ajout d'un point. Avant d'ajouter un point, il faut choisir à quelle marque il correspond, et ce choix se fait avec probabilité $\lambda_{T_n}^i / \lambda_{T_n}$ pour chaque marque i .

Proposition IV.5. *Algorithme de Thinning multi-dimensionnel*

On souhaite simuler un processus ponctuel $M = \{(T_n, Z_n)\}_{n \in \mathbb{N}^}$ défini comme dans le Théorème IV.1.*

Soit $k > 0$. Supposons que pour tout $t > 0$ on ait, sachant $\{M((t, +\infty] \times \{1, \dots, m\}) = 0\}$, un majorant de λ_t sachant \mathcal{F}_t noté $K(t) < +\infty$.

1. Poser $i = n = 0$. Poser $t_0 = z_0 = s_0 = 0$.
2. Si $n = k$, stop. Sinon, poser $i = i + 1$.
3. Poser $\Lambda_i^* = M(s_{i-1})$, générer \mathcal{E}_i et poser $\epsilon_i = -\log(\mathcal{E}_i) / \Lambda_i^*$.
4. Poser $s_i = s_{i-1} + \epsilon_i$.
5. Générer U_i . Si $U_i \leq \lambda_{s_i} / \Lambda_i^*$, poser $n = n + 1$, $t_n = s_i$ et

$$z_n = \inf \left\{ z \mid \frac{\sum_{j=1}^z \lambda_{t_n}^j}{\Lambda_i^*} \geq U_i \right\} \in \{1, \dots, m\}.$$

Aller à l'étape 2.

Alors les temps t_1, \dots, t_k forment une réalisation des k premiers points d'un processus ponctuel m -dimensionnel d'intensités respectives λ_t^i pour $i = 1, \dots, m$.

Remarque. Comme pour le cas unidimensionnel, on peut arrêter l'algorithme à un temps T fixé. Mais, pour que l'algorithme termine, on a besoin de condition de non-explosion telle que $\int_0^T \lambda_t dt < \infty$ p.s.

Démonstration. Pour démontrer la proposition précédente, il suffit d'itérer le lemme suivant.

Lemme IV.2. Soit M un processus ponctuel défini comme dans le Théorème IV.1 avec (\mathcal{F}_t) sa filtration globale tel que $\lambda_t = \sum_{i=1}^m \lambda_t^i$ est majoré par K sous la condition $\{M((t, +\infty] \times \{1, \dots, m\}) = 0\}$. Soit $N^* = \{(T_n, U_n)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ un processus ponctuel marqué (\mathcal{F}_t) -adapté tel que $\{T_n\}$ soit un processus ponctuel d'intensité K et $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. i.i.d de loi uniforme sur $[0, 1]$, indépendantes de $\{T_n\}$.

Alors, la loi du premier point de M est la loi de (T_S, Z) où $S = \inf \left\{ n \in \mathbb{N}^* \mid U_n \leq \frac{\lambda_{T_n}}{M} \right\}$ et

$$Z = \inf \left\{ z \mid \frac{\sum_{j=1}^z \lambda_{T_S}^j}{M} \geq U_S \right\}$$

Démonstration. Nous allons appliquer la Proposition IV.2. Notons \bar{N} un (\mathcal{F}_t) -processus de Poisson d'intensité 1 sur \mathbb{R}_+^2 . On note N_K le processus tronqué en ordonnée à K défini par

$$N_K(A \times B) = \int_{A \times B_K} \mathbf{1}_{z \in [0, K]} \bar{N}(dt \times dz)$$

pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$, $B \in \mathcal{B}([0, 1])$ et où $B_K = K \cdot B$. Alors, en appliquant la Proposition IV.2, on obtient que N_K est de même loi que N^* . Et donc,

$$T = \inf \left\{ t \in \mathbb{R}_+ \mid (t, z) \in \bar{N} \text{ et } z \leq \lambda_t \right\} = \inf \left\{ t \in \mathbb{R}_+ \mid (t, z) \in N_K \text{ et } z \leq \frac{\lambda_t}{K} \right\}$$

est de même loi que T_S . Or, d'après la Proposition IV.2 le premier point P du processus non marqué induit par M (qui est d'intensité λ_t) est de même loi que T .

Le Théorème IV.1 nous donne la loi de la marque associée au premier point P sachant la loi de P . On remarque que c'est exactement la loi de Z car U_S est uniforme sur $\left[0, \frac{\lambda_{T_S}}{M}\right]$. \square

Reste à voir comment fonctionne l'itération.

On note σ la réalisation du processus ponctuel marqué d'intensités et filtrations respectives λ_t^i et (\mathcal{F}_t^i) pour $i = 1, \dots, m$. Par le lemme, on a construit (T_1, Z_1) le premier point de σ . On va construire le deuxième point, et conclure par récurrence.

On note $\sigma^1 = S_{T_1} \sigma^+$, $\mathcal{F}_t^{i,1} = \mathcal{F}_{t+T_1}^i$ et $\lambda_t^{i,1} = \lambda_{t+T_1}^i$ pour tout $t \geq 0$. Alors σ^1 est la réalisation d'un processus ponctuel marqué d'intensités et filtrations respectives $\lambda_t^{i,1}$ et $(\mathcal{F}_t^{i,1})$ pour $i = 1, \dots, m$. En appliquant le lemme à σ^1 , on peut construire (T_2, Z_2) le premier point de σ^1 qui est donc le deuxième point de σ . \square

V Simulations

Dans toutes les simulations qui suivent, le test établi dans la Section II est utilisé de manière bilatère avec $\alpha = 0.05$. Donc la zone de rejet est $] -\infty, -1.96] \cup [1.96, +\infty[$.

De plus, tout ce qui suit a été réalisé grâce au logiciel R.

V.1 Vérification du niveau et de la convergence en loi

Tout d'abord, nous allons rappeler la forme de nos données. Nous avons M réalisations indépendantes de n processus ponctuels. On indicera les processus de la manière suivante : N_i^j pour $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, M$. On renvoie à l'Annexe A.2 pour une représentation matricielle où les informations du processus N_i^j sont contenues dans la ligne $M(i-1) + j$.

Les simulations qui suivent sont pertinentes grâce à deux convergences en loi. La première a lieu lorsque le nombre de simulations tend vers l'infini, et la seconde a lieu lorsque M , le nombre de réalisations tend vers l'infini. Premièrement, à M fixé, les grandeurs calculées sont distribuées selon une loi qui dépend de M , et donc, lorsque le nombre de simulations est grand, on peut estimer cette loi (par exemple par estimation de la densité par noyau gaussien). Deuxièmement, quand $M \rightarrow \infty$, les grandeurs calculées sont distribuées selon la loi cible (i.e. loi normale centrée réduite ou loi uniforme sur $[0, 1]$).

Les Figures 4 et 5 ont été obtenues avec $M = 100$ fenêtres de longueur $b - a = 0.1s$ et les paramètres suivants :

- $n = 3$ neurones. Leurs intensités respectives sont 30, 40 et 25 Hz
- $\mathcal{J} = \{1, 2, 3\}$
- $\delta = 0.02s$

Pour chaque simulation, on obtient un nombre moyen de coïncidences renormalisé $\sqrt{M} \frac{(\bar{m} - m_0)}{\sqrt{Var(X)}}$, une statistique delta $\sqrt{M} \frac{(\bar{m} - \hat{m}_0)}{\sqrt{\hat{\sigma}^2}}$ et une p-valeur associée. Ainsi, chaque courbe de couleur est obtenue grâce à 5000 réalisations d’une même loi. La courbe noire est issue de la loi cible (loi normale centrée réduite ou loi uniforme sur $[0, 1]$). On représente plusieurs courbes pour vérifier que les fluctuations propres à chaque expérience sont raisonnables.

Les estimations de densité par noyau gaussien ont été effectués via la fonction “density” de R.

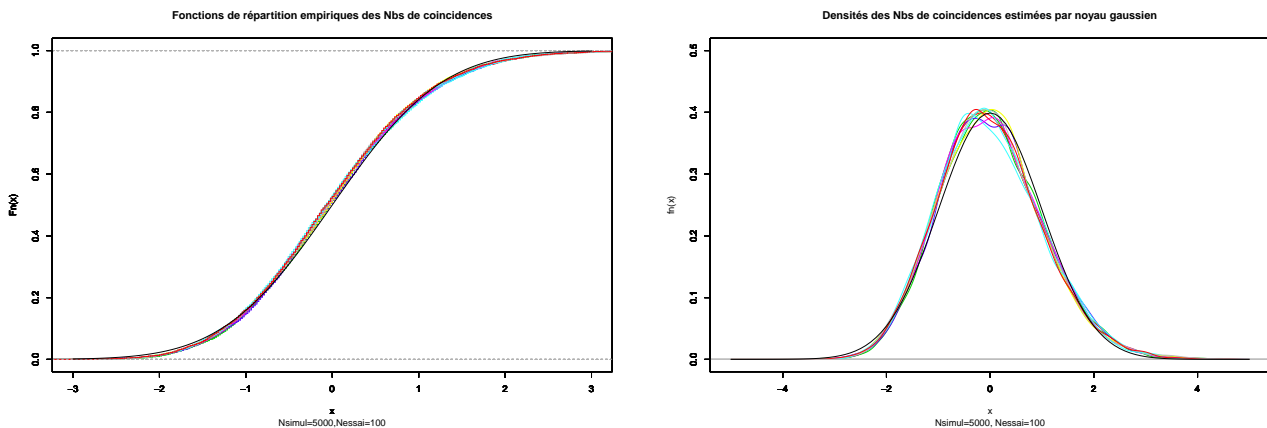


FIGURE 4 – A gauche : En couleur, dix fonctions de répartition, sous H_0 , de $\sqrt{M} \frac{(\bar{m} - \mathbb{E}[X])}{\sqrt{Var(X)}}$ estimées via 5000 simulations. En noir, la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. A droite : En couleur, dix densités estimées par noyau gaussien, sous H_0 , de $\sqrt{M} \frac{(\bar{m} - \mathbb{E}[X])}{\sqrt{Var(X)}}$. En noir, la densité de la loi normale centrée réduite. Calculs effectués avec $M = 100$.

La Figure 4 illustre la convergence en loi obtenue à partir d’un TCL appliqué aux résultats du Théorème II.1.

