

RÉSUMÉ DÉTAILLÉ DU COURS D'OPTIMISATION POUR LA FINANCE DE 2010

**Titre plus précis :** Utilisation de méthodes numériques d'optimisation en finance

**Objectif du cours :** La mise en oeuvre pratique des mathématiques financières requiert en pratique un travail d'ingénierie numérique, où l'optimisation a un rôle important. Par exemple, des méthodes d'optimisation sont utilisées en finance pour le pricing d'options, pour construire des fonds, pour calculer des bornes d'arbitrage, pour estimer le risque, pour gérer assets/liability, pour construire des couvertures,...

Dans ce cours, coup de projecteur sur l'utilisation de l'optimisation pour :

- la calibration de modèles
- l'aide à l'allocation d'actifs

**Le cours en un coup d'oeil :**

1. Rappels en optimisation
  - 1.1 Qu'est ce qu'un problème d'optimisation ?
  - 1.2 Résoudre un problème d'optimisation
  - 1.3 Quelques outils de base
2. Optimisation quadratique pour la gestion d'actifs
  - 2.1 Rappels sur l'optimisation quadratique
  - 2.2 Gestion d'actifs
  - 2.3 Mise en oeuvre pratique
  - 2.4 Evaluation d'une stratégie
3. Optimisation linéaire pour évaluation de risque
  - 3.1 Mesures de risque, Value-at-risk
  - 3.2 Conditional Value-at-risk, minimisation
4. Optimisation non-linéaire pour la calibration de modèles
  - 4.1 Schéma d'application
  - 4.2 Exemple : estimation de la volatilité

et ci-après, le résumé détaillé (2 pages)...

# 1 « Rappels » sur l'optimisation

## 1.1 Qu'est ce qu'un problème d'optimisation ?

- Forme générale, vocabulaire
- Exemples en Finance : gestion de portefeuille, calibration d'EDS
- Exemple : rappels d'optimisation linéaire

## 1.2 Résoudre un problème d'optimisation

- Ce qu'on voudrait vs. ce qu'on a souvent en pratique
- Situation agréable : problème (fortement) convexe

## 1.3 Quelques outils de base

- Existence, unicité
- Condition d'optimalité KKT
- Techniques de réécriture : séparabilité, variable d'écart, variable d'appui

# 2 Optimisation quadratique pour la gestion d'actifs

## 2.1 Rappels sur l'optimisation quadratique

- Forme générale
- Résolution explicite, exemple : solution explicite de problèmes d'allocation simples
- Résolution numérique, algorithmes, exemple : TP1

## 2.2 Gestion d'actifs

- Acteurs en jeu en gestion de portefeuille
- Stratégies (univers, gestion, choix)
- Modélisation (note historique, markowitz, notation)
- Modèles de sélection (min-vol, + actif sans risque, max-return, index-tracking)
- Frontière efficiente (avec ou sans actifs sans risque), résultats de convexité et de structure

## 2.3 Mise en oeuvre pratique

- Point-clé : estimation des paramètres
- Estimateurs ex-ante (vues, implicites, statistiques)
- Hypothèses : non-arbitrage, processus (faiblement) stationnaire
- Problèmes : sensibilité des décisions, sous-estimation du risque (théorie des matrices aléatoires)
- Calibration des covariances : technique simple, robustesse obtenue, exemple : TP2

## 2.4 Evaluation d'une stratégie

- Backtesting (intervalle d'estimation, correction, date de rebalancement)
- Estimateurs ex-post, indicateurs
- Dynamique : diversification, coûts de transactions...

# 3 Optimisation linéaire pour gérer les risques asymétriques

## 3.1 Mesures de risque, Value-at-risk

- Gérer le risque en finance
- Exemple : volatilité - Problème : symétrie
- Exemple : VaR, def, props - Problème : manque de convexité! (exemple simple contre-intuitif)
- Calculs : VaR normal, VaR empirique

### 3.2 Conditional Value-at-risk, minimisation

- CVaR, def, props
- Écriture comme un minimum (dont argmin est la VaR)
- Calculs : CVaR normal, CVaR empirique
- Allocation d'actifs par min-CVaR empirique : reformulation et optimisation linéaire
- Application en TP

## 4 Optimisation non-linéaire pour la calibration de modèles

### 4.1 Schéma d'application

- Contexte (modèles, EDS, résolution explicite ou numérique)
- Question : choisir les paramètres (hypothèses, statistiques, calibration)
- Pourquoi calibrer par les observations : - meilleurs modèles - évaluer des paramètres intrinsèques
- Comment calibrer ? Schéma standard d'application
- Optimisation :
  - 2 blocs : simulateur + optimiseur
  - méthodes d'optimisation non-linéaire différentiable classiques (Quasi-Newton, Gauss-Newton)
  - remarques pratiques (petites dimensions, minimum locaux, 1ers itérés,...)

### 4.2 Exemple : estimation de la volatilité

2 types de techniques :

- techniques historiques (ex : GARCH - ex : empirique corrigé, cf TP)
- techniques implicites (retrouver la vol en calibrant un modèle sur des observations)

On considère la seconde (il y a aussi de l'optimisation dans la 1ère...)

#### Vol constante : calibration simple

- Modèle BS, valeur d'une option à  $\sigma$  fixé
- Calibration facile par optimisation en 1D (line-search)
- Problème du smile, besoin d'un  $\sigma$  dynamique

#### Vol déterministe : calibration de la surface de vol

- Calibration : problème de contrôle optimal
- Restriction à un espace de dimension finie (splines bi-cubiques)
- Optimisation standard par Gauss-Newton des paramètres de la meilleure spline
- Calcul du gradient par différentiation automatique

#### Vol stochastique : calibration du modèle SABR

- Contexte (forward), modèles (normal, Black, SABR), valeur d'une option par les modèles
- Objectifs de SABR (modèle global pricant comme Black, collant au smile)
- Formule explicite de la vol en fonction de  $(\beta, \alpha, \rho, \nu)$  (+ formule at-the-money)
- Calibration de  $\beta$  par régression linéaire
- Calibration de  $(\alpha, \rho, \nu)$  par optimisation non-linéaire
- Robustification par ajout de contrainte at-the-money : résolution par SQP ou par pénalisation