ÉNUMÉRATION DES HYPERGRAPHES CONNEXES b-UNIFORMES

Tsiriniaina ANDRIAMAMPIANINA et
Vlady RAVELOMANANA

Plan :

I- Introduction

II- Enumérations exactes

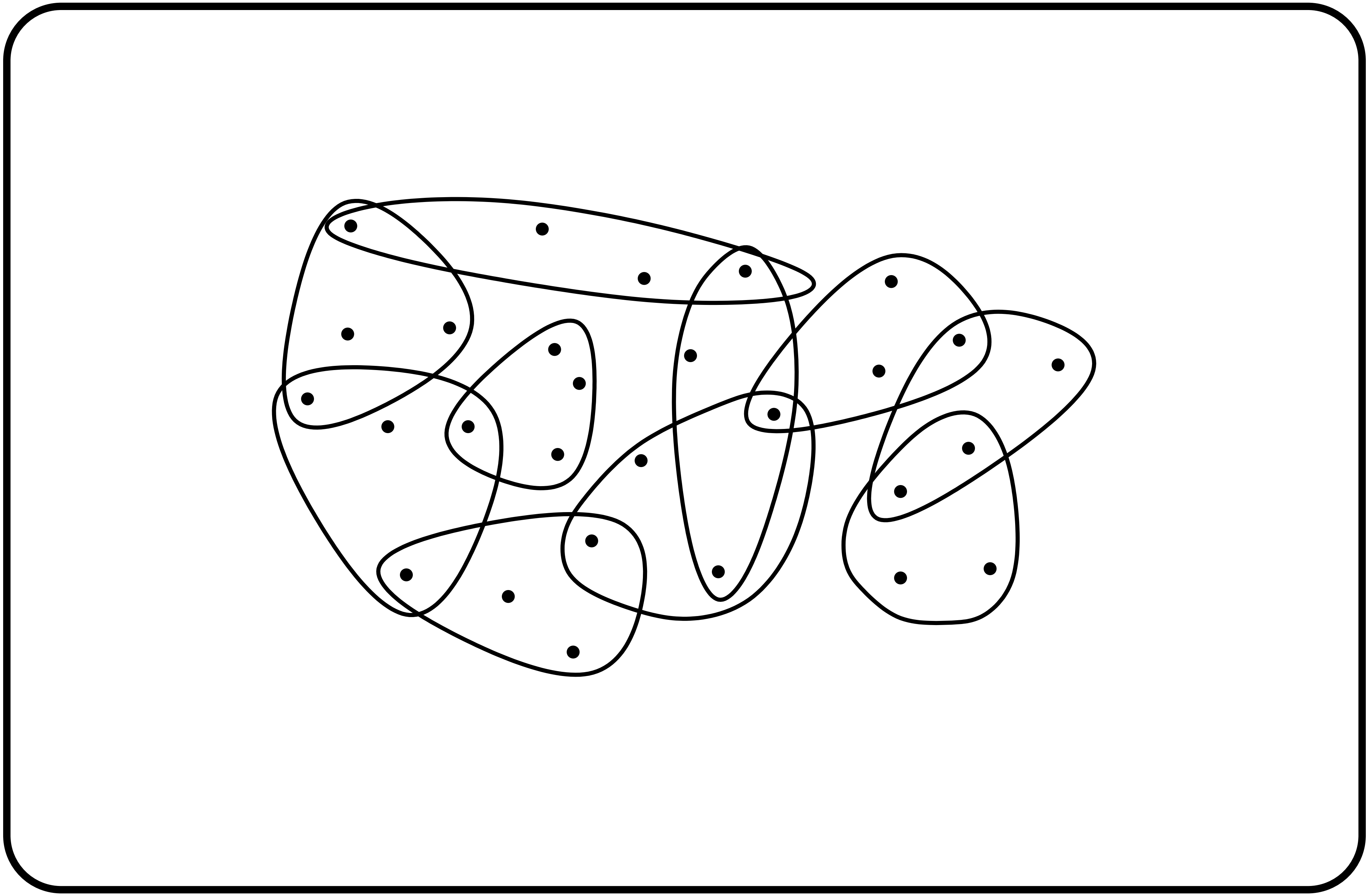
III- Conclusion et perspectives

I- Introduction

Définitions :

