

**Notes de cours**  
**sur la méthode des éléments finis**

**M1 MAI**

**Eric Blayo**  
**Janvier 2010**



# Table des matières

<b>1 Outils d'analyse fonctionnelle</b>	<b>1</b>
1.1 Quelques rappels . . . . .	1
1.1.1 Normes et produits scalaires . . . . .	1
1.1.2 Suites de Cauchy - espaces complets . . . . .	2
1.2 Espaces fonctionnels . . . . .	2
1.3 Notion de dérivée généralisée . . . . .	3
1.3.1 Fonctions tests . . . . .	3
1.3.2 Dérivée généralisée . . . . .	4
1.4 Espaces de Sobolev . . . . .	5
1.4.1 Les espaces $H^m$ . . . . .	5
1.4.2 Trace d'une fonction . . . . .	6
1.4.3 Espace $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ . . . . .	7
<b>2 Introduction à la méthode des éléments finis</b>	<b>9</b>
2.1 Formulation variationnelle . . . . .	9
2.1.1 Exemple 1-D . . . . .	9
2.1.2 Exemple 2-D . . . . .	10
2.1.3 Formulation générale . . . . .	10
2.2 Existence et unicité de la solution . . . . .	11
2.2.1 Continuité . . . . .	11
2.2.2 Théorème de Lax-Milgram . . . . .	11
2.2.3 Retour à l'exemple 1-D . . . . .	12
2.2.4 Remarque: condition inf-sup . . . . .	13
2.3 EDP elliptiques d'ordre 2 . . . . .	13
2.4 Approximation interne . . . . .	14
2.4.1 Principe général . . . . .	14
2.4.2 Interprétation de $u_h$ . . . . .	15
2.4.3 Estimation d'erreur . . . . .	15
2.5 Principe général de la méthode des éléments finis . . . . .	16
2.6 Retour à l'exemple 1-D . . . . .	17
<b>3 Éléments finis de Lagrange</b>	<b>20</b>
3.1 Unisolvance . . . . .	20
3.2 Élément fini de Lagrange . . . . .	20
3.3 Exemples d'éléments finis de Lagrange . . . . .	21

3.3.1	Espaces de polynômes . . . . .	21
3.3.2	Exemples 1-D . . . . .	21
3.3.3	Exemples 2-D triangulaires . . . . .	22
3.3.4	Exemples 2-D rectangulaires . . . . .	22
3.3.5	Exemples 3-D . . . . .	23
3.4	Famille affine d'éléments finis . . . . .	24
3.5	Du problème global aux éléments locaux . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Eléments finis d'Hermite</b>	<b>27</b>
4.1	Classe d'un élément fini . . . . .	27
4.2	Eléments finis d'Hermite . . . . .	27
4.2.1	Définitions . . . . .	27
4.2.2	Lien avec les éléments finis de Lagrange . . . . .	28
4.2.3	Fonctions de base globales . . . . .	28
4.3	Exemples . . . . .	29
4.3.1	Exemples 1-D . . . . .	29
4.3.2	Exemples 2-D triangulaires . . . . .	29
4.3.3	Exemple 2-D rectangulaire . . . . .	30
<b>5</b>	<b>Convergence de la méthode des éléments finis</b>	<b>31</b>
5.1	Introduction . . . . .	31
5.2	Calcul de majoration d'erreur . . . . .	32
5.2.1	Etape 1: majoration par l'erreur d'interpolation . . . . .	32
5.2.2	Etape 2: Décomposition sur les éléments . . . . .	32
5.2.3	Etape 3: Passage à l'élément de référence . . . . .	32
5.2.4	Etape 4: Majoration sur l'élément de référence . . . . .	34
5.2.5	Etape 5: Assemblage des majorations locales . . . . .	34
5.2.6	Résultat final . . . . .	36
5.3	Quelques commentaires . . . . .	36
<b>6</b>	<b>Quelques aspects pratiques de la méthode des éléments finis</b>	<b>37</b>
6.1	Maillage . . . . .	37
6.2	Assemblage de la matrice du système . . . . .	38
6.3	Formules de quadrature . . . . .	39
6.3.1	Définitions . . . . .	39
6.3.2	Quadrature en 1-D . . . . .	40
6.3.3	Quadrature en 2-D triangulaire . . . . .	41
6.4	Domaines à frontière courbe . . . . .	41
<b>A</b>	<b>Coordonnées barycentriques</b>	<b>42</b>
<b>B</b>	<b>Calcul d'intégrales</b>	<b>45</b>
B.1	Formules de Green . . . . .	45
B.2	Changement de variable dans une intégrale . . . . .	45

# Chapitre 1

## Outils d'analyse fonctionnelle

### 1.1 Quelques rappels

#### 1.1.1 Normes et produits scalaires

Soit  $E$  un espace vectoriel.