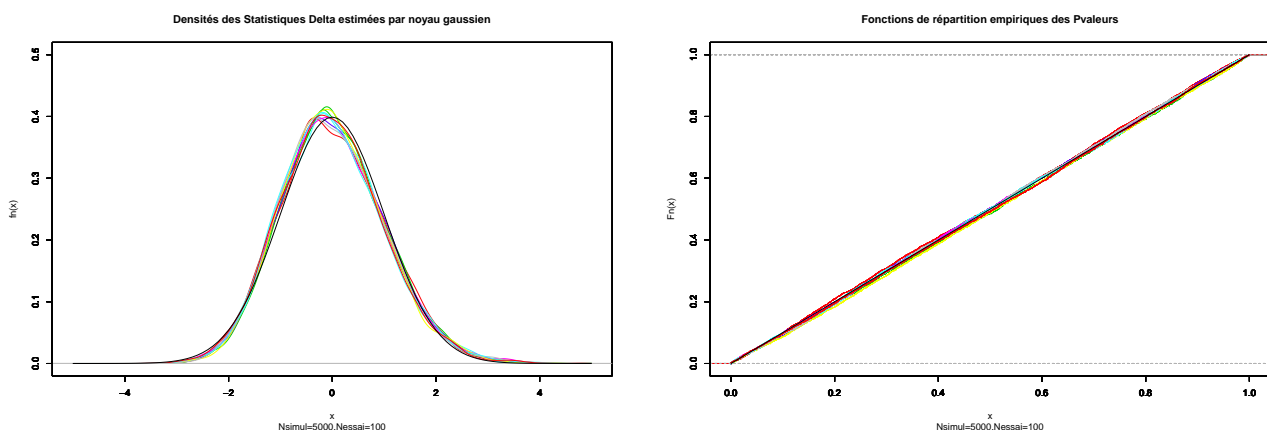


FIGURE 5 – A gauche : En couleur, dix densités estimées par noyau gaussien, sous H_0 , de $\sqrt{M} \frac{(\bar{m} - \hat{m}_0)}{\sqrt{\hat{\sigma}^2}}$. En noir, la densité de la loi normale centrée réduite. A droite : En couleur, dix fonctions de répartition, sous H_0 , des p-valeurs du test issu du Théorème II.2, estimées via 5000 simulations. En noir, la fonction de répartition de la loi uniforme sur $[0, 1]$. Calculs effectués avec $M = 100$.

La Figure 5 illustre la convergence en loi obtenue grâce au Théorème II.2 (à gauche) et le fait que les

p-valeurs se distribuent selon une loi uniforme sur $[0, 1]$, ce qui est dû au fait que l'on soit sous l'hypothèse H_0 (à droite).

On observe que les courbes de couleur sont proches les unes des autres. Cela nous conforte dans le choix du nombre de 5000 simulations.

Les Figures 6 à 7 illustrent la convergence vers la loi cible quand $M \rightarrow \infty$. Pour ce faire, on effectue les simulations avec $M = 5000$. On voit que les fonctions de répartition empiriques ou les densités estimées sont très proches de celles des lois limites.

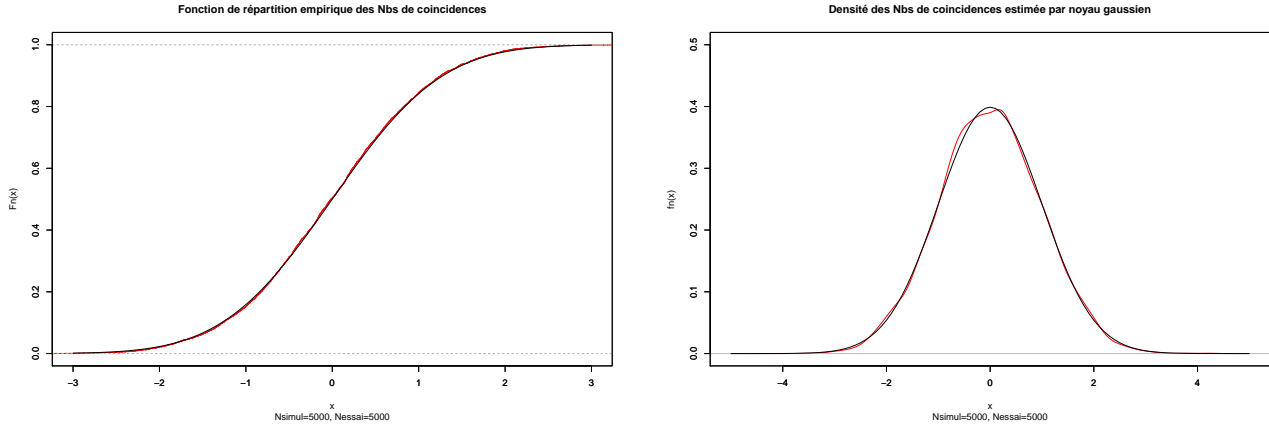


FIGURE 6 – A gauche : En rouge, la fonction de répartition, sous H_0 , de $\sqrt{M} \frac{(\bar{m} - \mathbb{E}[X])}{\sqrt{\text{Var}(X)}}$ estimée via 5000 simulations. En noir, la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. A droite : En rouge, la densité estimée par noyau gaussien, sous H_0 , de $\sqrt{M} \frac{(\bar{m} - \mathbb{E}[X])}{\sqrt{\text{Var}(X)}}$. En noir, la densité de la loi normale centrée réduite. Calculs effectués avec $M = 5000$.

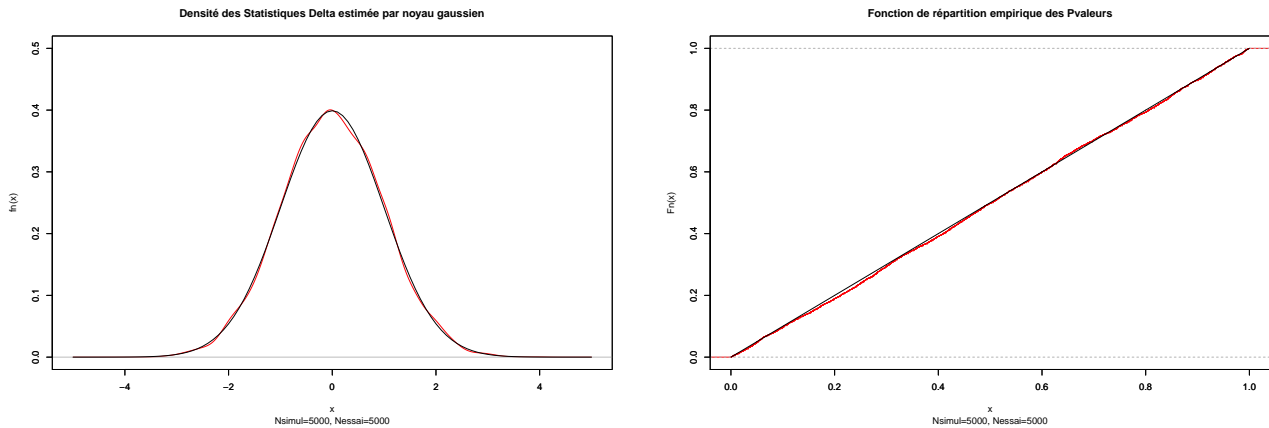


FIGURE 7 – A gauche : En rouge, la densité estimée par noyau gaussien, sous H_0 , de $\sqrt{M} \frac{(\bar{m} - \hat{m}_0)}{\sqrt{\hat{\sigma}^2}}$. En noir, la densité de la loi normale centrée réduite. A droite : En rouge, la fonction de répartition, sous H_0 , des p-valeurs du test issu du Théorème II.2, estimées via 5000 simulations. En noir, la fonction de répartition de la loi uniforme sur $[0, 1]$. Calculs effectués avec $M = 5000$.

V.2 Puissance du Test

Dans cette partie, nous sortons du cadre théorique de notre test puisque nous allons considérer des processus ne respectant pas l'hypothèse de Poisson. En effet, il est intéressant de voir si notre test conserve un intérêt lorsque l'on sort du cadre poissonien. Nous allons faire passer le test sur des processus de Hawkes multivariés ou "bi-dépendants". On rappelle que la simulation de ces processus est possible grâce aux résultats de la Partie IV.

Paramètres communs aux tests :

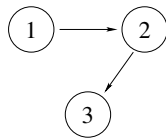
- $M = 100$ essais.
- $n = 4$ neurones.
- Tous les sous-ensembles \mathcal{J} de neurones sont testés.
- Pour chaque test, trois fenêtres de coïncidences sont utilisées : En bleu, $\delta = 0.005$. En rouge, $\delta = 0.01$. En vert, $\delta = 0.02$.
- Chaque test a été effectué sur 200 simulations pour obtenir le graphe des p-valeurs triées.

L'interprétation rapide des graphes qui suivent repose sur la remarque suivante.

Remarque. Si une courbe de couleur est au-dessous de la première bissectrice (en noir) alors, dans les conditions de tracé de la courbe, la probabilité de rejet de l'indépendance est plus importante que sous les hypothèses de Poissons indépendants. Si une courbe est proche de la première bissectrice, cela veut dire que dans les conditions de tracé de la courbe, notre test se comporte comme face à des processus de Poisson indépendants.

En regardant de manière plus poussée, on peut vérifier la puissance du test pour un niveau donné. Par exemple, si l'on souhaite faire un test de niveau 5%, il suffit de regarder l'abscisse du point de la courbe à l'horizontale de 0,05. Cela nous donne une approximation de la probabilité de rejet de l'hypothèse d'indépendance sous les conditions de tracé de la courbe.

Dans un premier temps, nous donnons dans les Figures 9 à 11, les graphes des p-valeurs dans le cas où les fonctions d'interactions sont toutes nulles sauf $h_{12} = h_{23} = 30.1_{[0,0.01]}$. Cela correspond au graphe de dépendance locale présenté en Figure 8.



4

FIGURE 8 – Graphe de dépendance locale, où une flèche indique une fonction d'interaction non nulle.