- Un hypregraphe :
  Un hypergraphe **h** est un couple $(\mathrm{V}, \mathcal{E})$
  - V l'ensemble des sommets
  - $\mathcal{E}$ l'ensemble des hyperarêtes.
- Une hyperarête de **h** un sous-ensemble de V.
- Un hypergraphe $(\mathrm{V}, \mathcal{E})$ est b-uniforme si :

$$\forall \mathrm{E} \in \mathcal{E}, \qquad \mathrm{Card}(\mathrm{E}) = b$$



Notion d'**excès** d'un hypergraphe :

- L'excès d'un hypergraphe $\mathbf{h}$ connexe b-uniforme :

$$n = s(b-1) - exces(\mathbf{h})$$

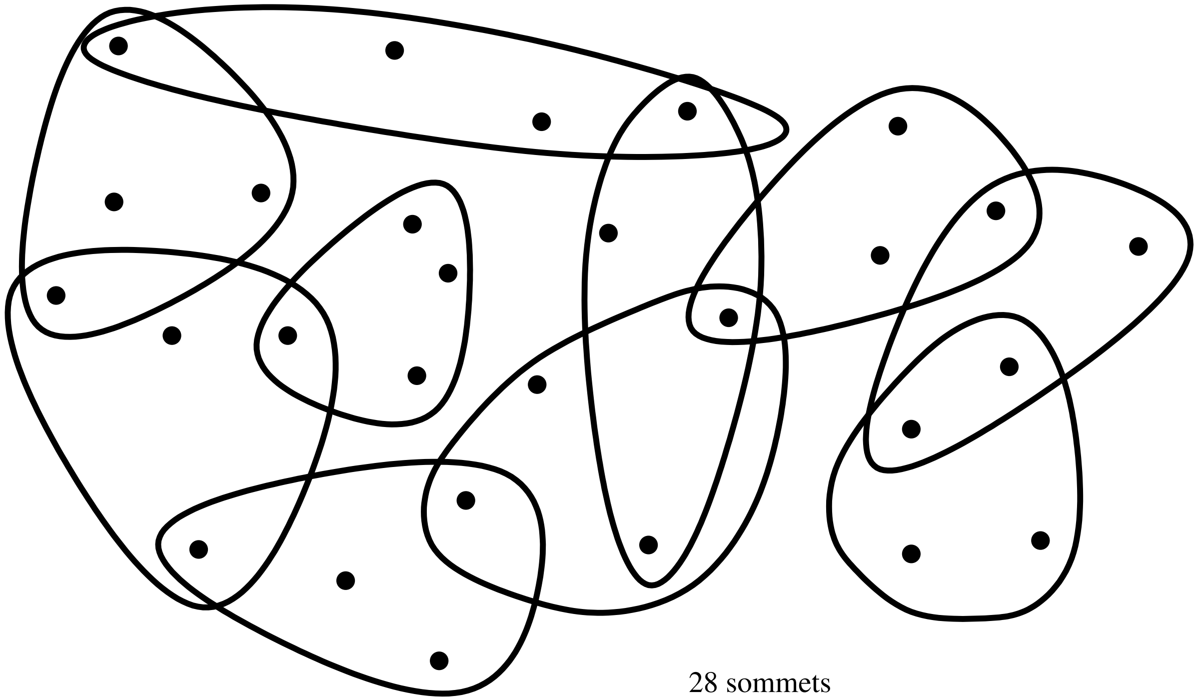
- Les hypergraphes connexes b-uniformes :

  excès $= -1$: les hyperarbres

  excès $= 0$: les unicycles

  excès $= 1$: les bicycles

  excès $= k$: hypergraphes à $k+1$ cycles.



28 sommets
10 hyperaretes
4−uniforme
3 cycles
2 exces

II- Enumérations exactes

Premier outil pour faire l'énumération :

Série génératrice exponentielle.