**Définition :**  $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  est une **norme** sur  $E$  ssi elle vérifie :

$$(N1) (\|x\| = 0) \implies (x = 0)$$

$$(N2) \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$

$$(N3) \forall x, y \in E, \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\text{inégalité triangulaire})$$

**Exemple :** Pour  $E = \mathbb{R}^n$  et  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , on définit les normes

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad \|x\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} \quad \|x\|_\infty = \sup_i |x_i|$$

**Définition :** On appelle **produit scalaire** sur  $E$  toute forme bilinéaire symétrique définie positive.

$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  est donc un produit scalaire sur  $E$  ssi il vérifie :

$$(S1) \forall x, y \in E, \quad \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$$

$$(S2) \forall x_1, x_2, y \in E, \quad \langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$$

$$(S3) \forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

$$(S4) \forall x \in E, x \neq 0, \quad \langle x, x \rangle > 0$$

A partir d'un produit scalaire, on peut définir une **norme induite** :  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

On a alors, d'après (N3), l'**inégalité de Cauchy-Schwarz** :  $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$

**Exemple :** Pour  $E = \mathbb{R}^n$ , on définit le produit scalaire  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ . Sa norme induite est  $\|\cdot\|_2$  définie précédemment.

Un espace vectoriel muni d'une norme est appelé **espace normé**.

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé **espace préhilbertien**. En particulier, c'est donc un espace normé pour la norme induite.

### 1.1.2 Suites de Cauchy - espaces complets

**Définition :** Soit  $E$  un espace vectoriel et  $(x_n)_n$  une suite de  $E$ .  $(x_n)_n$  est une **suite de Cauchy** ssi  $\forall \varepsilon > 0, \exists N/\forall p > N, \forall q > N, \|x_p - x_q\| < \varepsilon$

Toute suite convergente est de Cauchy. La réciproque est fausse.

**Définition :** Un espace vectoriel est **complet** ssi toute suite de Cauchy y est convergente.

**Définition :** Un espace normé complet est un **espace de Banach**.

**Définition :** Un espace préhilbertien complet est un **espace de Hilbert**.

**Définition :** Un espace de Hilbert de dimension finie est appelé **espace euclidien**.

## 1.2 Espaces fonctionnels

**Définition :** Un **espace fonctionnel** est un espace vectoriel dont les éléments sont des fonctions.

**Exemple :**  $\mathcal{C}^p([a; b])$  désigne l'espace des fonctions définies sur l'intervalle  $[a, b]$ , dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre  $p$  existent et sont continues sur  $[a, b]$ .

Dans la suite, les fonctions seront définies sur un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  (le plus souvent un ouvert noté  $\Omega$ ), à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{R}^p$ .

**Exemple :** La température  $T(x, y, z, t)$  en tout point d'un objet  $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^3$  est une fonction de  $\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Les normes usuelles les plus simples sur les espaces fonctionnels sont les **normes  $L^p$**  définies par :

$$\|u\|_{L^p} = \left( \int_{\Omega} |u|^p \right)^{1/p}, \quad p \in [1, +\infty[, \quad \text{et} \quad \|u\|_{L^\infty} = \text{Sup}_{\Omega} |u|$$

Comme on va le voir, ces formes  $L^p$  ne sont pas nécessairement des normes. Et lorsqu'elles le sont, les espaces fonctionnels munis de ces normes ne sont pas nécessairement des espaces de Banach. Par exemple, les formes  $L^\infty$  et  $L^1$  sont bien des normes sur l'espace  $\mathcal{C}^0([a; b])$ , et cet espace est complet si on le munit de la norme  $L^\infty$ , mais ne l'est pas si on le munit de la norme  $L^1$ .