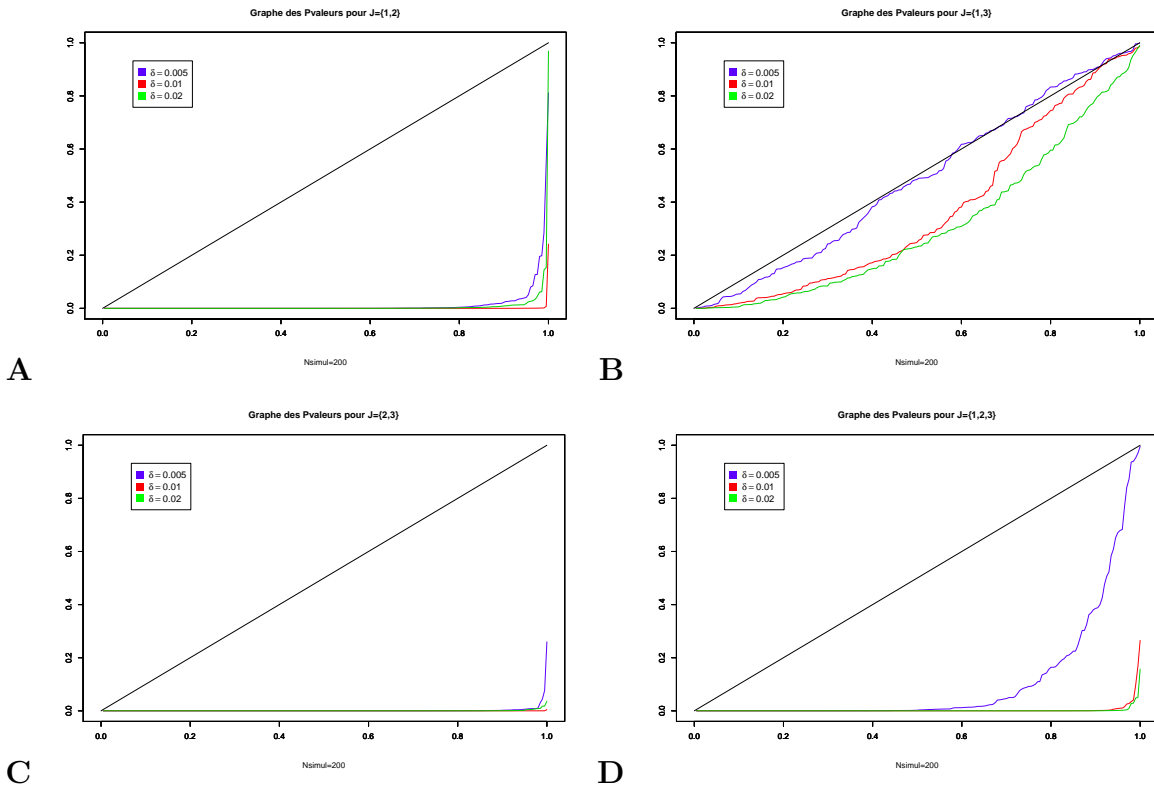


FIGURE 9 – Graphiques des p-valeurs ordonnées des tests effectués, pour $\mathcal{J} = \{1, 2\}$ (A), $\mathcal{J} = \{1, 3\}$ (B), $\mathcal{J} = \{2, 3\}$ (C) et $\mathcal{J} = \{1, 2, 3\}$ (D) sur un processus de Hawkes 4-dimensionnel d'intensités spontanées $\mu_i = 12$ avec pour seules interactions non nulles $h_{12} = h_{23} = 30.1_{[0,0.01]}$

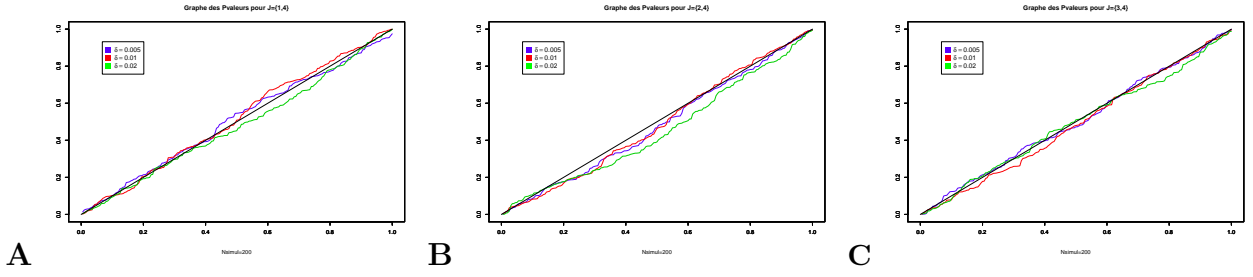


FIGURE 10 – Graphiques des p-valeurs ordonnées des tests effectués, pour $\mathcal{J} = \{1, 4\}$ (A), $\mathcal{J} = \{2, 4\}$ (B) et $\mathcal{J} = \{3, 4\}$ (C) sur un processus de Hawkes 4-dimensionnel d’intensités spontanées $\mu_i = 12$ avec pour seules interactions non nulles $h_{12} = h_{23} = 30.1_{[0,0.01]}$. Ces trois graphes sont sous l’hypothèse \mathcal{H}_0 .

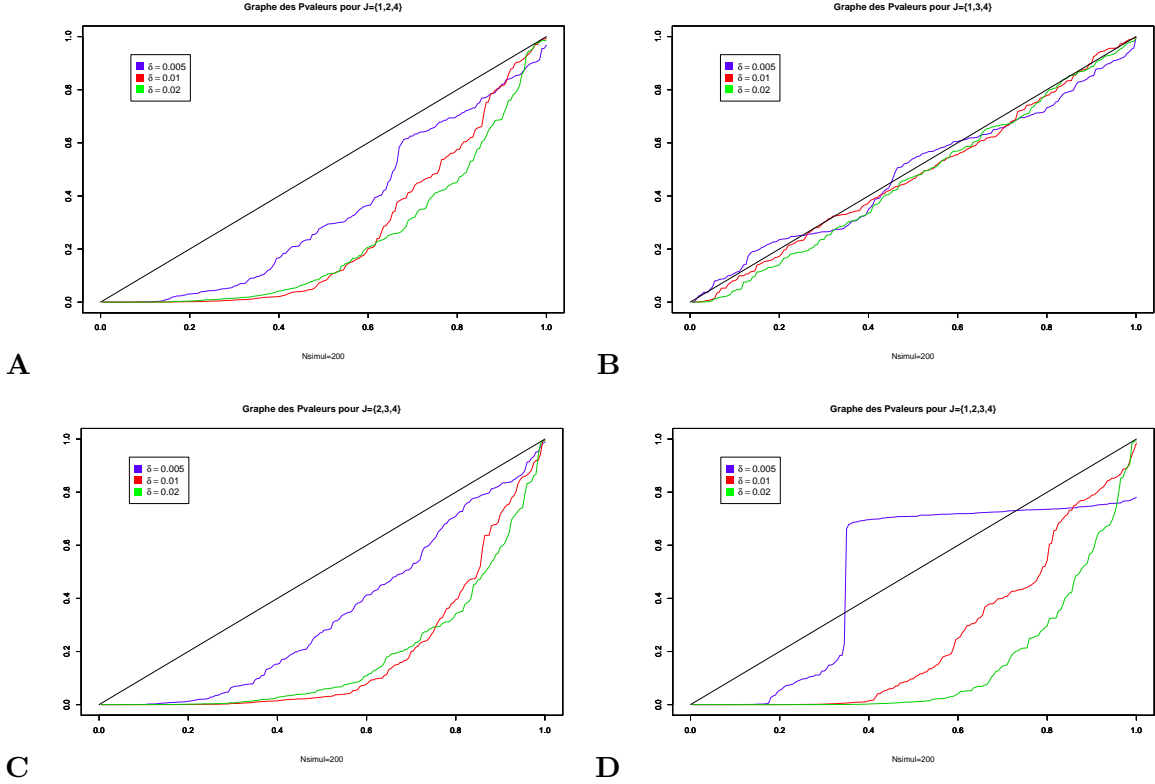
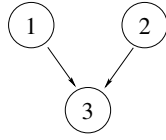


FIGURE 11 – Graphiques des p-valeurs ordonnées des tests effectués, pour $\mathcal{J} = \{1, 2, 4\}$ (A), $\mathcal{J} = \{1, 3, 4\}$ (B), $\mathcal{J} = \{2, 3, 4\}$ (C) et $\mathcal{J} = \{1, 2, 3, 4\}$ (D) sur un processus de Hawkes 4-dimensionnel d’intensités spontanées $\mu_i = 12$ avec pour seules interactions non nulles $h_{12} = h_{23} = 30.1_{[0,0.01]}$.

On voit que les sous-ensembles $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$ et $\{1, 2, 3\}$ (Figure 9) sont fortement rejetés par notre test, alors que $\{1, 3\}$ est rejeté moins fortement. Ceci est compréhensible car l’influence du neurone 1 sur le neurone 3 se fait par l’intermédiaire du neurone 2 et “prend plus de temps”, d’où le moindre rejet notamment par le test pour $\delta = 0.005$ (moitié du temps d’interaction). Les sous-ensembles pour lesquels la dépendance est plus faible ($\{1, 2, 4\}$, $\{2, 3, 4\}$ et $\{1, 2, 3, 4\}$) sont également rejetés avec une probabilité non négligeable, ce qui peut être gênant. En effet, nous aimerions ne détecter que les sous-ensembles $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$ et $\{1, 2, 3\}$. Ce souci pourrait être réglé par l’utilisation de la méthode de tests multiples de Benjamini-Hochberg

Dans un second temps, nous donnons dans les Figures 13 à 15, les graphes des p-valeurs dans le cas où les fonctions d’interactions sont toutes nulles sauf $h_{13} = h_{23} = 30.1_{[0,0.01]}$. Cela correspond au graphe de dépendance locale présenté en Figure 12.



4

FIGURE 12 – Graphe de dépendance locale, où une flèche indique une fonction d'interaction non nulle.