Enumération d'hypergraphes avec des sommets étiquetés.

Exemple :

$$A(w,z) = \sum_{n,s} a_{ns} \frac{w^s z^n}{n!}$$

Fonction génératrice (bivariée ou monovariée) H_ℓ des hypergraphes connexes b-uniformes d'excès ℓ.

$$\begin{aligned} H_\ell(w,z) &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\mathrm{HypCon}_\ell(s)}{(sb-s-\ell)!} w^s z^{sb-s-\ell} \\ H_\ell(z) &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\mathrm{HypCon}_\ell(s)}{(sb-s-\ell)!} z^{sb-s-\ell} \end{aligned}$$

Une dérivation par rapport à z : pour obtenir la série génératrice des structures avec un sommet distingué.

T fonction génératrice des hyperarbres enracinés.

$$T(z) = z\frac{d}{dz}H_{-1}(z)$$

Théorème : H_ℓ s'exprime en fonction de $T \equiv T(z)$. ■

Exemples :

$$\begin{aligned} H_{-1}(T) &= T - \frac{(b-1)T^b}{b!} \\ H_0(T) &= -\frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{T^{b-1}}{(b-2)!}\right) - \frac{T^{b-1}}{2(b-2)!} \end{aligned}$$

Si $b = 2$ (graphes) :

$$H_0(T) \quad = \quad -\frac{1}{2}\ln\left(1 - T\right) - \frac{T}{2} - \frac{T^2}{4}$$

Théorème :

$$T(z) \quad = \quad z \exp\left(\frac{T(z)^{b-1}}{(b-1)!}\right) \blacksquare$$

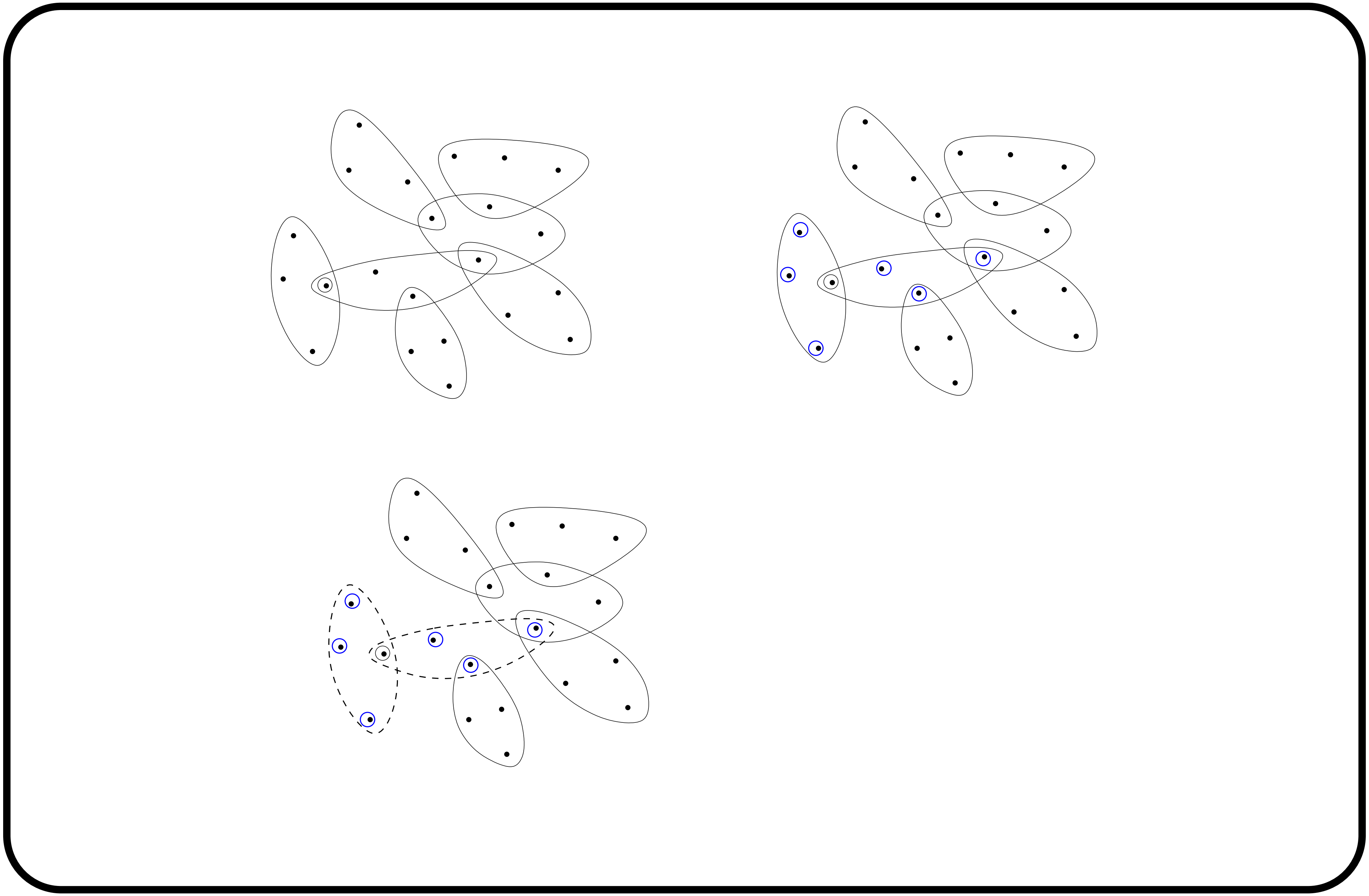
Remarque :

