Equations différentielles linéaires du premier ordre : $\alpha(x).y' = F(x,y)$

Feuille 11 - Exercice 3 : Soit $(\mathcal{E}_0)$: $x(x^2-1)y' + 2y = x^2$, l'ensemble des solutions de cette équation est noté $\mathcal{S}_0$.

1 Domaine de résolution

On résout l'équation différentielle sur un intervalle où elle est définie, ici $\mathbb{R}$. On va commencer par résoudre de manière générale sur un intervalle sur lequel $\alpha(x) = x(x^2-1)$ ne s'annule pas, puis on raccordera, lorsque cela est possible, aux bornes de ces intervalles :
$I_1 =]-\infty, -1[; I_2 =]-1, 0[; I_3 =]0, 1[; I_4 =]1, +\infty[$.
Ainsi, sur $I_i, y' = \frac{-2}{x(x^2-1)}.y + \frac{x^2}{x(x^2-1)} = f(x,y) = \beta(x).y + \gamma(x)$: $(\mathcal{E}_1)$.

2 Déterminer toutes les solutions de l'équation $(\mathcal{E}_0)$.

2.1 Système homogène : $y' = \frac{-2y}{x(x^2-1)}$: $(\mathcal{E}_2)$

L'ensemble $\mathcal{S}_{2,I_i}$ des solutions de ce système est un espace vectoriel de dimension 1. Pour trouver toutes les solutions de ce système il suffit donc d'en trouver une base, c'est-à-dire de trouver *une* solution. N'importe laquelle des trois méthodes suivantes est acceptable : l'intuition est la méthode la plus rapide, l'analyse synthèse est la méthode classique qui demande beaucoup de rigueur, l'utilisation du théorème viendra d'une bonne maitrise de la méthode précédente.

2.1.1 Intuition

On peut exhiber une fonction puis, en l'injectant dans l'équation, prouver qu'elle est solution de $(\mathcal{E}_2)$.
Dans le cas de l'exercice je ne vois pas de solution évidente, j'utilise donc une autre méthode.

2.1.2 Analyse et synthèse

Analyse : *supposons* qu'il existe une solution y_2 de l'équation qui ne s'annule jamais (c'est gonflé comme supposition, il n'y a aucune raison apparente pour qu'il en existe une, mais cela va marcher !!!). On peut donc diviser et notre y_2 doit donc vérifier l'équation suivante :
$\frac{y_2'}{y_2} = \beta(x)$: $(\mathcal{E}_3)$. En intégrant ces deux fonctions continues on obtient que y_2 vérifie : $\exists(x_2, k_2) \in I_i \times \mathbb{R}, y_2 = \exp(\int_{x_2}^{x} \beta(x)dt + k_2)$: $(\mathcal{E}_4)$ (*ATTENTION, cela ne veut pas dire* $\forall(x_2,k_2)$ *et cela ne veut pas dire non plus que toutes les solutions sont de cette forme*).

Synthèse : ainsi, il est possible qu'une fonction vérifiant $(\mathcal{E}_4)$ vérifie $(\mathcal{E}_2)$ (on n'en sait rien puisque pour arriver à $(\mathcal{E}_4)$ on a eu besoin d'une hypothèse supplémentaire, dont on n'a pas prouvé la validité, qui est l'existence d'une solution ne s'annulant pas). Je choisis donc *une* solution de $(\mathcal{E}_4)$ et je vérifie quelle est bien solution de $(\mathcal{E}_2)$.

En fait on vient ici de redémontrer le théorème de la section suivante.

2.1.3 Thérorème

Sur I_i, une base de l'ensemble des solutions est $y_2 = \exp(\int_{x_2}^{x} \frac{-2}{t(t^2-1)}dt + k_2)$ pour un couple $(x_2, k_2) \in I_i \times \mathbb{R}$. Or $\frac{-2}{t(t^2-1)} = \frac{2}{t} - \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}$, donc, par exemple, $y_2 = \exp(2\ln|x| - \ln|x+1| - \ln|x-1|)$ est une base de l'ensemble des solutions.

(Je dois en choisir une, j'ai donc choisi, pour simplifier, celle pour laquelle $k_2 = -\exp(2\ln|x_2| - \ln|x_2+1| - \ln|x_2-1|)$.