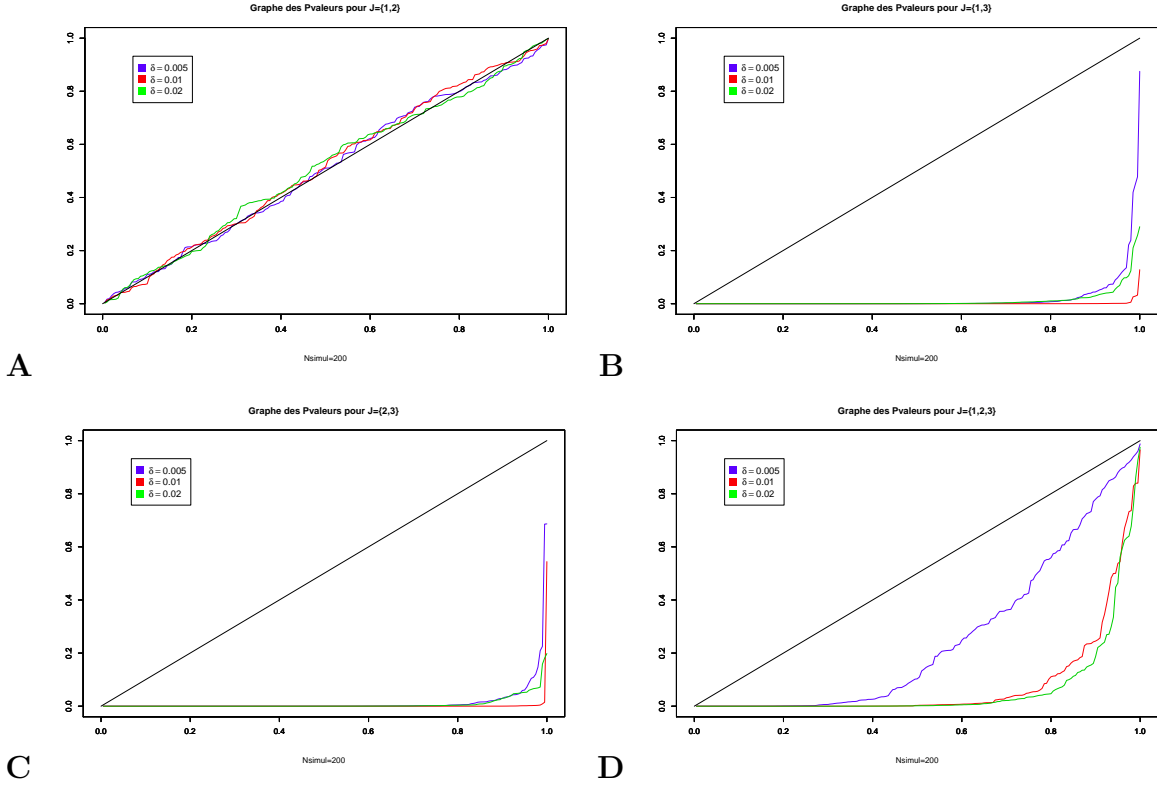


FIGURE 13 – Graphiques des p-valeurs ordonnées des tests effectués, pour $\mathcal{J} = \{1, 2\}$ (A), $\mathcal{J} = \{1, 3\}$ (B), $\mathcal{J} = \{2, 3\}$ (C) et $\mathcal{J} = \{1, 2, 3\}$ (D) sur un processus de Hawkes 4-dimensionnel d'intensités spontanées $\mu_i = 12$ avec pour seules interactions non nulles $h_{13} = h_{23} = 30.1_{[0,0.01]}$. A noter que le graphe A est tracé sous \mathcal{H}_0 .

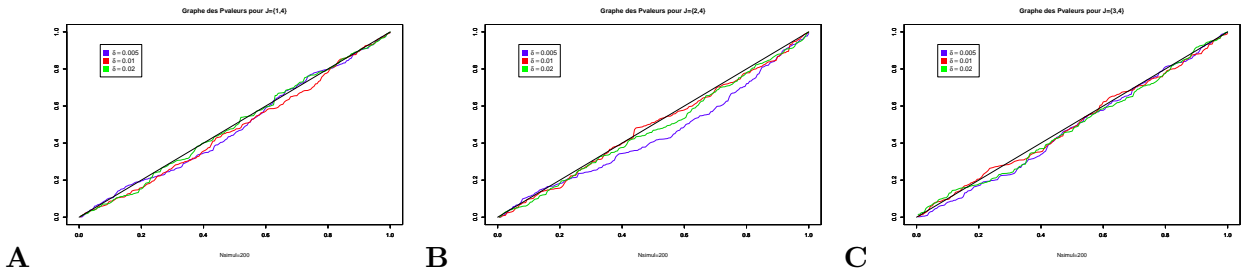


FIGURE 14 – Graphiques des p-valeurs ordonnées des tests effectués, pour $\mathcal{J} = \{1, 4\}$ (A), $\mathcal{J} = \{2, 4\}$ (B) et $\mathcal{J} = \{3, 4\}$ (C) sur un processus de Hawkes 4-dimensionnel d'intensités spontanées $\mu_i = 12$ avec pour seules interactions non nulles $h_{13} = h_{23} = 30.1_{[0,0.01]}$. Ces trois graphes sont sous l'hypothèse \mathcal{H}_0 .

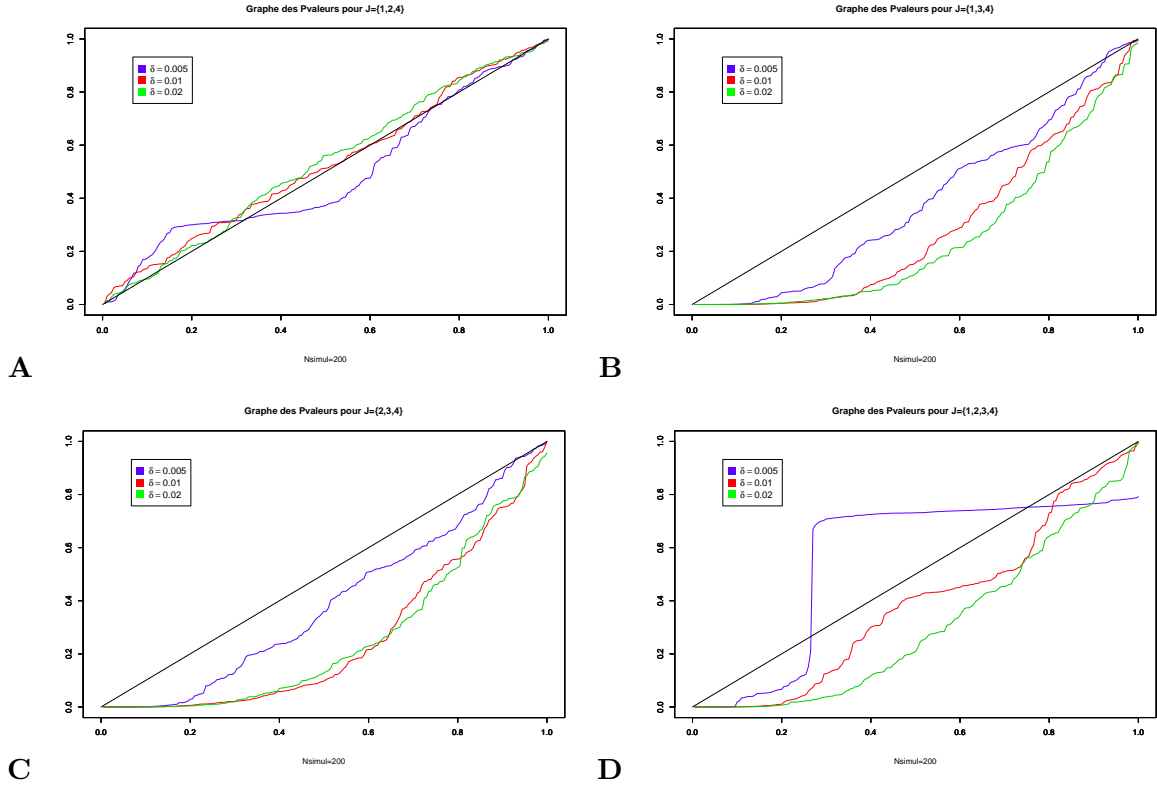


FIGURE 15 – Graphiques des p-valeurs ordonnées des tests effectués, pour $\mathcal{J} = \{1, 2, 4\}$ (**A**), $\mathcal{J} = \{1, 3, 4\}$ (**B**), $\mathcal{J} = \{2, 3, 4\}$ (**C**) et $\mathcal{J} = \{1, 2, 3, 4\}$ (**D**) sur un processus de Hawkes 4-dimensionnel d'intensités spontanées $\mu_i = 12$ avec pour seules interactions non nulles $h_{13} = h_{23} = 30.1_{[0,0.01]}$. A noter que le graphe **A** est tracé sous \mathcal{H}_0 .

On voit que les sous-ensembles $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$ et $\{1, 2, 3\}$ (Figure 13) sont fortement rejetés par notre test. Les sous-ensembles pour lesquels la dépendance est plus faible ($\{1, 3, 4\}$, $\{2, 3, 4\}$ et $\{1, 2, 3, 4\}$) sont également rejetés avec une probabilité non négligeable, ce qui peut être gênant. En effet, nous aimerions ne détecter que les sous-ensembles $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$ et $\{1, 2, 3\}$.

A titre de comparaison on donne les résultats de notre test face à un processus de Hawkes bi-dépendant. Précédemment, le neurone 3 avait plus tendance à s'exciter lorsque le premier ou le deuxième neurone s'excitait. Dans les simulations qui suivent le neurone 3 aura plus tendance à s'exciter lorsque les deux premiers neurones s'excitent à peu près en même temps.