Pour $b = 2$, on retrouve la SGE des arbres enracinés de Cayley (LambertW sous MAPLE).

Interprétation symbolique :

Un hyperarbre enraciné correspond à

- un sommet (la racine)
- un certain nombre d'ensembles de $(b-1)$ hyperarbres enracinés non-ordonnés.



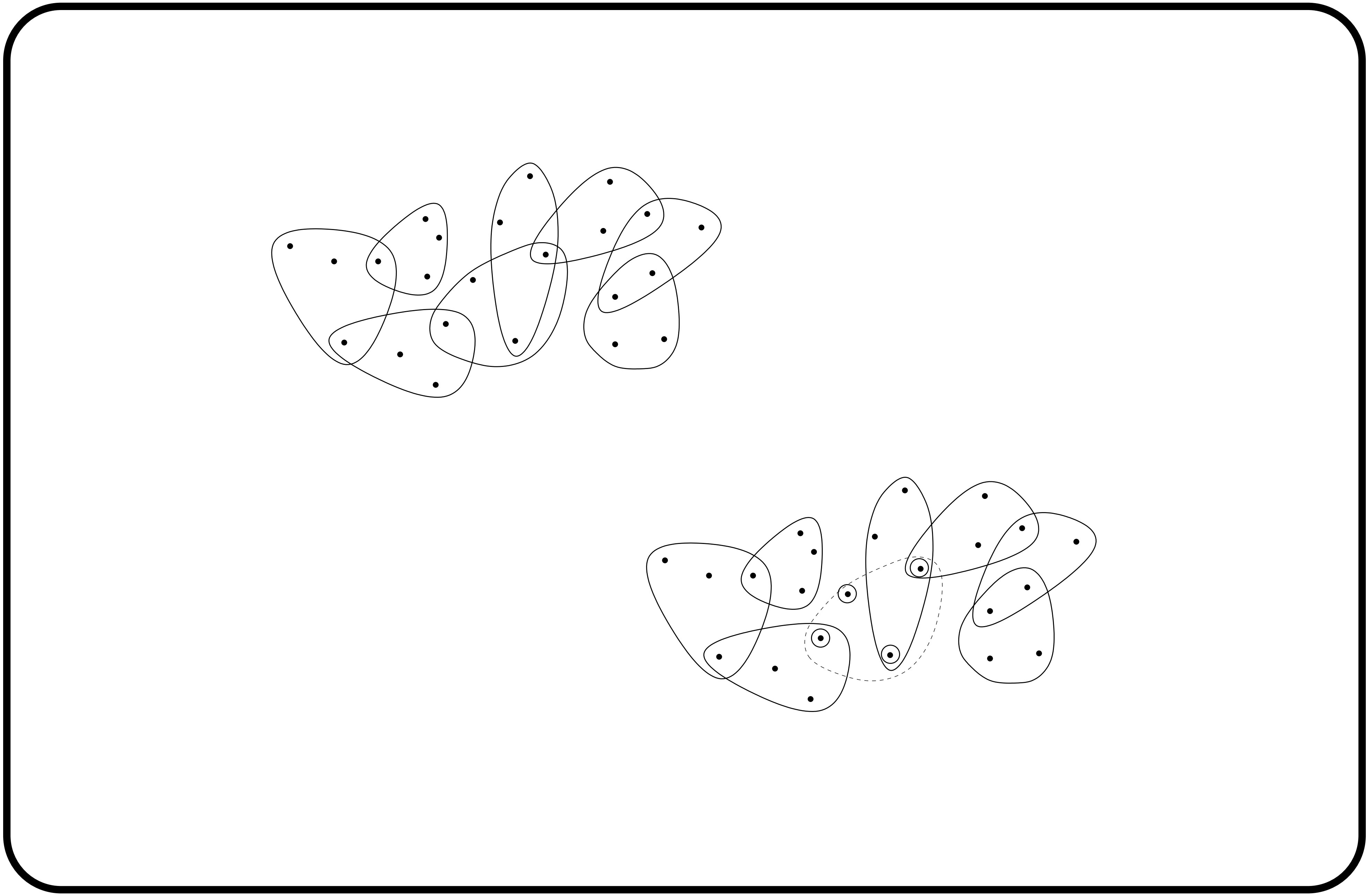
Equation différentielle que vérifie la fonction génératrice bivariée des hypergraphes connexes b-uniformes d'éxcès ℓ :