Pour cette raison, on va définir les espaces  $\mathcal{L}^p(\Omega)$  ( $p \in [1, +\infty[$ ) par

$$\mathcal{L}^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mesurable, et telle que } \int_{\Omega} |u|^p < \infty \right\}$$

( on rappelle qu'une fonction  $u$  est mesurable ssi  $\{x/|u(x)| < r\}$  est mesurable  $\forall r > 0$ . )

Sur ces espaces  $\mathcal{L}^p(\Omega)$ , les formes  $L^p$  ne sont pas des normes. En effet,  $\|u\|_{L^p} = 0$  implique que  $u$  est nulle presque partout dans  $\mathcal{L}^p(\Omega)$ , et non pas  $u = 0$ . C'est pourquoi on va définir les **espaces  $L^p(\Omega)$**  :

**Définition :**  $L^p(\Omega)$  est la classe d'équivalence des fonctions de  $\mathcal{L}^p(\Omega)$  pour la relation d'équivalence "égalité presque partout". Autrement dit, on confondra deux fonctions dès lors qu'elles sont égales presque partout, c'est à dire qu'elles ne diffèrent que sur un ensemble de mesure nulle.

**Théorème :** La forme  $L^p$  est une norme sur  $L^p(\Omega)$ , et  $L^p(\Omega)$  muni de la norme  $L^p$  est un espace de Banach (c.a.d. est complet).

Un cas particulier très important est  $p = 2$ . On obtient alors l'**espace fonctionnel  $L^2(\Omega)$** , c'est à dire l'espace des fonctions de carré sommable sur  $\Omega$  (à la relation d'équivalence "égalité presque partout" près). A la norme  $L^2$ :  $\|u\|_{L^2} = (\int_{\Omega} u^2)^{1/2}$ , on peut associer la forme bilinéaire  $(u,v)_{L^2} = \int_{\Omega} u v$ . Il s'agit d'un produit scalaire, dont dérive la norme  $L^2$ . D'où :

**Théorème :**  $L^2(\Omega)$  est un espace de Hilbert.

## 1.3 Notion de dérivée généralisée

Nous venons de définir des espaces fonctionnels complets, ce qui sera un bon cadre pour démontrer l'existence et l'unicité de solutions d'équations aux dérivées partielles, comme on le verra plus loin notamment avec le théorème de Lax-Milgram. Toutefois, on a vu que les éléments de ces espaces  $L^p$  ne sont pas nécessairement des fonctions très régulières. Dès lors, les dérivées partielles de telles fonctions ne sont pas forcément définies partout. Pour s'affranchir de ce problème, on va étendre la notion de dérivation. Le véritable outil à introduire pour cela est la notion de **distribution**, due à L. Schwartz (1950). Par manque de temps dans ce cours, on se contentera ici d'en donner une idée très simplifiée, avec la notion de **dérivée généralisée**. Cette dernière a des propriétés beaucoup plus limitées que les distributions, mais permet de "sentir" les aspects nécessaires pour mener à la formulation variationnelle.

Dans la suite,  $\Omega$  sera un ouvert (pas nécessairement borné) de  $\mathbb{R}^n$ .

### 1.3.1 Fonctions tests

**Définition :** Soit  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . On appelle **support de  $\varphi$**  l'adhérence de  $\{x \in \Omega / \varphi(x) \neq 0\}$ .

**Exemple :** Pour  $\Omega = ]-1,1[$ , et  $\varphi$  la fonction constante égale à 1,  $\text{Supp } \varphi = [-1,1]$ .

**Définition :** On note  $\mathcal{D}(\Omega)$  l'espace des fonctions de  $\Omega$  vers  $\mathbb{R}$ , de classe  $C^\infty$ , et à support

compact inclus dans  $\Omega$ .  $\mathcal{D}(\Omega)$  est parfois appelé **espace des fonctions-tests**.

**Exemple :** L'exemple le plus classique dans le cas 1-D est la fonction

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases} \quad (1.1)$$

$\varphi$  est une fonction de  $\mathcal{D}(]a,b[)$  pour tous  $a < -1 < 1 < b$ .

Cet exemple s'étend aisément au cas multi-dimensionnel ( $n > 1$ ). Soit  $a \in \Omega$  et  $r > 0$  tel que la boule fermée de centre  $a$  et de rayon  $r$  soit incluse dans  $\Omega$ . On pose alors :

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{r^2-|x-a|^2}} & \text{si } |x-a| < r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.2)$$

$\varphi$  ainsi définie est élément de  $\mathcal{D}(\Omega)$ .

**Théorème :**  $\overline{\mathcal{D}(\Omega)} = L^2(\Omega)$

### 1.3.2 Dérivée généralisée

Soit  $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$  et  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ . Par intégration par parties (cf annexe B.1), on a :

$$\int_{\Omega} \partial_i u \varphi = - \int_{\Omega} u \partial_i \varphi + \int_{\partial\Omega} u \varphi \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n}$$

Ce dernier terme (intégrale sur le bord de  $\Omega$ ) est nul car  $\varphi$  est à support compact (donc nul sur  $\partial\Omega$ ). Or  $\int_{\Omega} u \partial_i \varphi$  a un sens par exemple dès que  $u \in L^2(\Omega)$ . Donc le terme  $\int_{\Omega} \partial_i u \varphi$  a aussi du sens, sans que  $u$  ne soit nécessairement de classe  $\mathcal{C}^1$ . Ceci permet de définir  $\partial_i u$  même dans ce cas.

