Ecole de recherche ENS Lyon – janvier 2011
TD optimisation et convexité
Claude Lemaréchal, Jérôme Malick

TD – analyse convexe

Exercice 1 – Ensembles convexes de matrices. Soit $\mathcal{S}_n^{++}$ l'ensemble des matrices définies positives

$$\mathcal{S}_n^{++} = \{X \in \mathcal{S}_n : w^\top X w > 0, \text{pour tout } w \in \mathbb{R}^n, w \neq 0\},$$

et $\mathcal{S}_n^{+}$ l'ensemble des matrices positives (on dit aussi semi-définies positives)

$$\mathcal{S}_n^{+} = \{X \in \mathcal{S}_n : w^\top X w \geqslant 0, \text{pour tout } w \in \mathbb{R}^n\}.$$

a) Montrer que $\mathcal{S}_n^{++}$ et $\mathcal{S}_n^{+}$ sont convexes. Montrer que $\mathcal{S}_n^{+}$ est un cône. Qu'en est-il de $\mathcal{S}_n^{++}$?

b) Montrer que $\mathcal{S}_n^{+}$ est fermé. Quelle est l'adhérence de $\mathcal{S}_n^{++}$?

c) Montrer que $\mathcal{S}_n^{+} = \{X \in \mathcal{S}_n : \lambda_{\max}(-X) \leqslant 0\}$. Déduire la convexité de $\mathcal{S}_n^{+}$ par un autre argument.

Exercice 2 – Convexité et enveloppe.

a) Vérifier qu'un ensemble $C \subset \mathbb{R}^n$ est convexe si et seulement si $\forall\, \kappa \in \mathbb{N}$, $\forall\, x_i \in C$, $\forall\, \alpha_i \geqslant 0$ tels que $\sum_{i=1}^{\kappa} \alpha_i = 1$, on a $\sum_{i=1}^{\kappa} \alpha_i\, x_i \in C$.

b) L'enveloppe convexe d'un ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ est définie comme le plus petit ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$ contenant A – que l'on note $\operatorname{conv} A$. Montrer que

$$\operatorname{conv} A = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \exists\, \kappa \in \mathbb{N}, a_i \in A, \alpha_i \geqslant 0, \text{ tels que } x = \textstyle\sum_{i=1}^{\kappa} \alpha_i\, a_i \text{ et } \sum_{i=1}^{\kappa} \alpha_i = 1\}\,.$$

Exercice 3 – Fonctions convexes. Donner le domaine où les fonctions suivantes sont convexes

a) $f(x,y) = x + 2y + y^2$ définie sur $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}^2$.

b) $f(x,y) = x + 2y + y^2/x$ définie sur $\operatorname{dom} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$.

Exercice 4 – Fonctions supports. Calculer la fonction-support

$$\sigma_C(x) := \sup_{y \in C}\ x^\top y \qquad \text{pour } x \in \mathbb{R}^n$$

pour des sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ suivants :

a) C la boule euclidienne de rayon 1 ;

b) $C = (\mathbb{R}^+)^n$ l'orthant positif ;

c) $C = [a,b]$ le segment joinant deux points a et b dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 5 – Fonction conjuguée, exemples. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction quelconque. On rappelle que le domaine de f est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ définie par

$$\operatorname{dom} f = \{x \in \mathbb{R}^n : \ f(x) < +\infty\}\,.$$

On rappelle que $f^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ la fonction "conjuguée" de f est la fonction (convexe) définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad f^*(x) = \sup_{y \in \operatorname{dom} f} \left\{ x^\top y - f(y) \right\}.$$

Nous allons calculer explicitement f^* pour certaines fonctions f.

a) Pour $f_1(x) = \|x\|^2/2$ la demi-norme euclidienne au carré sur $\mathbb{R}^n$, montrer que $f_1^*(x) = f_1(x)$.

b) Pour la valeur absolue $f_2(y) = |y|$ sur $\mathbb{R}$, montrer que f_2^* est l'indicatrice du segment $[-1,1]$,

$$f_2^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-1,1] \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

En déduire f_3^* pour $f_3(y) = \|y\|_1$ la norme ℓ_1 sur $\mathbb{R}^n$.

c) (Préambule). Soit un réel $c > 0$ fixé pour toute la question. Considérons d'abord le problème

$$\begin{cases} \min & g(y) \\ & 0 \leqslant y < c, \end{cases}$$

avec $g\colon [0, c[\to \mathbb{R}$ convexe, différentiable et $\lim_{x\to c} g(x) = +\infty$. Montrer que

$$y^\star \text{ est solution} \iff \begin{cases} \text{soit} & y^\star = 0 & \text{et} & g'(0) \geqslant 0 \\ \text{soit} & y^\star > 0 & \text{et} & g'(y^\star) = 0. \end{cases}$$

(Calcul de conjuguée). En déduire que la fonction $f_c^*\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ définie par

$$f_c(y) = \begin{cases} \dfrac{y}{c-y} & \text{si } 0 \leqslant y < c \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

admet pour conjuguée

$$f_c^*(x) = \begin{cases} (\sqrt{cx} - 1)^2 & \text{si } x \geqslant 1/c \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 6 — Bi-conjuguée et convexification : exemple sur un problème avec contraintes d'intégrité. On considère le problème suivant dans $\mathbb{R}^2$ (p représentant des productions et d une demande)

$$F(d) := \begin{cases} \min & 5p_1 + 10p_2 \\ & p_1 + p_2 \geqslant d \\ & p \in \{0, 3\} \times [0, 1] \end{cases} \qquad (P_d)$$

a) Calculer en fonction de $d \in [0, 4]$, la solution optimale $p(d)$. Tracer le graphe de F.

b) Introduisant le lagrangien

$$L_0(p; \lambda) := -5p_1 + -10p_2 - \lambda(-p_1 - p_2)\,,$$

on va commencer par dualiser le problème (P_0). Calculer en fonction de $\lambda \geqslant 0$ le minimum p^λ du lagrangien. Tracer le graphe de la fonction duale résultante $\theta_0(\lambda)$.

c) Former maintenant le dual de (P_d), et exprimer sa fonction duale θ_d à partir de θ_0. Quel est le minimum de θ_d pour $d = 3$?

d) En s'aidant du graphe de F, calculer la conjuguée F^* ; constater que $F^* = \theta_0$.

e) En s'aidant du graphe de θ_0, calculer la conjuguée θ_0^* ; la tracer en surimpression sur le graphe de F et constater que c'est l'enveloppe convexe de F.

Exercice 7 — Retour sur la dualité. Avec les notation du cours, on considère le problème

$$\begin{cases} \max & \varphi(u) + V(c(u)) \\ & u \in U \end{cases}$$

où $V\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est une fonction positive et nulle à l'origine. On suppose qu'on dispose d'un oracle qui résout

$$\theta(\lambda) := \max_{u \in U} \varphi(u) - \lambda^\top c(u).$$

a) Introduisant une variable supplémentaire, écrire le dual du problème.

b) Appliquer le résultat avec $V = \|\cdot\|^2$ et $V = \|\cdot\|_1$.