$$w\frac{\partial}{\partial w}H_\ell(w,z) = w\sum_{(m_{j,\,k})\in S_\ell}\prod_{j,k}\left\{\frac{1}{m_{j,\,k}!}\left(\frac{z^k}{k!}\frac{\partial^k}{\partial z^k}H_j(w,z)\right)^{m_{j,\,k}}\right\} - w\frac{\partial}{\partial w}H_{\ell-b+1}(w,z)$$

$\mathcal{S}_\ell$ est l'ensemble des matrices $(m_{j,\,k})_{j,\,k}$ vérifiant :

$$\begin{cases} \sum_{j,k} k m_{j,\,k} = b \\ \sum_{j,k}(j+k)m_{j,\,k} = \ell+1 \end{cases} \qquad (1)$$

En supprimant une hyperarête, les coefficients de $(m_{j,\,k})$ correspondent au nombre d'hypergraphes connexes d'excès j et avec k sommets distingués obtenus.



Les outils, pour obtenir une équation différentielle en T :

- $$T(z) = z \exp\left(\frac{T(z)^{b-1}}{(b-1)!}\right)$$

- $$w \frac{\partial}{\partial w} H_j(w,z) \quad = \quad \frac{1}{b-1}\left(j H_j(w,z) + z \frac{\partial}{\partial z} H_j(w,z)\right)$$

L'équation différentielle en T :

$$\frac{1}{b-1}\left(\ell H_\ell(T) + T{H_\ell}'(T)\right) =$$
$$\sum_{(m_{j,\,k})\in{\mathcal{S}_\ell}^*}\left\{\prod_{j,k}\frac{1}{m_{j,\,k}!}\left(\frac{z^k}{k!}\frac{d^k}{dz^k}H_j(T)\right)^{m_{j,\,k}}\right\}$$
$$-\frac{1}{b-1}\left((\ell-b+1)H_\ell(T) + z\frac{d}{dz}H_{\ell-b+1}(T)\right)$$

Théorème :