**Définition :** (cas 1-D) Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , pas forcément borné. On dit que  $u \in L^2(I)$  admet une **dérivée généralisée** dans  $L^2(I)$  ssi  $\exists u_1 \in L^2(I)$  telle que  $\forall \varphi \in \mathcal{D}(I)$ ,  $\int_I u_1 \varphi = - \int_I u \varphi'$

**Exemple :** Soit  $I = ]a,b[$  un intervalle borné, et  $c$  un point de  $I$ . On considère une fonction  $u$  formée de deux branches de classe  $\mathcal{C}^1$ , l'une sur  $]a,c[$ , l'autre sur  $]c,b[$ , et se raccordant de façon continue mais non dérivable en  $c$ . Alors  $u$  admet une dérivée généralisée définie par  $u_1(x) = u'(x) \quad \forall x \neq c$ . En effet :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(]a,b[) \quad \int_a^b u \varphi' = \int_a^c + \int_c^b = - \int_a^c u' \varphi - \int_c^b u' \varphi + \underbrace{(u(c^-) - u(c^+))}_{=0} \varphi(c)$$

par intégration par parties. La valeur  $u_1(c)$  n'a pas d'importance: on a de toute façon au final la même fonction de  $L^2(I)$ , puisqu'elle est définie comme classe d'équivalence de la relation d'équivalence "égalité presque partout".

**Définition :** En itérant, on dit que  $u$  admet une **dérivée généralisée d'ordre  $k$**  dans

$L^2(I)$ , notée  $u_k$ , ssi  $\forall \varphi \in \mathcal{D}(I)$ ,  $\int_I u_k \varphi = (-1)^k \int_I u \varphi^{(k)}$

Ces définitions s'étendent naturellement pour la définition de dérivées partielles généralisées, dans le cas  $n > 1$ .

**Théorème :** Quand elle existe, la dérivée généralisée est unique.

**Théorème :** Quand  $u$  est de classe  $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ , la dérivée généralisée est égale à la dérivée classique.

## 1.4 Espaces de Sobolev

### 1.4.1 Les espaces $H^m$

**Définition :**  $H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) / \partial_i u \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq n\}$  où  $\partial_i u$  est définie au sens de la dérivée généralisée.  $H^1(\Omega)$  est appelé **espace de Sobolev d'ordre 1**.

**Définition :** Pour tout entier  $m \geq 1$ ,

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) / \partial^\alpha u \in L^2(\Omega) \quad \forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n \text{ tel que } |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq m \right\}$$

$H^m(\Omega)$  est appelé **espace de Sobolev d'ordre m**.

Par extension, on voit aussi que  $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ .

Dans le cas de la dimension 1, on écrit plus simplement pour  $I$  ouvert de  $\mathbb{R}$  :

$$H^m(I) = \left\{ u \in L^2(I) / u', \dots, u^{(m)} \in L^2(I) \right\}$$

**Théorème :**  $H^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v)_1 = \int_{\Omega} u v + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \partial_i u \partial_i v = (u, v)_0 + \sum_{i=1}^n (\partial_i u, \partial_i v)_0$$

en notant  $(\cdot, \cdot)_0$  le produit scalaire  $L^2$ . On notera  $\|\cdot\|_1$  la norme associée à  $(\cdot, \cdot)_1$ .

On définit de même un produit scalaire et une norme sur  $H^m(\Omega)$  par

$$(u, v)_m = \sum_{|\alpha| \leq m} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_0 \quad \text{et} \quad \|u\|_m = (u, u)_m^{1/2}$$

**Théorème :**  $H^m(\Omega)$  muni du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_m$  est un espace de Hilbert.

**Théorème :** Si  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  de frontière  $\partial\Omega$  "suffisamment régulière" (par exemple

$\mathcal{C}^1$ ), on a l'inclusion :  $H^m(\Omega) \subset \mathcal{C}^k(\bar{\Omega})$  pour  $k < m - \frac{n}{2}$

**Exemples :** En particulier, on voit que pour un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ , on a  $H^1(I) \subset \mathcal{C}^0(\bar{I})$ , c'est à dire que, en 1-D, toute fonction  $H^1$  est continue.