Du coup :
- Soit y une solution de $(\mathcal{E}_2)$ sur I_1 ou I_4 : $\exists C \in \mathbb{R}, y = C\frac{x^2}{x^2-1}$
- Soit y une solution de $(\mathcal{E}_2)$ sur I_2 ou I_3 : $\exists C \in \mathbb{R}, y = C\frac{x^2}{1-x^2} = -C\frac{x^2}{x^2-1}$

En conclusion (parce que l'on a de la chance), la forme des solutions est la même sur les quatre intervalles (il suffit de poser $\lambda = -C$).

2.2 Solution Particulière : $(\mathcal{E}_1)$

On veut maintenant toutes les solutions de l'équation $(\mathcal{E}_1)$. Soit y_1 une solution de $(\mathcal{E}_1)$, alors $\mathcal{S}_{1,I_i} = \{y : I_i \to \mathbb{R}, \exists C \in \mathbb{R}, y = y_1 + C.y_2\}$. En effet, $y - y_1$ est solution de $(\mathcal{E}_2)$. Il suffit donc de trouver *une* solution particulière.

2.2.1 Intuition

On peut exhiber une fonction puis, en l'injectant dans l'équation, prouver qu'elle est solution de $(\mathcal{E}_1)$.
Dans le cas de l'exercice je ne vois pas de solution évidente, j'utilise donc une autre méthode.

2.2.2 Analyse et synthèse (méthode de variation de la constante).

Analyse Soit y_2 une solution de $(\mathcal{E}_2)$ ne s'annulant pas sur I_i et *supposons* qu'il existe une solution y de $(\mathcal{E}_1)$ sur I_i, alors je pose $C(x) = \frac{y(x)}{y_2(x)}$.
Ainsi $y = y_2C$ donc $y' = y_2'C + y_2C'$. Or $y_2' = \beta y_2$ donc on a $y' = \beta y_2 C + y_2 C'$ et d'où $y' = \beta y + y_2 C'$. De plus $y' = \beta y + \gamma$ donc $\gamma = y_2 C'$. Et comme y_2 ne s'annule jamais sur I_i on obtient $C' = \frac{\gamma}{y_2}$.

Synthèse je choisis une fonction $y = y_2(x)(\int_{x_1}^{x} \frac{\gamma(t)}{y_2(t)}dt + k_1)$ et je vérifie que $y \in \mathcal{S}_{1,I_i}$. En fait on vient ici de redémontrer le théorème de la section suivante.

2.2.3 Théorème

Soit $y_2 \in \mathcal{S}_{2,I_i}$, *une* solution particulière de $(\mathcal{E}_1)$ est $y_1 = y_2(x)(\int_{x_1}^{x} \frac{\gamma(t)}{y_2(t)}dt + k_1)$ pour un couple $(x_1, k_1) \in I_i \times \mathbb{R}$. Du coup :
Sur I_i, je choisis $y_2 = \frac{x^2}{x^2-1}$ et alors $C' = \frac{\frac{x^2}{x(x^2-1)}}{\frac{x^2}{x^2-1}} = \frac{1}{x}$ je choisis alors $C = \ln|x|$ comme primitive, ce qui revient à choisir comme solution particulière : $\frac{x^2 \ln|x|}{x^2-1}$. Ainsi la solution générale sur un des intervalles : $\mathcal{S}_{1,I_i} = \{y : I_i \to \mathbb{R}, \exists C \in \mathbb{R}, y = x^2\frac{C+\ln|x|}{x^2-1}\}$.

2.3 Raccordement des solutions : $(\mathcal{E}_0)$

Il s'agit ici d'essayer de trouver des solutions qui "enjambent" les intervalles I_i. Il faudra donc utiliser une solution g_1 sur I_i et une solution g_2 sur I_{i+1} puis de raccorder de manière continue, dérivable et à dérivée continue au point limite commun de I_i et I_{i+1}. Il faudra ensuite raccorder avec I_{i+2} ...
Soit x_0 un point limite, donc tel que $\alpha(x_0) = 0$. La solution g doit donc vérifier les conditions suivantes :

1. $g(x_0)$ tel que $F(x_0, g(x_0)) = \alpha(x_0) = 0$.
2. g est continue en x_0 (i.e. $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} g(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} g(x) = g(x_0)$).

3. $g'(x_0)$ tel que g soit dérivable en x_0 (i.e. $\lim_{h \stackrel{>}{\to} 0} \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$ et $\lim_{h \stackrel{<}{\to} 0} \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$ existent, sont finies et sont égales à $g'(x_0)$).