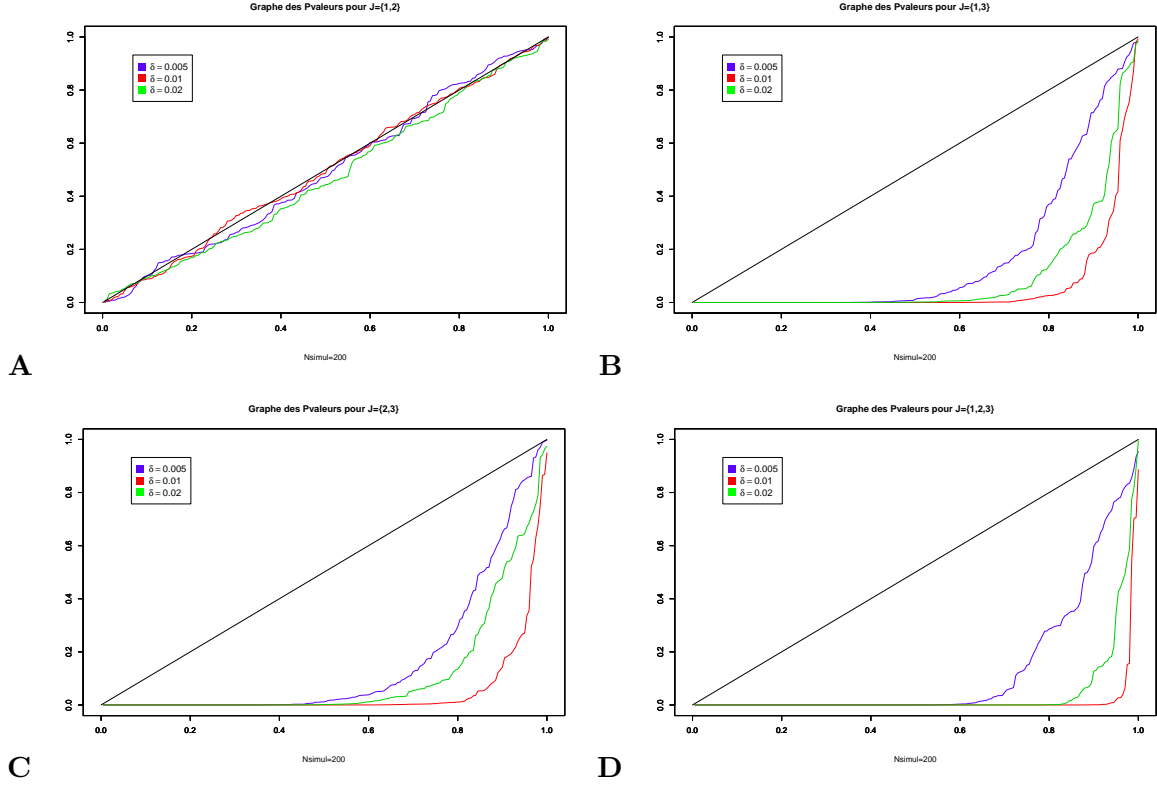


FIGURE 16 – Graphiques des p-valeurs ordonnées des tests effectués, pour $\mathcal{J} = \{1, 2\}$ (A), $\mathcal{J} = \{1, 3\}$ (B), $\mathcal{J} = \{2, 3\}$ (C) et $\mathcal{J} = \{1, 2, 3\}$ (D) sur un processus de Hawkes bi-dépendant 3-dimensionnel d'intensités spontanées $\mu_i = 12$ où toutes les interactions sont nulles et la seule bi-interaction non nulle est $g_{1,2 \rightarrow 3} = 600.1_{[0,0.01] \times [0,0.01]}$. A noter que le graphe A est tracé sous \mathcal{H}_0 .

On voit que les sous-ensembles $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$ et $\{1, 2, 3\}$ (Figure 13) sont fortement rejetés par notre test.

En comparant avec les résultats des graphes de la Figure 13, on remarque que la puissance du test par rapport aux sous-ensembles $\{1, 3\}$ et $\{2, 3\}$ est plus importante dans le cadre de dépendance de la Figure 12 que dans le cadre du processus bi-dépendant. Inversement, la puissance par rapport au sous-ensemble $\{1, 2, 3\}$ est plus importante dans le cadre de la bi-dépendance. Cela est conforme avec ce qui est attendu car dans le cadre de la bi-dépendance, le neurone 3 admet une dépendance face au couple des neurones 1 et 2, alors que dans le cadre de dépendance simple, le neurone 3 admet une dépendance face à chacun des neurones 1 et 2.

Le paramètre de la fonction de bi-interaction (600) a été choisi de sorte que l'espérance de l'intensité du troisième neurone soit du même ordre que dans le cas où les deux premiers neurones indépendants interagissent sur le troisième pour le paramètre 30. Dans le cas bi-dépendant, en supposant être proche du régime stationnaire,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[\lambda_t^3] &= \mu_3 + \mathbb{E} \left[\iint_{-\infty}^t g_{1,2 \rightarrow 3}(t-s, t-u) N^1(ds) N^2(du) \right] \\
 &= \mu_3 + \mu_1 \mu_2 \iint_0^\infty g_{1,2 \rightarrow 3}(s, u) ds du \\
 &= \mu_3 + \mu_1 \mu_2 G_{1,2 \rightarrow 3}
 \end{aligned}$$

Dans le cas multivarié, en supposant être proche du régime stationnaire,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[\lambda_t^3] &= \mu_3 + \mathbb{E} \left[\int_{-\infty}^t h_{13}(t-s) N^1(ds) + \int_{-\infty}^t h_{23}(t-s) N^2(ds) \right] \\
 &= \mu_3 + \mu_1 \int_0^\infty h_{13}(s) ds + \mu_2 \int_0^\infty h_{23}(s) ds \\
 &= \mu_3 + \mu_1 H_{13} + \mu_2 H_{23}
 \end{aligned}$$

Comme on prend les μ_i de l'ordre de 10 et $H_{13} = H_{23}$, il faut avoir $G_{1,2 \rightarrow 3} \approx \frac{H_{13}}{5}$.

A Annexe

A.1 Preuves

A.1.1 Preuve du théorème II.1

Démonstration.

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E} \left[\int_{[a,b]^J} c_\delta(x_1, \dots, x_J) dN_{i_1}(x_1) \dots dN_{i_J}(x_J) \right]$$

or, les N_1, \dots, N_n sont des processus de Poisson stationnaires indépendants d'intensités respectives $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. On peut alors prouver (voir Daley et Vere-Jones [3]) que

$$\mathbb{E}[X] = \left(\prod_{j=1}^J \lambda_{i_j} \right) \int_{[a,b]^J} c_\delta(x_1, \dots, x_J) dx_1 \dots dx_J$$

Pour le calcul de la variance, nous allons poser $[a, b]^{(1)} = \{(x, y) \in [a, b]^2 \mid x = y\}$ et $[a, b]^{(2)} = [a, b]^2 \setminus [a, b]^{(1)}$.

Par le Théorème de Fubini, on a

$$\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E} \left[\int_{[a,b]^{2J}} c_\delta(x_1, \dots, x_J) c_\delta(y_1, \dots, y_J) \prod_{j=1}^J dN_{i_j}(x_j) dN_{i_j}(y_j) \right]$$

On remarque que $[a, b]^{2J} = ([a, b]^{(1)})^J$ et on décompose l'intégrale en prenant $[a, b]^{(2)}$ ou bien $[a, b]^{(1)}$ sur chaque copie de $[a, b]^2$.

On note $\Phi = \left\{ \phi : J \rightarrow \left\{ [a, b]^{(1)}, [a, b]^{(2)} \right\} \right\}^3$. On a alors

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{\phi \in \Phi} \mathbb{E} \left[\int_{\prod_j \phi(j)} c_\delta(x_1, \dots, x_J) c_\delta(y_1, \dots, y_J) \prod_{j=1}^J dN_{i_j}(x_j) dN_{i_j}(y_j) \right]$$

Pour $\phi \in \Phi$, on note $p = \text{Card}(\phi^{-1}([a, b]^{(1)}))$. Quitte à réordonner les indices, on peut supposer que $\phi^{-1}([a, b]^{(1)}) = [1, p]$. Cela donne, par un calcul des moments des processus de Poisson (voir [3]) :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\int_{([a,b]^{(1)})^p} \int_{([a,b]^{(2)})^{J-p}} c_\delta(x_1, \dots, x_J) c_\delta(y_1, \dots, y_J) \prod_{j=1}^J dN_{i_j}(x_j) dN_{i_j}(y_j) \right] \\ &= \prod_{j=1}^p \lambda_{i_j} \prod_{l=p+1}^J \lambda_{i_l}^2 \int_{[a,b]^p} \left(\int_{[a,b]^{2(J-p)}} c_\delta(t_1, \dots, t_p, x_{p+1}, \dots, x_J) \right. \\ & \quad \left. c_\delta(t_1, \dots, t_p, y_{p+1}, \dots, y_J) \prod_{j=p+1}^J dx_j dy_j \right) dt_1 \dots dt_p \end{aligned}$$

3. Permet de formaliser toutes les combinaisons possibles.

Pour (t_1, \dots, t_p) fixé, on peut appliquer le Théorème de Fubini à l'intégrale intérieure, ce qui donne :

$$\prod_{j=1}^p \lambda_{i_j} \prod_{l=p+1}^J \lambda_{i_l}^2 \int_{[a,b]^p} \left(\int_{[a,b]^{(J-p)}} c_\delta(t_1, \dots, t_p, t_{p+1}, \dots, t_J) \prod_{j=p+1}^J dt_j \right)^2 dt_1 \dots dt_p$$

Cette expression correspond à $\prod_{j=1}^p \lambda_{i_j} \prod_{l=p+1}^J \lambda_{i_l}^2 I(J, J-p)$. On a ainsi la formule condensée suivante :

$$\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[X]^2 + \sum_{k=0}^{J-1} \left(\sum_{\substack{\mathcal{L} \subset \mathcal{J} \\ \#\mathcal{L}=k}} \prod_{l \in \mathcal{L}} \lambda_{i_l}^2 \prod_{j \notin \mathcal{L}} \lambda_{i_j} \right) I(J, k)$$

où $k = \text{Card}(\phi^{-1}([a, b]^{(2)})) = J-p$, et plus particulièrement, le terme $\mathbb{E}[X]^2$ correspond à $\phi \equiv [a, b]^{(2)}$ ($k = J$).

