Equations polynomiales à coefficients réels de degré au plus quatre
Factorisation dans |R et |C

1. Degré un

Théorème 1 : $\boxed{\text{Soit } a \in |R, \exists\,!\, x \in |R,\ x+a = 0}$

Preuve : $x = -a$

2. Degré deux (méthode du discriminant)

Théorème 2 : Soit $(a,b) \in |R^2, \exists\,!\, S=\{x_1,x_2\} \subset |C,\ \forall x \in S,\ x^2+a.x+b = 0$
De plus :
(1) si $a^2-4.b \geq 0$ alors $S \subset |R$.
(2) si $a^2-4.b = 0$ alors $x_1= x_2$.
(3) si $a^2-4.b < 0$ alors $x_1= \overline{x_2}$.

Preuve : (1) $a^2-4.b \geq 0$, $x_1= \dfrac{-a + \sqrt{a^2 - 4.b}}{2}$

$x_2= \dfrac{-a - \sqrt{a^2 - 4.b}}{2}$

(2) $a^2-4.b = 0$, $x = -a/2$.

(3) $a^2-4.b < 0$, $x_1= \dfrac{-a + i.\sqrt{4.b - a^2}}{2}$

$x_2= \dfrac{-a - i.\sqrt{4.b - a^2}}{2}$

3. Degré trois (méthode de Cardan)

Théorème 3 : $\boxed{\text{Soit } (a,b,c) \in |R^3, \exists\ x \in |R,\ x^3+a.x^2+b.x+c = 0}$

Preuve : Posons $X= x + a / 3$, $u = a^2/3 – b$, $v = c –a^3/27 +a^2/9 –a.b/3$, nous cherchons donc à résoudre $L(X)=X^3-u.X+v = 0$.

Posons maintenant $X = f+g$, $L(f+g)=(f^3+g^3+v) + (3.f.g-u)(f+g)$.

Donc si $f^3+g^3 = -v$ et si $f^3.g^3 = u^3/27$ alors $L(f+g) = 0$.

Soient r et s les racines de l'équation $Y^2+vY+u^3/27=0$ (théorème 2).

Premier cas, $r \in |R$, nous prenons $f =\sqrt[3]{r}$ et $g = \sqrt[3]{s}$.

Deuxième cas, $r \notin |R$, $r=m+i.n$ avec $(m,n) \in |R^2$, et r et s sont conjugués. Nous posons alors $f = \sqrt[3]{r}$.

Donc $f \in |C$, $f=c+i.d$ avec $(c,d) \in |R^2$. Puis nous posons $g = c-i.d$, alors $g^3= c^3-3.c.d^2 + i.(d^3-3.c^2.d)$.

Or $f^3=r=c^3-3.c.d^2 + i.(3.c^2.d – d^3) = m + i.n$. Donc $g^3=m-i.n=s$. D'où g convient bien.

Dans les deux cas nous posons finalement $x = f+g-a/3$.

4. Degré quatre

Théorème 4 : $\boxed{\text{Soit } (a,b,c,d) \in |R^4, \exists\ (e,f,g,h) \in |R^4,\ x^4+a.x^3+b.x^2+c.x+d = (x^2+e.x+f).(x^2+g.x+h)}$

Preuve : Posons $X= x + a / 4$, $\beta = b-3.a^2/4$, $\chi= c-a^3/16-a/2.(b-3.a^2/4)$, $\delta=a^2/16.(b-3.a^2/4)-a/4.(c-a^3/16)+d-a^4/256$.

Il reste donc à factoriser $L(X)=X^4+\beta.X^2+\chi.X+\delta$. Cherchons u, v et w tels que $L(X)=(X^2+u)^2-(w.X-v)^2$.

Il faudrait $\beta=2.u-w^2$ (4) ; $\chi=2.v.w$ (5) ; $\delta=u^2-v^2$ (6). Soit $v^2=u^2-\delta$ (6') et $w^2=2.u-\beta$ (4'), puis $(v.w)^2=\chi^2/4$ (5') avec v.w du signe de χ (5'').

D'où, (6')×(4') puis (5') : $2.u^3-\beta.u^2-2.\delta.u+(\delta.\beta-\chi^2/4) = 0$, de degré trois ! ! !

Le théorème 3 nous donne alors u, puis (6'), (4') et (5'') nous donnent v et w. On a alors $L(X)=(X^2-w.X+u+v)(X^2+w.X+u-v)$.

Donc comme $X=x+a / 4$, on obtient finalement :

$x^4+a.x^3+b.x^2+c.x+d = (x^2+[a/2-w].x + u + v + a^2/16 - w.a/4) . (x^2+[a/2+w].x + u – v + a^2/16 + w.a/4)$

5. Á suivre

Il a été démontré qu'il est généralement impossible d'exprimer une racine réelle d'un polynôme de degré cinq sous forme de sommes ou produits de radicaux i-èmes **[É.Galois, 1832]**.