Moyenne du nombre de tirages pour une réalisation

Jean-Guillaume Dumas

8 septembre 2020

Théorème 1. *Soit N une variable aléatoire représentant l'occurence de la première réalisation d'un évènement de probabilité d'apparition $\frac{1}{p}$. L'espérance du nombre de tirages nécessaires pour voir cette première réalisation est p.*

Démonstration. La première occurence apparaît après k tirages si les $k-1$ premiers sont négatifs et le dernier positif, soit : $\mathcal{P}(N=1)=\frac{1}{p}$, $\mathcal{P}(N=2)=\frac{p-1}{p}\frac{1}{p}$, ..., $\mathcal{P}(N=k)=\left(\frac{p-1}{p}\right)^{k-1}\frac{1}{p}$.

D'où l'on tire immédiatement l'espérance,

$$\mathcal{E}(N)=\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot\mathcal{P}(N=k)=\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot\left(\frac{p-1}{p}\right)^{k-1}\frac{1}{p}=\frac{1}{p}\left(\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot\left(\frac{p-1}{p}\right)^{k-1}\right)$$

Or, si $0<r<1$ on a :

$$\sum_{k=1}^{\infty} kr^{k-1}=\left(\sum_{k=0}^{\infty} r^k\right)'=\left(\frac{1}{1-r}\right)'=\frac{1}{(1-r)^2}.$$

Ainsi,

$$\mathcal{E}(N)=\frac{1}{p}\frac{1}{\left(1-\frac{p-1}{p}\right)^2}=\frac{1}{p}\left(\frac{p}{p-p+1}\right)^2=p$$

□

Nous en déduisons l'espérance du collectionneur de vignettes : à partir de tirages avec remises, combine de tirages sont nécessaires pour obtenir tous les représentants d'une collection ?

Corollaire 2. *Soit T une variable aléatoire représentant le nombre de vignettes achetées avant d'obtenir la collection complète, alors, pour $\gamma \approx 0.577$ la constante d'Euler, son espérance vérifie :*

$$\mathcal{E}(T)=n(\ln(n)+\gamma)+\frac{1}{2}-\frac{1}{12n}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Démonstration. Une fois toutes les autres vignettes obtenues, la dernière vignette est obtenue avec proabilité $\frac{1}{n}$, donc l'espérance du nombre de tirage supplémentaires pour l'obtenir est n. La pénultième vignette a été obtenue avec probabilité $\frac{2}{n}$ et donc en moyenne après $\frac{n}{2}$ tirages, ... Au total, pour $\mathcal{H}_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$ le n-ième nombre harmonique :

$$\mathcal{E}(T)=\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{i}=n\mathcal{H}_n.$$

Or $\mathcal{H}_n=\ln(n)+\gamma+\frac{1}{2n}-\frac{1}{12n^2}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)$. □