Dérivabilité, différentiabilité

Jean-Guillaume.Dumas@imag.fr

Janvier 1998

1 Rappels : Limites, continuité

Dans la suite, Ω et Γ seront deux ensembles normés .

DÉFINITION 1.1. *Limite*
Soient $x_0 \in \Omega$, $b \in \Gamma$ *et* $f : \Omega \to \Gamma$. *On dit que* $f(x)$ *tend vers* b *quand* x *tend vers* x_0, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$ *si et seulement si* $\forall \epsilon > 0, \exists \lambda \in I\!R, \forall x \in \Omega, (||x - x_0||_\Omega < \lambda) \Rightarrow (||f(x) - b||_\Gamma < \epsilon)$.

Dans un espace ordonné (ici nous considèrerons seulement le cas de $I\!R$) nous pouvons introduire les notions de limite à droite et à gauche de la manière suivante :

DÉFINITION 1.2. *Limite à droite*
Soient $x_0 \in \Omega \subset I\!R$, $b \in \Gamma$ *et* $f : \Omega \subset I\!R \to \Gamma$. *On dit que* $f(x)$ *possède une limite à droite* b *quand* x *tend vers* x_0, $\lim\limits_{x \overset{\leq}{\rightarrow} x_0} f(x) = b$ *si et seulement si* $\forall \epsilon > 0, \exists \lambda > 0, \forall x \in \Omega, (0 < x - x_0 < \lambda) \Rightarrow (||f(x) - b||_\Gamma < \epsilon)$.

La limite à gauche de $f(x)$, $\lim\limits_{x \overset{\geq}{\rightarrow} x_0} f(x)$ est définie de manière symmétrique.

PROPOSITION 1.3. *Si les limites à droite et à gauche existent et sont égales alors la limite existe.*

Démonstration. $\lim\limits_{x \overset{\geq}{\rightarrow} x_0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{\leq}{\rightarrow} x_0} f(x) = b$. Soit $\epsilon > 0$ alors la limite à droite nous donne un λ_1 tel que $\forall x, (0 < x - x_0 < \lambda_1) \Rightarrow (||f(x) - b||_\Gamma < \epsilon)$. De même, la limite à gauche nous donne un λ_2 tel que $\forall x, (0 < x_0 - x < \lambda_2) \Rightarrow (||f(x) - b||_\Gamma < \epsilon)$. Nous posons alors $\lambda = min(\lambda_1, \lambda_2)$ et la conjonction des deux implications précédentes, donnant $\forall x, (|x - x_0| < \lambda) \Rightarrow (||f(x) - b||_\Gamma < \epsilon)$, prouve la proposition. $\square$

DÉFINITION 1.4. *Continuité*
Soient $x_0 \in \Omega$ *et* $f : I\!R \to \Gamma$. *On dit que* f *est continue en* x_0 *si et seulement si* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Bien sûr, il est possible de définir de même les notions de continuité à droite et à gauche.

2 Dérivabilité, Différentiabilité

2.1 Dérivée d'une fonction réelle d'une variable réelle

DÉFINITION 2.1. *Dérivée*
Soient $x_0 \in \Omega$ *et* $f : \Omega \subset I\!R \to I\!R$. *On dit que* f *est dérivable en* x_0 *si et seulement si* $\lim\limits_{x \overset{\neq}{\to} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *existe. Dans ce cas, la limite est appelée dérivée de* f *en* x_0 *et est notée* $f'(x_0)$.

DÉFINITION 2.2. *Fonction dérivée*

Soit $f : \Omega \subset I\!R \to I\!R$. *On appelle fonction dérivée de* f *la fonction* $D_f : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & I\!R \\ x & \hookrightarrow & f'(x) \end{array}$. *On note aussi* $D_f = f'$.

2.2 Vecteur dérivé d'une fonction d'une variable réelle

Considérons une application $f : \Omega \subset \mathrm{I\!R} \to \Gamma$. On peut alors donner un sens, pour $x_0 \in \Omega$, à la formule suivante : $f'(x_0) = \lim\limits_{x \overset{\neq}{\to} x_0, x \in \Omega} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. En effet, dans le deuxième membre, nous avons la différence de deux vecteurs $f(x)-f(x_0)$. On peut ensuite diviser ce vecteur par un scalaire non nul $x-x_0$. Enfin, la limite a été définie dans la section 1 de manière générique pour tout espace normé. Si $f'(x_0)$ ainsi définie existe, on l'appelle le vecteur *dérivé* de f en x_0.

2.3 Différentielle

Pour des raisons de simplicité, on se place ici dans $\Omega \subset \mathrm{I\!R}^n$ et $\Gamma \subset \mathrm{I\!R}^p$. Le lecteur vérifiera quel la présente section reste valable dans un espace affine quelconque. $(\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n})$ et $(\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_p})$ sont des bases respectives de $\mathrm{I\!R}^n$ et $\mathrm{I\!R}^p$. Toute application f de $\mathrm{I\!R}^n$ dans $\mathrm{I\!R}^p$ peut s'écrire comme la somme de ses applications coordonnées dans la base F : $\forall x \in \mathrm{I\!R}^n, f(x) = \sum\limits_{i=1}^{p} F_i(x)\vec{f_i}$.