L'exemple de  $u(x) = x \sin \frac{1}{x}$  pour  $x \in ]0,1]$  et  $u(0) = 0$  montre que la réciproque est fautive. L'exemple de  $u(x,y) = |\ln(x^2 + y^2)|^k$  pour  $0 < k < 1/2$  montre qu'en dimension supérieure à 1 il existe des fonctions  $H^1$  discontinues.

## 1.4.2 Trace d'une fonction

Pour pouvoir faire les intégrations par parties qui seront utiles par exemple pour la formulation variationnelle, il faut pouvoir définir le prolongement (*la trace*) d'une fonction sur le bord de l'ouvert  $\Omega$ .

Si  $n = 1$  (cas 1-D) : on considère un intervalle ouvert  $I = ]a,b[$  borné. On a vu que  $H^1(I) \subset \mathcal{C}^0(\bar{I})$ . Donc, pour  $u \in H^1(I)$ ,  $u$  est continue sur  $[a,b]$ , et  $u(a)$  et  $u(b)$  sont bien définies.

Si  $n > 1$  : on n'a plus  $H^1(\Omega) \subset \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ . Comment alors définir la trace ? La démarche est la suivante :

- On définit l'espace

$$\mathcal{C}^1(\bar{\Omega}) = \left\{ \varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R} / \exists O \text{ ouvert contenant } \bar{\Omega}, \exists \psi \in \mathcal{C}^1(O), \psi|_{\Omega} = \varphi \right\}$$

Autrement dit,  $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$  est l'espace des fonctions  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Omega$ , prolongeables par continuité sur  $\partial\Omega$  et dont le gradient est lui-aussi prolongeable par continuité. Il n'y a donc pas de problème pour définir la trace de telles fonctions.

- On montre que, si  $\Omega$  est un ouvert borné de frontière  $\partial\Omega$  "assez régulière", alors  $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$  est dense dans  $H^1(\Omega)$ .
- L'application linéaire continue, qui à toute fonction  $u$  de  $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$  associe sa trace sur  $\partial\Omega$ , se prolonge alors en une application linéaire continue de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\partial\Omega)$ , notée  $\gamma_0$ , qu'on appelle **application trace**. On dit que  $\gamma_0(u)$  est la trace de  $u$  sur  $\partial\Omega$ .

Pour une fonction  $u$  de  $H^1(\Omega)$  qui soit en même temps continue sur  $\bar{\Omega}$ , on a évidemment  $\gamma_0(u) = u|_{\partial\Omega}$ . C'est pourquoi on note souvent par abus simplement  $u|_{\partial\Omega}$  plutôt que  $\gamma_0(u)$ .

On peut de façon analogue définir  $\gamma_1$ , application trace qui permet de prolonger la définition usuelle de la dérivée normale sur  $\partial\Omega$ . Pour  $u \in H^2(\Omega)$ , on a  $\partial_i u \in H^1(\Omega)$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ , et on peut donc définir  $\gamma_0(\partial_i u)$ . La frontière  $\partial\Omega$  étant "assez régulière" (par exemple, idéalement,

de classe  $\mathcal{C}^1$ ), on peut définir la normale  $n = \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_n \end{pmatrix}$  en tout point de  $\partial\Omega$ . On pose alors

$\gamma_1(u) = \sum_{i=1}^n \gamma_0(\partial_i u) n_i$ . Cette application continue  $\gamma_1$  de  $H^2(\Omega)$  dans  $L^2(\partial\Omega)$  permet donc bien

de prolonger la définition usuelle de la dérivée normale. Dans le cas où  $u$  est une fonction de  $H^2(\Omega)$  qui soit en même temps dans  $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ , la dérivée normale au sens usuel de  $u$  existe,

et  $\gamma_1(u)$  lui est évidemment égal. C'est pourquoi on note souvent, par abus,  $\partial_n u$  plutôt que  $\gamma_1(u)$ .

### 1.4.3 Espace $H_0^1(\Omega)$

**Définition :** Soit  $\Omega$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . L'espace  $H_0^1(\Omega)$  est défini comme l'adhérence de  $\mathcal{D}(\Omega)$  pour la norme  $\|\cdot\|_1$  de  $H^1(\Omega)$ . (on rappelle que  $\mathcal{D}(\Omega)$  est l'espace des fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\Omega$  à support compact, encore appelé espace des fonctions tests)

**Théorème :** Par construction  $H_0^1(\Omega)$  est un espace complet. C'est un espace de Hilbert pour la norme  $\|\cdot\|_1$

Si  $n = 1$  (cas 1-D) : on considère un intervalle ouvert  $I = ]a, b[$  borné. Alors

$$H_0^1(]a, b[) = \left\{ u \in H^1(]a, b[), u(a) = u(b) = 0 \right\}$$

Si  $n > 1$  : Si  $\Omega$  est un ouvert borné de frontière "assez régulière" (par exemple  $\mathcal{C}^1$  par morceaux), alors  $H_0^1(\Omega) = \ker \gamma_0$ .