Soit :

$$\theta = 1 - \frac{T^{b-1}}{(b-2)!}$$

Il existe une fonction f_j telle que

$$H_j(T) = \frac{f_j(\theta)}{T^j}$$

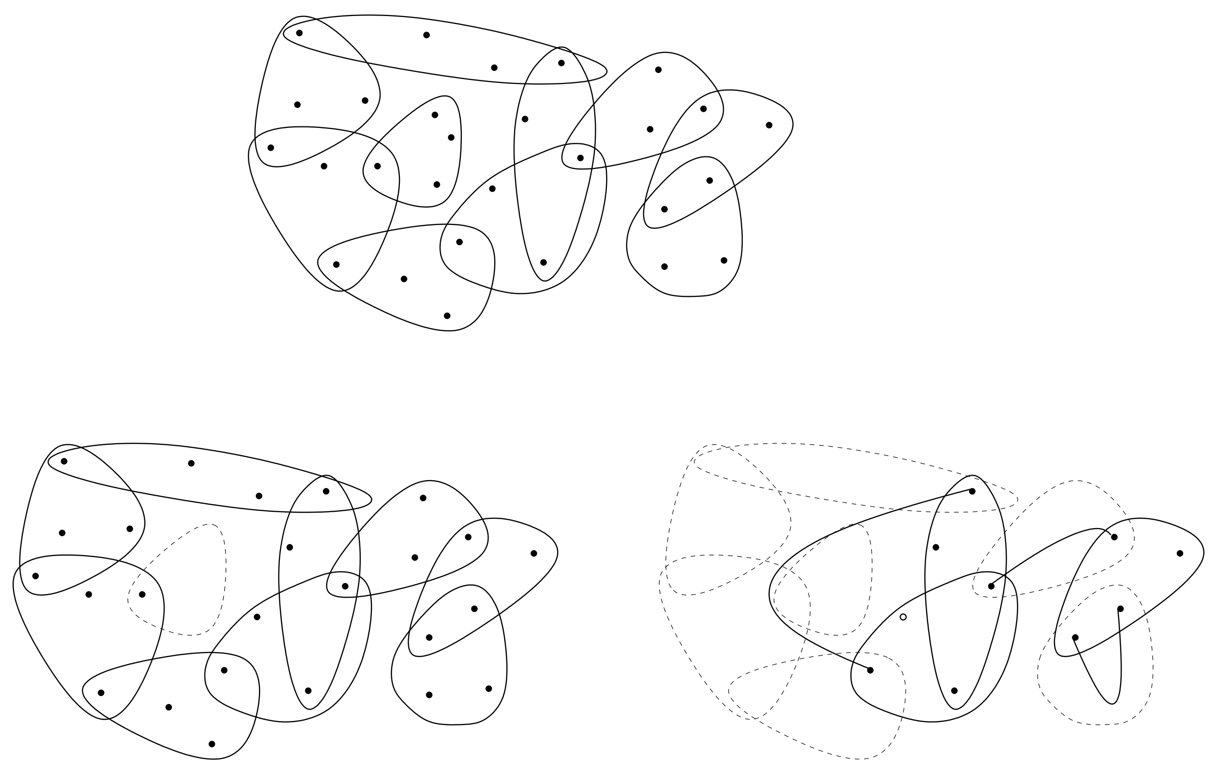
Et

$$\frac{d^k}{dz^k} H_j(T) = \frac{f_{j,\,k}(\theta)}{z^k T^j}$$

avec

$$f_{j,k+1}(\theta) = -(b-1)\frac{{f_{jk}}'(\theta)}{\theta} + (b-1){f_{jk}}'(\theta) - j\frac{f_{jk}(\theta)}{\theta} - k f_{jk}(\theta) \quad (2)$$

