Résolution d'une équation aux dérivées partielles par une méthode de Monte-Carlo

2002

1 Sujet

On s'intéresse à la résolution d'un problème de Dirichlet simple. On recherche une fonction harmonique f définie sur un domaine $\mathcal{D}$ telle que f vérifie une condition $f = g$ sur le bord $\delta\mathcal{D}$, où g est une fonction donnée.

$$\begin{cases} \Delta f(x) = 0, & \text{si } x \in \mathcal{D} \\ f(x) = g(x), & \text{si } x \in \delta\mathcal{D} \end{cases}$$

Dans un premier temps on discrétise le domaine $\mathcal{D}$ par une grille de pas h (inverse d'un entier). L'équation discrétisée correspond au problème de Dirichlet s'écrit :

$$f(x) = 1/4 \textstyle\sum_{y \in V_x} f(y), \text{ si } x \in \mathcal{D} - \delta\mathcal{D}$$

où V_x représente l'ensemble des voisins de x sur la grille. Pour calculer la valeur de f en un point x de la grille, on construit une marche aléatoire qui part du point x avec la probabilité $1/4$ vers l'un des voisins sur la grille, on recommence à partir de ce point jusqu'à toucher le bord du domaine. Lorsque l'on touche le bord du domaine en un point y, on évalue la valeur $g(y)$.

On génère ensuite un ensemble de n marche aléatoire et on estime $f(x)$ par la moyenne arithmétique :

$$f(x) \approx 1/n \sum_{i=1}^{n} g(y_i)$$

L'objectif du projet est donc de calculer f en tout point du domaine $\mathcal{D}$, en fonction du pas de discrétisation et du nombre n de trajectoires générées.