$H_0^1(\Omega)$  est donc le sous-espace des fonctions de  $H^1(\Omega)$  de trace nulle sur la frontière  $\partial\Omega$ .

**Définition :** Pour toute fonction  $u$  de  $H^1(\Omega)$ , on peut définir :

$$|u|_1 = \left( \sum_{i=1}^n \|\partial_i u\|_0^2 \right)^{1/2} = \left( \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n (\partial_i u)^2 dx \right)^{1/2}$$

**Théorème : (Inégalité de Poincaré)** Si  $\Omega$  est borné dans au moins une direction, alors il existe une constante  $C(\Omega)$  telle que  $\forall u \in H_0^1(\Omega)$ ,  $\|u\|_0 \leq C(\Omega) |u|_1$ .

On en déduit que  $|\cdot|_1$  est une norme sur  $H_0^1(\Omega)$ , équivalente à la norme  $\|\cdot\|_1$ .

**Corollaire :** Le résultat précédent s'étend au cas où l'on a une condition de Dirichlet nulle seulement sur une partie de  $\partial\Omega$ , si  $\Omega$  est connexe.

On suppose que  $\Omega$  est un ouvert borné connexe, de frontière  $\mathcal{C}^1$  par morceaux. Soit  $V = \{v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}$  où  $\Gamma_0$  est une partie de  $\partial\Omega$  de mesure non-nulle. Alors il existe une constante  $C(\Omega)$  telle que  $\forall u \in V$ ,  $\|u\|_{0,V} \leq C(\Omega) |u|_{1,V}$ , où  $\|\cdot\|_{0,V}$  et  $|\cdot|_{1,V}$  désignent les norme et semi-norme induites sur  $V$ .

On en déduit que  $|\cdot|_{1,V}$  est une norme sur  $V$ , équivalente à la norme  $\|\cdot\|_{1,V}$ .

## Compléments

1. Montrer que les fonctions définies par (1.1) et (1.2) sont bien  $\mathcal{C}^\infty$  à support compact.

2. Montrer que  $\mathcal{C}^0([a,b])$  est un espace complet pour la norme  $L^\infty$ .
3. Montrer que ce n'est pas le cas pour la norme  $L^1$  (exhiber une suite de Cauchy non convergente dans  $\mathcal{C}^0([a,b])$ ).
4. Démontrer que, lorsqu'elle existe, la dérivée généralisée est unique.
5. Démontrer que, pour une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ , la dérivée généralisée est égale à la dérivée classique.
6. Soit une fonction de  $[a,b]$  vers  $\mathbb{R}$ , formée de deux branches de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a,c[$  et  $]c,b]$ , et discontinue en  $c$ . Montrer qu'elle n'admet pas de dérivée généralisée. (il faudrait alors avoir recours à la notion de distribution pour dériver cette fonction).
7. Montrer que  $|\cdot|_1$  est une norme sur  $H_0^1(\Omega)$ , équivalente à la norme  $\|\cdot\|_1$

# Chapitre 2

## Introduction à la méthode des éléments finis

### 2.1 Formulation variationnelle

#### 2.1.1 Exemple 1-D

Soit à résoudre le problème

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x) & a < x < b \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $f$  et  $c$  sont des fonctions données continues sur  $[a, b]$ . On supposera de plus que la fonction  $c$  est strictement positive sur  $[a, b]$ . Un tel problème est appelé *problème aux limites*.

**Définition:** Une **solution classique** (ou **solution forte**) de  $(\mathcal{P})$  est une fonction de  $\mathcal{C}^2([a, b])$  telle que  $u(a) = u(b) = 0$  et  $\forall x \in ]a, b[, -u''(x) + c(x)u(x) = f(x)$ .