Pour finir, il suffit de séparer le cas $k = 0$ dans la somme, ce qui donne :

$$\text{Var}(X) = \prod_{j=1}^J \lambda_{i_j} I(J, 0) + \sum_{k=1}^{J-1} \left(\sum_{\substack{\mathcal{L} \subset \mathcal{J} \\ \#\mathcal{L}=k}} \prod_{l \in \mathcal{L}} \lambda_{i_l}^2 \prod_{j \notin \mathcal{L}} \lambda_{i_j} \right) I(J, k)$$

□

A.1.2 Preuve du théorème II.2

Démonstration. Une application du Théorème Central Limite vectoriel donne :

$$\frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{k=1}^M \left[\begin{pmatrix} X^{(k)} \\ N_{i_1}^{(k)}([a, b]) \\ \vdots \\ N_{i_J}^{(k)}([a, b]) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbb{E}[X] \\ \lambda_{i_1}(b-a) \\ \vdots \\ \lambda_{i_J}(b-a) \end{pmatrix} \right] \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}_{J+1}(0, \Gamma),$$

où Γ est la matrice de covariance suivante :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \text{Var}(X) & \mathbb{E}[X] & \dots & \mathbb{E}[X] \\ \mathbb{E}[X] & \lambda_{i_1}(b-a) & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ \mathbb{E}[X] & 0 & 0 & \lambda_{i_J}(b-a) \end{pmatrix}$$

Elle est obtenue compte tenu du fait que les (N_i) sont deux à deux indépendants et du calcul suivant :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X N_{i_1}([a, b])] &= \mathbb{E} \left[\int_{[a,b]^{J+1}} c_\delta(x_1, \dots, x_J) dN_{i_1}(x_1) \dots dN_{i_J}(x_J) dN_{i_1}(y) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_{[a,b]^{J-1}} \left(\int_{[a,b]^{(2)}} c_\delta(x_1, \dots, x_J) dN_{i_1}(x_1) dN_{i_1}(y) \right) dN_{i_2}(x_2) \dots dN_{i_J}(x_J) \right] \\ &\quad + \mathbb{E} \left[\int_{[a,b]^{J-1}} \left(\int_{[a,b]^{(1)}} c_\delta(x_1, \dots, x_J) dN_{i_1}(x_1) dN_{i_1}(y) \right) dN_{i_2}(x_2) \dots dN_{i_J}(x_J) \right] \\ &= \lambda_{i_1} \prod_{j=1}^J \lambda_{i_j} \int_{[a,b]^{J+1}} c_\delta(x_1, \dots, x_J) dx_1 \dots dx_J dy + \prod_{j=1}^J \lambda_{i_j} I(J, 0) \\ &= \lambda_{i_1}(b-a) \left(\prod_{j=1}^J \lambda_{i_j} \right) I(J, 0) + \left(\prod_{j=1}^J \lambda_{i_j} \right) I(J, 0) \\ &= \mathbb{E}[N_{i_1}([a, b])] \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X] \end{aligned}$$

Posons $g(x, u_1, \dots, u_J) = x - \prod_{i=1}^J u_i (b-a)^{-J} I(0)$. On remarque que :

$$g\left(\frac{1}{M} \sum_{k=1}^M X^{(k)}, \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M N_{i_1}^{(k)}([a, b]), \dots, \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M N_{i_J}^{(k)}([a, b])\right) = \bar{m} - \hat{m}_0$$

$$g(\mathbb{E}[X], \lambda_{i_1}(b-a), \dots, \lambda_{i_J}(b-a)) = 0$$

Ainsi, on a

$$\sqrt{M}(\bar{m} - \hat{m}_0) = \sqrt{M} \left[g\left(\frac{1}{M} \sum_{k=1}^M X^{(k)}, \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M N_{i_1}^{(k)}([a, b]), \dots, \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M N_{i_J}^{(k)}([a, b])\right) - g(\mathbb{E}[X], \lambda_{i_1}(b-a), \dots, \lambda_{i_J}(b-a)) \right]$$

Et donc, la méthode delta donne la convergence en loi suivante :

$$\sqrt{M}(\bar{m} - \hat{m}_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, {}^t D \Gamma D\right),$$

où D est le gradient de g au point $(\mathbb{E}[X], \lambda_{i_1}(b-a), \dots, \lambda_{i_J}(b-a))$, i.e.

$$D = \begin{pmatrix} 1 \\ -\lambda_{i_1}^{-1} \mathbb{E}[X] (b-a)^{-1} \\ \vdots \\ -\lambda_{i_J}^{-1} \mathbb{E}[X] (b-a)^{-1} \end{pmatrix}$$

On a :

$${}^t D \Gamma D = {}^t D \begin{pmatrix} \text{Var}(X) - (b-a)^{-1} \mathbb{E}[X]^2 \left(\sum_{j=1}^J \lambda_{i_j}^{-1}\right) \\ \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X] \\ \vdots \\ \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X] \end{pmatrix}$$

Et donc, on reconnaît bien le terme σ^2 annoncé.

Pour finir, la seconde convergence en loi proposée se démontre par une application du Lemme de Slutsky. \square

A.1.3 Preuve de la Proposition II.1

Par soucis de clarté, on écrira dans cette partie n au lieu de J , i.e., on considérera les intégrales $I(n, k)$.

Pour calculer $I(n, k)$, on explicite dans un premier temps l'intégrale intérieure $\Sigma = \int_{[a, b]^k} \mathbf{1}_{|\max(\vee x_i, \vee y_i) - \min(\wedge x_i, \wedge y_i)| \leq \delta} dx_1 \dots dx_k$. Pour ce faire, on fixe $(y_1, \dots, y_{n-k}) \in [a, b]^{n-k}$, et on découpe l'intégrale intérieure selon les cas suivants :

1. $\wedge x_i > \wedge y_i$ et $\vee x_i > \vee y_i$. On note l'intégrale A .
2. $\wedge x_i < \wedge y_i$ et $\vee x_i < \vee y_i$. On note l'intégrale B .
3. $\wedge x_i > \wedge y_i$ et $\vee x_i < \vee y_i$. On note l'intégrale C .
4. $\wedge x_i < \wedge y_i$ et $\vee x_i > \vee y_i$. On note l'intégrale D .

On va ensuite s'intéresser à $\Sigma = A + B + C + D$. Le Lemme suivant donne les résultats.

Lemme A.1. $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,

$$A = \mathbf{1}_{|\vee y_i - \wedge y_i| \leq \delta} \left[(\min(\delta, b - \wedge y_i))^k - (\vee y_i - \wedge y_i)^k \right]$$

$$B = \mathbf{1}_{|\vee y_i - \wedge y_i| \leq \delta} \left[(\min(\delta, \vee y_i - a))^k - (\vee y_i - \wedge y_i)^k \right]$$

$$C = \mathbf{1}_{|\vee y_i - \wedge y_i| \leq \delta} (\vee y_i - \wedge y_i)^k$$

$$D = \mathbf{1}_{|\vee y_i - \wedge y_i| \leq \delta} \left[(\vee y_i - \wedge y_i)^k - (\min(\delta, \vee y_i - a))^k \right. \\ \left. + k (\min(\wedge y_i, b - \delta) - \max(\vee y_i - \delta, a)) \delta^{k-1} + (\max(\delta, b - \wedge y_i))^k - (b - \wedge y_i)^k \right]$$

et

$$\Sigma = \mathbf{1}_{|\vee y_i - \wedge y_i| \leq \delta} \left[(k+1) \delta^k + k (\min(\wedge y_i, b - \delta) - \max(\vee y_i, a + \delta)) \delta^{k-1} \right]$$

Preuve du Lemme A.1

Démonstration. Soit $k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$. Pour calculer A , on va se restreindre à calculer l'intégrale si $x_1 = \vee x_i$, et introduire un facteur k . On a alors :

$$A = k \int_{x_1 = \vee y_i}^b \left(\int_{[\wedge y_i, x_1]^{k-1}} \mathbf{1}_{|x_1 - \wedge y_i| \leq \delta} dx_2 \dots dx_k \right) dx_1 \\ = k \mathbf{1}_{|\vee y_i - \wedge y_i| \leq \delta} \int_{x_1 = \vee y_i}^{\min(\wedge y_i + \delta, b)} \left(\int_{[\wedge y_i, x_1]^{k-1}} 1 dx_2 \dots dx_k \right) dx_1 \\ = k \mathbf{1}_{|\vee y_i - \wedge y_i| \leq \delta} \int_{x_1 = \vee y_i}^{\min(\wedge y_i + \delta, b)} (x_1 - \wedge y_i)^{k-1} dx_1 \\ = \mathbf{1}_{|\vee y_i - \wedge y_i| \leq \delta} \left[(\min(\wedge y_i + \delta, b) - \wedge y_i)^k - (\vee y_i - \wedge y_i)^k \right] \\ = \mathbf{1}_{|\vee y_i - \wedge y_i| \leq \delta} \left[(\min(\delta, b - \wedge y_i))^k - (\vee y_i - \wedge y_i)^k \right]$$

Pour calculer B , il suffit de reprendre le même procédé avec $x_1 = \wedge x_i$.

$$B = k \int_{x_1 = \max(\vee y_i - \delta, a)}^{\wedge y_i} (\vee y_i - x_1)^{k-1} dx_1 \\ = \mathbf{1}_{|\vee y_i - \wedge y_i| \leq \delta} \left[(\vee y_i - \max(\vee y_i - \delta, a))^k - (\vee y_i - \wedge y_i)^k \right] \\ = \mathbf{1}_{|\vee y_i - \wedge y_i| \leq \delta} \left[(\min(\delta, \vee y_i - a))^k - (\vee y_i - \wedge y_i)^k \right]$$

Le calcul de C se fait directement.

$$C = \int_{[\wedge y_i, \vee y_i]^k} \mathbf{1}_{|\vee y_i - \wedge y_i| \leq \delta} dx_1 \dots dx_k = \mathbf{1}_{|\vee y_i - \wedge y_i| \leq \delta} (\vee y_i - \wedge y_i)^k$$

Pour calculer D , on va se restreindre à calculer l'intégrale si $x_1 = \wedge x_i$ et $x_2 = \vee x_i$, et introduire un

facteur $k(k-1)$. Ce qui donne :

$$\begin{aligned}
D &= k(k-1) \int_{x_1=a}^{\wedge y_i} \int_{x_2=\vee y_i}^b \left(\int_{x_1}^{x_2} \mathbf{1}_{|x_2-x_1|\leq\delta} dx_3 \dots dx_k \right) dx_2 dx_1 \\
&= k(k-1) \mathbf{1}_{|\vee y_i - \wedge y_i| \leq \delta} \int_{x_1=\max(\vee y_i - \delta, a)}^{\wedge y_i} \int_{x_2=\vee y_i}^{\min(x_1 + \delta, b)} (x_2 - x_1)^{k-2} dx_2 dx_1 \\
&= k \mathbf{1}_{|\vee y_i - \wedge y_i| \leq \delta} \int_{x_1=\max(\vee y_i - \delta, a)}^{\wedge y_i} (\min(x_1 + \delta, b) - x_1)^{k-1} - (\vee y_i - x_1)^{k-1} dx_1 \\
&= \mathbf{1}_{|\vee y_i - \wedge y_i| \leq \delta} \left[(\vee y_i - \wedge y_i)^k - (\vee y_i - \max(\vee y_i - \delta, a))^k \right. \\
&\quad \left. + k(\min(\wedge y_i, b - \delta) - \max(\vee y_i - \delta, a)) \delta^{k-1} + (b - \min(\wedge y_i, b - \delta))^k - (b - \wedge y_i)^k \right] \\
&= \mathbf{1}_{|\vee y_i - \wedge y_i| \leq \delta} \left[(\vee y_i - \wedge y_i)^k - (\min(\delta, \vee y_i - a))^k \right. \\
&\quad \left. + k(\min(\wedge y_i, b - \delta) - \max(\vee y_i - \delta, a)) \delta^{k-1} + (\max(\delta, b - \wedge y_i))^k - (b - \wedge y_i)^k \right]
\end{aligned}$$