4. g est à dérivée continue (i.e. $\lim_{x \stackrel{>}{\to} 0} g'(x) = \lim_{x \stackrel{<}{\to} 0} g'(x) = g'(x_0)$).

Regardons la limite **entre** I_1 **et** I_2 : Nous voulons une fonction g qui soit solution de $\mathcal{E}_0$ sur I_1, en -1 et sur I_2. Nous prenons donc une solution g_1 sur I_1 et une solution g_2 sur I_2. Nous calculons ensuite $g(-1)$: il faut $2.g(-1) = (-1)^2$, d'où $g(-1) = \frac{1}{2}$. Et nous devons alors essayer de coller les morceaux.

Soit $g_1 \in \mathcal{S}_{1,I_1}, \exists \lambda_1 \in \mathbb{R}, \forall x \in I_1, g_1(x) = x^2 \frac{\lambda_1 + \ln|x|}{x^2-1}$, alors $\forall \lambda_1 \neq 0$, $\lim\limits_{x \stackrel{<}{\to} -1} g_1(x) = \infty$. Si $\lambda_1 = 0$, alors $g_1(x) = x^2 \frac{\ln|x|}{x^2-1} = x^2 (\frac{\ln|x|}{2(x-1)} - \frac{\ln|x|}{2(x+1)}$. Donc comme le premier terme tends vers 0 et que $\frac{\ln|x|}{x+1} \underset{-1}{\sim} -\frac{x+1}{x+1} = -1$ (car $ln(1-h) = -h - \frac{h^2}{2} + o(h^2)$) alors $\lim\limits_{x \stackrel{<}{\to} -1} g_1(x) = \frac{1}{2}$. La seule possibilité pour avoir g continue est donc $\lambda_1 = 0$. De la même manière, il faut que λ_2 définissant g_2 soit nul. Il reste à voir deux conditions : la dérivabilité et la continuité de la dérivée.

$g : I_2 \bigcup \{0\} \bigcup I_3 \to \mathbb{R}$
Si $x < -1$ $\quad g(x) = x^2 \frac{\ln|x|}{x^2-1}$.
Si $x = -1$ $\quad g(x) = \frac{1}{2}$.
Si $x > -1$ $\quad g(x) = x^2 \frac{\ln|x|}{x^2-1}$.

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{g(-1+h)-g(-1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (h-1)^2 \frac{2\ln|1-h|-(h^2-2h)}{-4h^2+2h^3} = \frac{1}{2}$ toujours d'après le développement limité de $ln(1-h)$. Donc g est dérivable en -1 et $g'(-1) = \frac{1}{2}$. Enfin, si $x \neq -1$, $g'(x) = \frac{x^2-2g}{x(x^2-1)} = x\frac{x^2-1-2\ln|x|}{(x^2-1)^2}$, donc avec $h = x+1$, on obtient $g'(h-1) = (h-1)\frac{h^2-2h+2h+h^2}{4h^2-4h^3+h^4} \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}$. Donc on a bien g à dérivée continue et donc est la seule fonction solution de $\mathcal{E}_0$ sur $]-\infty, 0[$.

Entre I_2 **et** I_3 : Soit $g_2 \in \mathcal{S}_{1,I_2}, \exists \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall x \in I_2, g_2(x) = x^2 \frac{\lambda_2 + \ln|x|}{x^2-1}$ et soit $g_3 \in \mathcal{S}_{1,I_3}, \exists \lambda_3 \in \mathbb{R}, \forall x \in I_3, g_3(x) = x^2 \frac{\lambda_3 + \ln|x|}{x^2-1}$. Alors $\lim\limits_{x \stackrel{<}{\to} 0} g_2(x) = \lim\limits_{x \stackrel{>}{\to} 0} g_3(x) = 0$. D'où l'on peut définir la fonction suivante :

$g : I_2 \bigcup \{0\} \bigcup I_3 \to \mathbb{R}$
Si $-1 < x < 0$ $\quad g(x) = g_2(x)$.
Si $x = 0$ $\quad g(x) = 0$.
Si $0 < x < 1$ $\quad g(x) = g_3(x)$.