En faisant le produit scalaire  $L^2(]a, b[)$  de l'équation différentielle avec une fonction-test  $v \in \mathcal{D}(]a, b[)$  (c'est à dire en intégrant sur  $[a, b]$ ), on a :

$$-\int_a^b u''(x)v(x) dx + \int_a^b c(x)u(x)v(x) dx = \int_a^b f(x)v(x) dx$$

soit, en intégrant par parties le premier terme :

$$\int_a^b u'(x)v'(x) dx + \int_a^b c(x)u(x)v(x) dx = \int_a^b f(x)v(x) dx$$

car  $v(a) = v(b) = 0$  puisque  $v \in \mathcal{D}(]a, b[)$ . Chaque terme de cette équation a en fait un sens dès lors que  $v \in H_0^1(]a, b[)$ . De plus,  $\mathcal{D}(]a, b[)$  étant dense dans  $H_0^1(]a, b[)$  (cf §1.4.3), cette équation est vérifiée pour tout  $v \in H_0^1(]a, b[)$ .

On peut donc définir le nouveau problème :

$$(\mathcal{Q}) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(]a, b[) \text{ tel que} \\ \int_a^b u'(x)v'(x) dx + \int_a^b c(x)u(x)v(x) dx = \int_a^b f(x)v(x) dx \quad \forall v \in H_0^1(]a, b[) \end{cases} \quad (2.2)$$

Ce problème est la **formulation variationnelle** (ou **formulation faible**) du problème  $(\mathcal{P})$ . Toute solution de  $(\mathcal{Q})$  est appelée **solution faible**. Il est immédiat que toute solution forte de  $(\mathcal{P})$  est aussi une solution faible.

### 2.1.2 Exemple 2-D

Soit  $\Omega$  ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ . On veut résoudre le problème

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ \partial_n u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.3)$$

Une solution classique de ce problème est une fonction de  $\mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$  vérifiant (2.3) en tout point de  $\Omega$ . Au passage, on voit que ceci impose que  $f$  soit  $\mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ . Toute solution classique vérifie donc :

$$\forall v \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}) \quad \int_{\Omega} -\Delta u v + \int_{\Omega} uv = \int_{\Omega} fv$$

soit par intégration par parties :  $\int_{\Omega} \nabla u \nabla v + \int_{\Omega} uv = \int_{\Omega} fv$  puisque  $\partial_n u = 0$  sur  $\partial\Omega$ . Or,  $\overline{\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})} = H^1(\Omega)$ . On peut donc définir le nouveau problème :

$$(\mathcal{Q}) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} \nabla u \nabla v + \int_{\Omega} uv = \int_{\Omega} fv \quad \forall v \in H^1(\Omega) \end{cases} \quad (2.4)$$

C'est la formulation variationnelle de  $(\mathcal{P})$ . On voit aussi que ce problème est défini dès lors que  $f \in L^2(\Omega)$ .

### 2.1.3 Formulation générale

Les exemples précédents montre que, d'une façon générale, la formulation variationnelle sera obtenue en faisant le produit scalaire  $L^2(\Omega)$  de l'équation avec une fonction  $v$  appartenant à un espace  $V$  à préciser (c'est à dire en multipliant par  $v$  et en intégrant sur  $\Omega$ ), et en intégrant par parties les termes d'ordre les plus élevés en tenant compte des conditions aux limites du problème. On arrive alors à une formulation du type :

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que } a(u,v) = l(v) \quad \forall v \in V \quad (2.5)$$

où  $a(.,.)$  est une forme sur  $V \times V$  (bilinéaire si l'EDP de départ est linéaire) et  $l(.)$  est une forme sur  $V$  (linéaire si les conditions aux limites de l'EDP de départ le sont).

**Remarque :** Une formulation plus générale est la suivante :

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que } a(u,w) = l(w) \quad \forall w \in W \quad (2.6)$$

où  $a(.,.)$  est une forme bilinéaire sur  $V \times W$  et  $l(.)$  est une forme linéaire sur  $W$ .  $V$  est alors appelé *espace des solutions* et  $W$  *espace des fonctions-tests*. La formulation précédente (2.5) correspond donc au cas particulier  $W = V$ .

## 2.2 Existence et unicité de la solution

### 2.2.1 Continuité

Soient  $V$  et  $W$  des espaces de Hilbert.

**Définition :** Une **forme linéaire**  $l(u)$  sur  $V$  est **continue** ssi il existe une constante  $K$  telle que  $|l(u)| \leq K \|u\|_V \quad \forall u \in V$ .

**Définition :** Une **forme bilinéaire**  $a(u,w)$  sur  $V \times W$  est **continue** ssi il existe une constante  $M$  telle que  $|a(u,w)| \leq M \|u\|_V \|w\|_W \quad \forall (u,w) \in V \times W$ .