L'expression de Σ s'en déduit facilement en remarquant que

$$(\min(\delta, b - \wedge y_i))^k + (\max(\delta, b - \wedge y_i))^k = \delta^k + (b - \wedge y_i)^k$$

et

$$\max(\vee y_i - \delta, a) = \max(\vee y_i, a + \delta) - \delta$$

□

Remarque. On a pris $k \geq 2$ pour ne pas avoir de division par 0 (on divise par k et $k-1$). Cependant, dans ces cas particuliers l'expression de Σ concorde avec cette formule générale. $\Sigma = \mathbf{1}_{|\vee y_i - \wedge y_i| \leq \delta}$ pour $k = 0$ et $\Sigma = \mathbf{1}_{|\vee y_i - \wedge y_i| \leq \delta} [\min(\wedge y_i + \delta, b) - \max(\vee y_i - \delta, a)]$ pour $k = 1$.

Suite de la preuve de la Proposition II.1

Il nous reste à calculer $I(n, k) = \int_{[a, b]^{n-k}} \Sigma(y_1, \dots, y_{n-k})^2 dy_1 \dots dy_{n-k}$. Pour ce faire, on découpe l'intégrale selon les cas suivants :

1. $\vee y_i \leq a + \delta$. Dans ce cas, $\Sigma = \delta^{k-1} [\delta + k(\wedge y_i - a)]$, et on note l'intégrale Y .
2. $\wedge y_i \geq b - \delta$. Dans ce cas, $\Sigma = \delta^{k-1} [1 + k(b - \vee y_i)]$, et on note l'intégrale Z .
3. $\vee y_i \geq a + \delta$ et $\wedge y_i \leq b - \delta$. Dans ce cas, $\Sigma = \mathbf{1}_{|\vee y_i - \wedge y_i| \leq \delta} \delta^{k-1} [(k+1)\delta - k(\vee y_i - \wedge y_i)]$, et on note l'intégrale W .

Ces trois cas sont bien distincts car on a supposé que $\delta < \frac{b-a}{2}$.

Lemme A.2. $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,

$$Y = Z = C(n, k) \delta^{n+k}$$

où

$$C(n, k) = (n-k) \frac{(k+1)^{n-k+2}}{k^{n-k}} \int_0^{\frac{k}{k+1}} t^{n-k-1} (1-t)^2 dt,$$

et

$$W = f(n, k) (b-a) \delta^{n+k-1} - [f(n, k) + g(n, k)] \delta^{n+k}$$

où

$$f(n, k) = (n-k)(k+1)^2 - 2(n-k-1)k(k+1) + \frac{(n-k)(n-k-1)}{(n-k+1)} k^2$$

et

$$g(n, k) = (k+1)^2 - 2 \frac{(n-k-1)k(k+1)}{(n-k+1)} + \frac{(n-k)(n-k-1)}{(n-k+1)(n-k+2)} k^2$$

Preuve du Lemme A.2

Démonstration. Soit $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$. Pour calculer Y , on va se restreindre à calculer l'intégrale si $y_1 = \wedge y_i$, et introduire un facteur $(n-k)$. On a alors :

$$\begin{aligned} Y &= \int_{\vee y_i \leq a+\delta} \Sigma^2 dy_1 \dots dy_{n-k} \\ &= (n-k) \delta^{2k-2} \int_{y_1=a}^{a+\delta} \left(\int_{[y_1, a+\delta]^{n-k-1}} [\delta + k(y_1 - a)]^2 dy_2 \dots dy_{n-k} \right) dy_1 \\ &= (n-k) \delta^{2k-2} \int_{y_1=a}^{a+\delta} (a + \delta - y_1)^{n-k-1} [\delta + k(y_1 - a)]^2 dy_1 \end{aligned}$$

En faisant le changement de variable $u = a + \delta - y_1$, on a

$$\begin{aligned} Y &= (n-k) \delta^{2k-2} \int_0^\delta u^{n-k-1} [\delta + k(\delta - u)]^2 du \\ &= (n-k) \delta^{2k-2} \int_0^\delta u^{n-k-1} [(k+1)\delta - ku]^2 du \end{aligned}$$

Et en faisant le changement de variable $t = \frac{ku}{(k+1)\delta}$, on a

$$\begin{aligned} Y &= (n-k) \delta^{2k-2} \int_0^{\frac{k}{k+1}} \left(\frac{(k+1)\delta t}{k} \right)^{n-k-1} (k+1)^2 \delta^2 (1-t)^2 \frac{(k+1)\delta}{k} dt \\ &= (n-k) \delta^{n+k} \frac{(k+1)^{n-k+2}}{k^{n-k}} \int_0^{\frac{k}{k+1}} t^{n-k-1} (1-t)^2 dt \end{aligned}$$

Le calcul de Z se fait par le même procédé en inversant les rôles de a et b et de $\wedge y_i$ et $\vee y_i$. Après calcul, on trouve $Z = Y$.

Pour le calcul de W , on va se restreindre à calculer l'intégrale si $y_1 = \wedge y_i$ et $y_2 = \vee y_i$, et introduire un facteur $(n-k)(n-k-1)$. On a alors :

$$\begin{aligned} W &= (n-k)(n-k-1) \delta^{2k-2} \int_{y_1=a}^{b-\delta} \int_{y_2=\max(y_1, a+\delta)}^b \left(\int_{[y_1, y_2]^{n-k-2}} \mathbf{1}_{|y_2-y_1| \leq \delta} [(k+1)\delta - k(y_2 - y_1)]^2 dy_3 \dots dy_{n-k} \right) dy_2 dy_1 \\ &= (n-k)(n-k-1) \delta^{2k-2} \int_{y_1=a}^{b-\delta} \int_{y_2=\max(y_1, a+\delta)}^{y_1+\delta} \left((y_2 - y_1)^{n-k-2} \left[(k+1)^2 \delta^2 - 2k(k+1)\delta(y_2 - y_1) + k^2(y_2 - y_1)^2 \right] \right) dy_2 dy_1 \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} W &= (n-k) \delta^{2k-2} \int_{y_1=a}^{b-\delta} (k+1)^2 \delta^2 \left[\delta^{n-k-1} - (\max(y_1, a+\delta) - y_1)^{n-k-1} \right] dy_1 \\ &\quad - (n-k-1) \delta^{2k-2} \int_{y_1=a}^{b-\delta} 2k(k+1)\delta \left[\delta^{n-k} - (\max(y_1, a+\delta) - y_1)^{n-k} \right] dy_1 \\ &\quad + \frac{(n-k)(n-k-1)}{(n-k+1)} \delta^{2k-2} \int_{y_1=a}^{b-\delta} k^2 \left[\delta^{n-k+1} - (\max(y_1, a+\delta) - y_1)^{n-k+1} \right] dy_1 \end{aligned}$$

On va calculer dans un premier temps l'intégrale entre $a + \delta$ et $b - \delta$, notée W_1 .

$$\begin{aligned} W_1 &= \delta^{2k-2} \int_{a+\delta}^{b-\delta} \left[(n-k)(k+1)^2 - 2(n-k-1)k(k+1) + \frac{(n-k)(n-k-1)}{(n-k+1)}k^2 \right] \delta^{n-k+1} dy_1 \\ &= (b-a-2\delta) f(n, k) \delta^{n+k-1} \\ &= f(n, k) (b-a) \delta^{n+k-1} - 2f(n, k) \delta^{n+k} \end{aligned}$$

où $f(n, k) = (n-k)(k+1)^2 - 2(n-k-1)k(k+1) + \frac{(n-k)(n-k-1)}{(n-k+1)}k^2$.

Dans un deuxième temps, on explicite l'intégrale entre a et $a + \delta$, notée W_2 .

$$\begin{aligned} W_2 &= \delta^{2k-2} \left[\int_a^{a+\delta} f(n, k) \delta^{n-k+1} dy_1 \right. \\ &\quad - (n-k)(k+1)^2 \delta^2 \int_a^{a+\delta} (a+\delta-y_1)^{n-k-1} dy_1 \\ &\quad + 2(n-k-1)k(k+1)\delta \int_a^{a+\delta} (a+\delta-y_1)^{n-k} dy_1 \\ &\quad \left. - \frac{(n-k)(n-k-1)}{(n-k+1)}k^2 \int_a^{a+\delta} (a+\delta-y_1)^{n-k+1} dy_1 \right] \end{aligned}$$

En notant $g(n, k) = (k+1)^2 - 2\frac{(n-k-1)k(k+1)}{(n-k+1)} + \frac{(n-k)(n-k-1)}{(n-k+1)(n-k+2)}k^2$, on a

$$W_2 = f(n, k) \delta^{n+k} - g(n, k) \delta^{n+k}$$

D'où,

$$W = f(n, k) (b-a) \delta^{n+k-1} - [f(n, k) + g(n, k)] \delta^{n+k}$$

□

Remarque. On a pris $k \leq n-2$ pour ne pas avoir de division par 0 (on divise par $n-k$ et $n-k-1$). Cependant, dans le cas particulier $k = n-1$, les expressions de Y et Z concordent avec cette formule générale car on ne divise que par $n-k$ pour les obtenir. De plus, le cas $\forall y_i \geq a + \delta$ et $\wedge y_i < a + \delta$ qui correspond à W_2 est impossible pour $k = n-1$ (on a $\forall y_i = \wedge y_i$). Et de plus, $W_1 = \int_{a+\delta}^{b-\delta} (n\delta^{n-1})^2 dy_1 = n^2(b-a)\delta^{2n-2} - 2n^2\delta^{2n-1}$. Donc l'expression de W concorde également avec la formule générale.