Pour être solution, g doit vérifier les quatre conditions précédentes. La deuxième est vérifiée par construction. Pour la première, il faut $2.g(0) = 0^2$, O.K.
En outre, $\lim\limits_{h \stackrel{<}{\to} 0} \frac{g(0+h)-g(0)}{h} = \lim\limits_{h \stackrel{<}{\to} 0} \frac{g_2(h)}{h} = \lim\limits_{h \stackrel{>}{\to} 0} \frac{g(0+h)-g(0)}{h} = \lim\limits_{h \stackrel{>}{\to} 0} \frac{g_3(h)}{h} = 0$, nous pouvons donc poser $g'(0) = 0$ et g est bien dérivable en 0.
Enfin, $g_2' = \frac{-2.g_2+x^2}{x.(x^2-1)} = x\frac{-2\lambda_2 - 2\ln|x| + x^3 - x}{(x^2-1)^2}$, donc $\lim\limits_{x \stackrel{<}{\to} 0} g_2'(x) = g_2'(0)$. De même pour g_3' donc g est bien à dérivée continue en 0.

En conclusion on a une infinité de solutions à $(\mathcal{E}_0)$ sur $]-1, 1[$ (avec n'importe quelle branche à gauche et n'importe quelle branche à droite) et une seule solution sur $]-\infty, 1[$.

Enfin, l'étude un 1 étant identique à celle en -1, on en conclut qu'il existe une et une seule fonction solution de $\mathcal{E}_0$ sur $\mathbb{R}$.

3 Etude géométrique

3.1 Recherche des isoclines

Les isoclines sont les courbes d'équation : $f(x, y) = c$ avec c une constante de I_i. Elles correspondent donc à des courbes de niveau des points du plan, solution de l'équation différentielle, de même pente.
En général cette équation est simple pour la pente zéro, et relativement simple pour les autres pentes.

Donc l'isocline de pente 0 est la courbe d'équation $f(x, y) = 0$.
Or, sur $I_i, x(x^2 - 1) \neq 0$ donc $(f(x, y) = 0) \Rightarrow (y = \frac{x^2}{2})$

Soit $c \in \mathbb{R}$, l'isocline de pente c est la courbe d'équation $y = \frac{x^2}{2} - c\frac{x(x^2-1)}{2}$.

Courbe à tracer en marquant bien les endroits où elle n'est pas définie (en -1, 0 et 1) et en indiquant, tout le long de la courbe (i.e. en quelques points régulièrement espacés), que la tangente en ce point, de la solution passant par ce point, est de pente 0 (resp. c) (i.e. quelques traits horizontaux (resp. de pente c) régulièrement espacés sur la courbe ...).

3.2 Points d'inflexion

Un point d'inflexion d'une fonction solution est un point extrémum de sa dérivée. Une condition nécessaire pour être point d'inflexion est d'annuler la dérivée seconde. Cherchons le lieu des points annulateurs de cette dernière sur un des I_i.
$y''(x) = f'(x, y) = \frac{x^2(x^2-1-2*x^2)-2*(y'*(x^3-x)-y*(3*x^2-1))}{x^2(x^2-1)^2} = \frac{-x^4+6*y(x)*x^2-3*x^2+2*y(x)}{x^2(x^2-1)^2}$. D'où l'on tire : sur I_i, $(y'' = 0) \Rightarrow (y(x) = \frac{x^2}{6} + \frac{4x^2}{9x^2+3})$.

4 Approximation numérique

Si l'on n'a pu déterminer de manière exacte les solutions de l'équation différentielle, ou si ces solutions sont trop complexes, il est possible d'obtenir une "visualisation" des solutions par approximations numériques.

4.1 Méthode d'Euler

On se place en un point départ (x_0, y_0), se trouvant sur une solution, puis on suit l'isocline de pente $y'_0 = f(x_0, y_0)$ pour un pas de calcul h. On obtient un nouveau point (x_1, y_1) (qui se trouve sur *une autre solution* mais pas trop éloignée de la première) et alors on suit l'isocline de pente $y'_1 = f(x_1, y_1)$ ...
D'où l'algorithme : $y \leftarrow y + h * f(x, y)$; $x \leftarrow x + h$;

4.2 Autres méthodes

Les autres méthodes classiques comme "Midpoint Euler", "Hem" ou encore "Runge Kutta" sont des raffinements de la méthode d'Euler prenant plus de points intermédiaires pour limiter la dérive de l'approximation par rapport à la courbe réelle.

5 Tracé des courbes