2.3.1 Dérivée partielle suivant un vecteur

Définition 2.3. *Dérivée partielle suivant un vecteur*
Soit f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On appelle dérivée partielle suivant un vecteur $\vec{V} \in \mathbb{R}^n$, la dérivée en 0 si elle existe de la fonction $t \hookrightarrow f(x + t\vec{V})$. Elle se note $D_{\vec{V}} f(x)$. Les dérivées suivant les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ sont appelées les dérivées partielles de f. On les note $D_{\vec{e_j}} f(x) = \delta_j f(x) = \frac{\delta f}{\delta x_j}(x) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\delta F_i}{\delta x_j}(x) \vec{f_i}$.

Définition 2.4. *Jacobien*
La matrice des $\frac{\delta F_i}{\delta x_j}$ est appelée la Jacobienne *de f. Dans le cas où $n = p$ le déterminant de cette matrice est appellé le* Jacobien *de f.*

Malheureusement, la notion de dérivée suivant un vecteur est insuffisante. En effet une fonction peut avoir une dérivée partielle en tout point suivant tout vecteur sans être continue (voir, par exemple, [Sch92] pour plus de détails) !

2.3.2 Dérivée totale et différentielle

Définition 2.5. *Dérivée totale*
Soit f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. f admet une dérivée totale, L_x, en x si L_x est une application linéaire continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ et si $\forall \vec{h} \in \mathbb{R}^n, f(x + \vec{h}) = f(x) + L_x(\vec{h}) + o(||\vec{h}||)$. Dans ce cas, on dit que f est différentiable au point x et on note également $L_x = df_x$.

Notons $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. Alors, par exemple, $L_x \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$.

Définition 2.6. *Différentielle*
Si f est différentiable en tout point, l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ qui au point x associe la dérivée totale de f en x est appelée application différentielle de f ou encore différentielle de f et est notée df.

Attention

- La dérivée totale df_x est une application linéaire (une matrice !) qui est fixée dès que que le point x l'est et est définie sur $\mathbb{R}^n$ tout entier.
- La différentielle df est une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ et fait donc correspondre une matrice à un vecteur.

3 Retour sur terre

3.1 Encore un peu d'apesanteur

Prenons un exemple : supposons que u est une application linéaire, alors $u(x+h) = u(x) + u(h)$. Donc u est sa propre dérivée totale en tout point : $du_x = u$ et, du coup, sa différentielle du est l'application constante

$$du : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \\ x & \hookrightarrow & u \end{array} .$$

On peut alors commencer les abus de notation. Soit d'abord la fonction identité qui à un point x associe x. Notons la I. C'est une application linéaire, alors $dI : x \hookrightarrow (dI_x : h \hookrightarrow h)$. Seulement (pour simplifier ?) on a coutume de noter I simplement x. Ceci peut alors nous donner la fonction $x : x \hookrightarrow x$ qui a pour différentielle $dx : x \hookrightarrow (dx_x : x \hookrightarrow x)$; limpide non ?

3.2 Le plancher des vaches

Nous revenons au cas de la dimension 1. Supposons que nous ayons une fonction f dérivable en x. La formule $f'(x) = \lim\limits_{h \overset{\neq}{\to} 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ peut s'écrire également $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + o(h)$. Du coup f est différentiable et $df : x \hookrightarrow (df_x : h \hookrightarrow hf'(x))$. En utilisant le paragraphe précédent, nous pouvons donc maintenant écrire la fonction rapport des deux différentielles comme la fonction : $\frac{df}{dx} : x \hookrightarrow (\frac{df_x}{dx_x} : h \hookrightarrow \frac{hf'(x)}{h})$. Pour tout x on peut prolonger $\frac{df_x}{dx_x}$ par continuité en $h = 0$ et on obtient alors $\frac{df}{dx}(x) = \frac{df_x}{dx_x} : h \hookrightarrow f'(x)$ (la fonction constante qui pour tout h associe la même valeur $f'(x)$). C'est là qu'intervient le dernier abus de langage qui consiste à désigner une fonction constante par sa valeur. On obtient au final la merveilleuse formule : $\frac{df}{dx}(x) = f'(x)$, qui est abusée une dernière fois en $\boxed{\frac{df}{dx} = f'}$.

Références

[Lan97] Serge Lang. *Undergraduate analysis.* Undergraduate texts in mathematics. Springer, 1997.

[Pom94] Alain Pommellet. *Cours d'Analyse.* Agrégation de Mathématiques. Ellipses, 1994.

[Sch92] Laurent Schwartz. *Analyse II.* Enseignement des sciences. Hermann, 1992.