Suite et fin de la preuve de la Proposition II.1

Il reste à calculer explicitement

$$\int_0^{\frac{k}{k+1}} t^{n-k-1} (1-t)^2 dt = \left(\frac{k}{k+1} \right)^{n-k} \left[\frac{1}{n-k} - \frac{2k}{(k+1)(n-k+1)} + \frac{k^2}{(k+1)^2(n-k+2)} \right]$$

On a donc

$$I(n, k) = W + Y + Z = f(n, k) (b-a) \delta^{n+k-1} - [f(n, k) + g(n, k) - 2C(n, k)] \delta^{n+k}$$

Pour obtenir des expressions plus simples, nous avons utilisé un logiciel de calcul formel (Mathematica). La simplification donne

$$f(n, k) = \frac{k(k+1) + n(n+1)}{n-k+1}$$

et

$$f(n, k) + g(n, k) - 2C(n, k) = h(n, k) = \frac{-k^3 + k^2(2+n) + k(5+2n-n^2) + n^3 + 2n^2 - n - 2}{(n-k+2)(n-k+1)}$$

A.2 Algorithmes

Tous les algorithmes présentés dans ce mémoire sont implémentés en R.

Avant de donner les algorithmes utilisés ici, nous allons expliciter l'implémentation des données neuronales. Si M représente le nombre d'essais et n le nombre de neurones, on considère une matrice D composée de $M \times n$ lignes. Les M premières lignes correspondent aux temps de spikes pour le premier neurone pendant les M essais. Et ainsi de suite, jusqu'aux M dernières lignes qui correspondent aux temps de spikes pour le dernier neurone pendant les M essais.

On note P la première colonne de D . Pour $i = 1 \cdots M$ et $k = 1 \cdots n$, on note $j = M(k-1) + i$, et la coordonnée P_j est égale au nombre de spikes pour le k -ème neurone pendant le i -ème essai. Le nombre de colonne de D est égal à $1 + \max_{j=1 \cdots M \times n} P_j$. Si on note L_j la j -ème ligne de D ôtée de sa première coordonnée (i.e. P_j), alors L_j contient les P_j temps de spikes ordonnés complétés par des zéros. Par exemple,

$$\begin{pmatrix} 4 & 0.06 & 0.1 & 0.15 & 0.19 \\ 4 & 0.05 & 0.09 & 0.17 & 0.18 \\ 1 & 0.13 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0.08 & 0.14 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A.2.1 Calcul nb de coïncidences

Algorithme 1 Tri des temps de spikes indexés

```
RecupTri<-fonction(DataNeur,n,Nneur,Jset)
## n représente l'essai que l'on souhaite récupérer
{ DataVrac=c(0,0);nbJ=length(Jset);Nessai=nrow(DataNeur)/Nneur
for (j in 1:nbJ)
  { indexedata=(Jset[j]-1)*Nessai+n
  Npts=DataNeur[indicedata,1]
  if (Npts>0)
    { X=DataNeur[indicedata,2:(Npts+1)]
    DataVrac=cbind(DataVrac,rbind(X,Jset[j]))
    ## Tous les points extraits labélisés
    }
  }
if (length(DataVrac)==2)
  {return(c())}
else
  { VracTri=DataVrac[,order(DataVrac[1,])] ## Les points extraits triés
  return(VracTri)
  }
}
```

Algorithme 2 Compte les coïncidences du vecteur trié

```
CompteCoin<-function(VracTri,delta,Jset)
{ i=2;j=3;Ncoin=0  ## i représente le min de la fenêtre de coïncidence,
## j représente le sup de la fenêtre de coïncidence
if (length(VracTri)>0)
  { NVrac=length(VracTri[1,])
  while (i<NVrac)
    { marque=VracTri[2,i]  ## l'étiquette du min
    if (j<NVrac)

      { while ((j<NVrac)&(VracTri[1,j]<=VracTri[1,i]+delta))
        ## On va chercher la borne sup
        { j=j+1 }
      }
    if (j==NVrac)
    { if (VracTri[1,j]<=VracTri[1,i]+delta)
      { j=j+1 }
    }
    Test=1
    for (k in Jset[-(marque)])
      { Test=Test*sum(VracTri[2,i:(j-1)]==k)
        ## Test donne le nb de coïncidences avec VracTri[1,i] comme min
      }

    Ncoin=Ncoin+Test
    i=i+1
  }
}
return(Ncoin)
}
```

Algorithme 3 Calcul du nombre de coïncidences

```
NbCoin<-function(DataNeur,Nneur,n,Jset,delta)
## Nb de coïncidences pour le n-ème essai pour une matrice de données
{ VracTri=RecupTri(DataNeur,n,Nneur,Jset)
Ncoin=CompteCoin(VracTri,delta,Jset)
return(Ncoin)
}

#####
#####

MoyEmpir<-function(DataNeur,Nneur,Jset,delta)
## Nb moyen de coïncidences et intensités empiriques pour Nessai essais
{ Nessai=nrow(DataNeur)/Nneur;N=rep(0,Nneur);M=rep(0,Nessai)
for (k in 1:Nessai)
  { M[k]=NbCoin(DataNeur,Nneur,k,Jset,delta) }
for (j in 1:Nneur)
  { N[j]=mean(DataNeur[((j-1)*Nessai+1):((j-1)*Nessai+Nessai),1])/(b-a) }
return(list(NbMoy=mean(M),LambdaEmpirique=N))
}
```

Grâce à ces trois programmes, on sait calculer rapidement⁴ \bar{m} , le nombre de coïncidences moyenné sur les M essais. Pour appliquer notre test (théorème II.2), il suffit de calculer \hat{m}_0 et $\hat{\sigma}^2$. Pour cela, il suffit d'implémenter le calcul explicite des $I(J, k)$ et des intensités empiriques $\hat{\lambda}_j$

A.2.2 Simulation de processus de Poisson

On utilise le résultat suivant :

Affirmation. Soit $T > 0$, $P_T \sim \mathcal{P}(\lambda T)$ et supposons que conditionnellement à $\{N_T = n\}$, S_1, \dots, S_n soient des variables aléatoires indépendantes, de loi uniforme sur $[0, T]$. Alors le processus de comptage associé à ces points est un processus de Poisson homogène d'intensité λ sur $[0, T]$.

Algorithme 4 Simulation des données neuronales

```
Procpois<-function(Nneur,Nessai,lambda,a,b)
## Simule Nessai fois Nneur processus de poisson d'intensités lambda (vecteur)
{ p=rep(0,Nneur*Nessai)
for (k in 1:Nneur)
  { p[(Nessai*(k-1)+1):(Nessai*k)]=rpois(Nessai,lambda[k]*(b-a)) }
T=matrix(0,ncol=max(p),nrow=Nneur*Nessai)
for (k in 1:(Nneur*Nessai))
  { if (p[k]>0)
    { T[k,1:p[k]]=sort(runif(p[k],a,b)) ## Simule la ligne Lk
    }
  }
DataNeur=cbind(p,T)
return(DataNeur)
}
```

4. En utilisant judicieusement l'ordre des temps de spike pour ne pas avoir à tester tous les J -uplet.

A.2.3 Simulation de processus de Hawkes

On suppose donné un programme qui simule des processus de Hawkes. Il se décompose en trois sous programmes :

1. A t fixé, on connaît \mathcal{F}_t , i.e. les points du processus avant t . On peut alors calculer l'intensité $\lambda(t)$.
2. On implémente une itération de l'algorithme de Thinning (Proposition IV.4).
3. A t fixé, on calcule $M(t)$ le majorant de l'intensité.

Pour expliquer la principale modification lors du passage aux processus de Hawkes bi-dépendants, il faut dire de quelle manière sont implémentées les fonctions d'interaction h .

On utilise des fonctions continues par morceaux. Elles sont représentées sous la forme de matrice à deux lignes.

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n & 0 \end{pmatrix}$$

La première ligne contient des temps positifs triés et la seconde contient les valeurs de la fonction h . Plus précisément, en notant $a_0 = 0$, pour $i = 1 \cdots n$, h vaut v_i sur $]a_{i-1}, a_i]$ et h vaut 0 sur $]a_n, +\infty[$.

Dans le cas des processus de Hawkes bi-dépendants, il faut gérer les fonctions de bi-interaction g qui sont des fonctions à deux variables. Elles sont implémentées de la façon suivante.

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & v_{11} & v_{12} & \cdots & 0 \\ b_2 & v_{21} & v_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ b_n & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La première ligne et la première colonne contiennent des temps positifs triés et la matrice intérieure contient les valeurs de la fonction g . Plus précisément, en notant $a_0 = b_0 = 0$ et $a_{n+1} = b_{n+1} = +\infty$, pour $i, j = 1 \cdots n$, g vaut v_{ij} sur $]b_{i-1}, b_i] \times]a_{j-1}, a_j]$.

Références

- [1] Pierre Brémaud. *Point processes and queues*. Springer-Verlag, New York, 1981. Martingale dynamics, Springer Series in Statistics.
- [2] Pierre Brémaud and Laurent Massoulié. Stability of nonlinear Hawkes processes. *Ann. Probab.*, 24(3) :1563–1588, 1996.
- [3] D. J. Daley and D. Vere-Jones. *An introduction to the theory of point processes. Vol. I*. Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag, New York, second edition, 2003. Elementary theory and methods.
- [4] Richard Durrett. *Essentials of stochastic processes*. Springer Texts in Statistics. Springer, New York, second edition, 2012.
- [5] Rick Durrett. *Probability : theory and examples*. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, fourth edition, 2010.
- [6] P. A. W. Lewis and G. S. Shedler. Simulation of nonhomogeneous Poisson processes by thinning. *Naval Res. Logist. Quart.*, 26(3) :403–413, 1979.
- [7] Jesper Møller and Jakob G. Rasmussen. Perfect simulation of Hawkes processes. *Adv. in Appl. Probab.*, 37(3) :629–646, 2005.
- [8] Yosihiko Ogata. On lewis simulation method for point processes. *IEEE Transactions on Information Theory*, 27(1) :23–30, 1981.
- [9] Christine Tuleau-Malot, Amel Rouis, Patricia Reynaud-Bouret, and Franck Grammont. Multiple Tests based on a Gaussian Approximation of the Unitary Events method. <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00757323>, November 2012.