$\blacksquare$



Finalement, l'equation différentielle devient :

$$f'_\ell(T)dT = -(b-2)! \left(\sum_{(m_{j,k})} \prod_{j,k} \frac{1}{m_{j,\,k}!} \left(\frac{f_{j,\,k}(\theta)}{k!} \right)^{m_{j,\,k}} \right.$$
$$\left. - \frac{1}{b-1} \left((\ell - b + 1) f_{\ell-b+1,0}(\theta) + f_{\ell-b+1,1}(\theta) \right) \right) d\theta \qquad (3)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
H_{-1}(T) &= \frac{T}{b}\,(b - 1 + \theta) \\
H_0(T) &= \frac{1}{2}\,(-\ln(\theta) + \theta - 1) \\
H_1(T) &= \frac{1}{24T}\left\{\frac{5(b-1)^2}{\theta^3} - \frac{(13b-8)(b-1)}{\theta^2}\right. \\
&\quad \left. + \frac{11b^2 - 11b + 2}{\theta} - b(3b+1) + (b+1)\theta\right\}
\end{aligned}$$

Si $b = 3$

$$H_1(T) = \frac{1}{T}\left\{\frac{5}{6\theta^3} - \frac{31}{12\theta^2} + \frac{17}{6\theta} - \frac{7}{12} + \frac{\theta}{3}\right\}$$

L'énumération exacte peut être ainsi obtenu en passant par l'**inversion de Lagrange** :
on obtient successivement les coefficients si $n = 1 \bmod (b-1)$

$$[z^n]T(z) = \frac{n^{s-1}}{s![(b-1)!]^s}$$

$$[z^n]H_{-1}(z) = \frac{n^{s-2}}{s![(b-1)!]^s}$$

et si $n \neq 1 \bmod (b-1)$

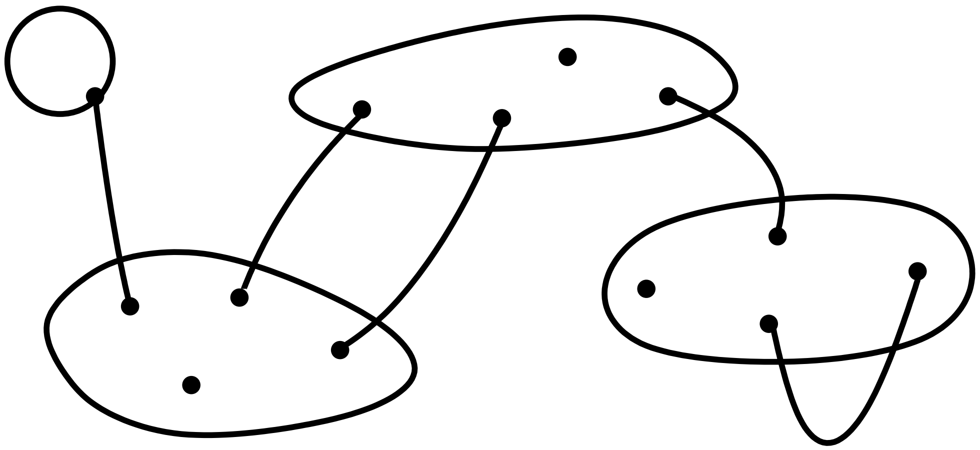
$$[z^n]T(z) = 0$$

$$[z^n]H_{-1}(z) = 0$$

Théorème :

Un hypergraphe d'excès ℓ contient au plus 3ℓ chaînes. ■

Remarque : Un résultat dont une démonstration algorithmique a été donné par KARONSKI et LUCZAK.
Nous pouvons ici obtenir une autre démonstration à partir des séries génératrices.



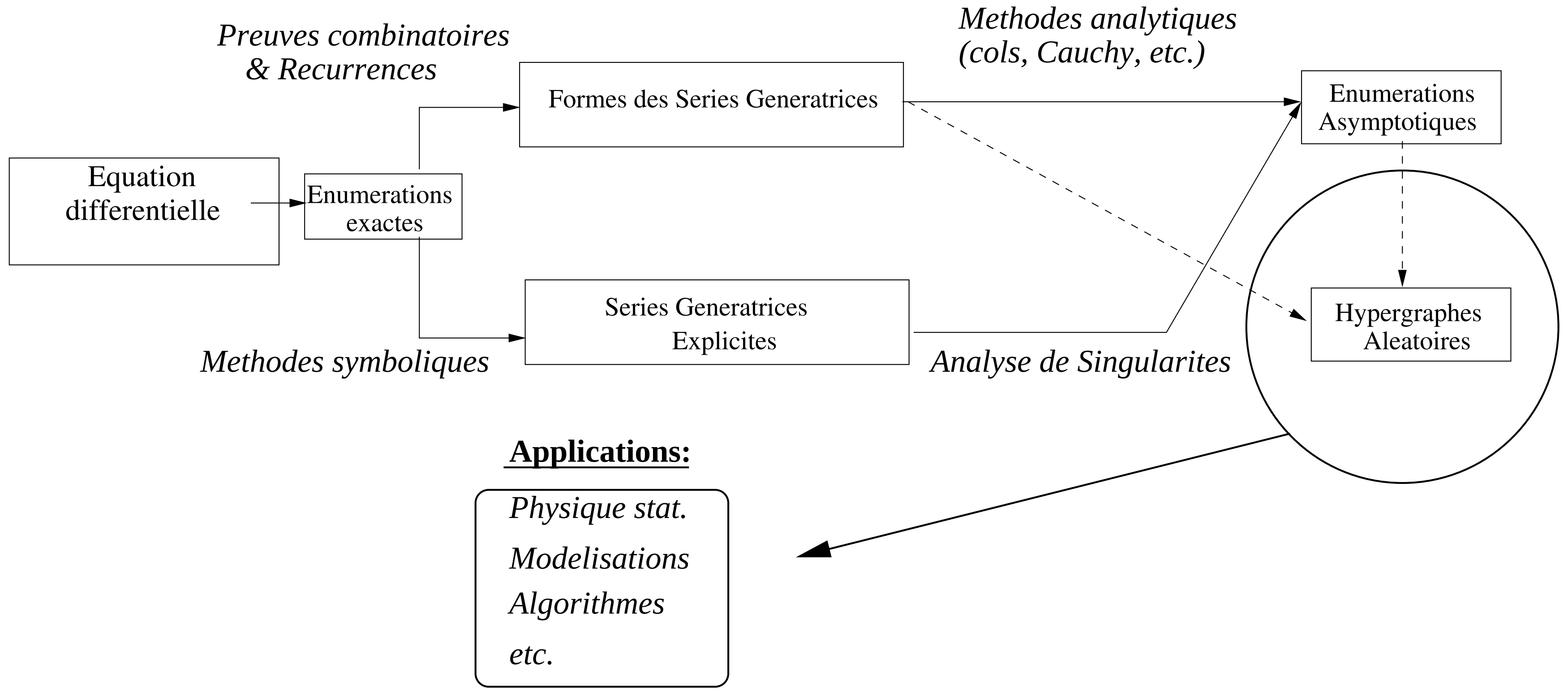
‘‘Kernel’’, d’un hypergraphe d’exces 2, ayant un nombre maximum de chaines.

III- Conclusion et perspectives

Les travaux suivants sont en préparation :

- Enumérations asymptotiques (conjecture de LUCZAK & KARONSKI).
  - $\rightarrow$ Pour les hypergraphes connexes à n sommets et à excès fixé : analyse de singularité (méthodes de FLAJOLET-ODLYZKO)
  - $\rightarrow$ Pour les hypergraphes connexes à n sommets et à excès $o(n^{1/3})$: nécessitent des études des formes des séries génératrices bivariées concernées.

- Hypergraphes aléatoires :
  Vers des résultats tels que ceux du "papier géant" de JANSON-KNUTH-LUCZAK-PITTEL sur les graphes
  (taille de la composante géante, études de phénomènes de transitions de phase, lois limites, ...)


Preuves combinatoires
& Recurrences
Methodes analytiques
(cols, Cauchy, etc.)
Formes des Series Generatrices
Enumerations
Asymptotiques
Equation
differentielle
Enumerations
exactes
Series Generatrices
Explicites
Hypergraphes
Aleatoires
Methodes symboliques
Analyse de Singularites
Applications:
Physique stat.
Modelisations
Algorithmes
etc.