### 2.2.2 Théorème de Lax-Milgram

On va introduire ici un outil important pour assurer l'existence et l'unicité de solutions à la formulation variationnelle de problèmes aux limites de type elliptique. On se place dans le cas  $W = V$ .

**Définition :** Une **forme bilinéaire**  $a(u,v)$  sur  $V \times V$  est **coercive** (ou **V-elliptique**) ssi il existe une constante  $\alpha > 0$  telle que  $a(u,u) \geq \alpha \|u\|^2, \forall u \in V$ .

**Théorème : (Lax-Milgram)** Soit  $V$  un espace de Hilbert. Soit  $a$  une forme bilinéaire continue coercive sur  $V$ . Soit  $l$  une forme linéaire continue sur  $V$ . Alors il existe un unique  $u \in V$  tel que  $a(u,v) = l(v), \forall v \in V$ .  
(et de plus, l'application linéaire  $l \rightarrow u$  est continue.)

La démonstration générale de ce théorème peut être trouvée par exemple dans Raviart et Thomas (1983).

**Théorème :** On prend les mêmes hypothèses que pour le théorème de Lax-Milgram, et on suppose de plus que  $a$  est symétrique, c'est à dire que  $a(u,v) = a(v,u) \quad \forall u,v$ . On définit alors la fonctionnelle  $J(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - l(v)$ , et on considère le problème de minimisation :

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que } J(u) = \min_{v \in V} J(v)$$

Alors ce problème admet une solution unique, qui est également la solution du problème variationnel précédent.

La démonstration de ce théorème vient du fait que  $J$  est une fonctionnelle quadratique, et que l'on a  $\nabla J[u](v) = a(u,v) - l(v)$ .

C'est de cette propriété que vient l'utilisation du terme "variationnel", puisqu'elle montre le lien avec le "calcul des variations".

**Remarque :** Le théorème de Lax-Milgram donne des conditions suffisantes pour que le problème soit bien posé (c'est à dire existence et unicité de la solution), pas des conditions nécessaires. Si les hypothèses de ce théorème ne sont pas satisfaites, on ne peut donc pas en

déduire que le problème est mal posé. Toutefois, dans le cas où toutes les hypothèses autres que la coercivité de  $a$  sont satisfaites, on a le résultat suivant : si  $a$  est symétrique et positive ( $a(v,v) \geq 0, \forall v \in V$ ), alors  $a$  non coercive implique que le problème est mal posé.

### 2.2.3 Retour à l'exemple 1-D

En reprenant l'exemple 1-D précédent, on peut poser :

$$a(u,v) = \int_a^b u'(x)v'(x) dx + \int_a^b c(x)u(x)v(x) dx \quad (2.7)$$

et

$$l(v) = \int_a^b f(x)v(x) dx \quad (2.8)$$

$a$  ainsi définie est une forme bilinéaire symétrique continue coercive sur  $H_0^1(a,b) \times H_0^1(a,b)$ , et  $l$  est une forme linéaire continue sur  $H_0^1(a,b)$ . Donc le problème (2.2) admet une solution unique d'après le théorème de Lax-Milgram.

Cherchons maintenant à interpréter cette solution  $u$  de (2.2). Prenons  $v = \varphi \in \mathcal{D}(]a,b[)$ . Alors

$$\int_a^b u'(x)\varphi'(x) dx + \int_a^b c(x)u(x)\varphi(x) dx = \int_a^b f(x)\varphi(x) dx$$

soit, en intégrant par parties :

$$-\int_a^b u''(x)\varphi(x) dx + \int_a^b c(x)u(x)\varphi(x) dx = \int_a^b f(x)\varphi(x) dx$$

c'est à dire  $(-u'' + cu, \varphi)_0 = (f, \varphi)_0 \forall \varphi \in \mathcal{D}(]a,b[)$ .  $\mathcal{D}(]a,b[)$  étant dense dans  $L^2(]a,b[)$ , on a donc :  $-u'' + cu = f$  dans  $L^2(]a,b[)$ .  $u$  étant dans  $L^2(]a,b[)$ , et  $f$  et  $c$  étant dans  $\mathcal{C}^0([a,b])$ , donc également dans  $L^2(]a,b[)$ , on en déduit que  $u'' = cu - f$  est aussi dans  $L^2(]a,b[)$ .

Puisque  $u$  est dans  $H_0^1(]a,b[)$  et que  $u''$  est dans  $L^2(]a,b[)$ , on en déduit que  $u$  est dans  $H^2(]a,b[)$ . Donc  $u$  est dans  $\mathcal{C}^1([a,b])$  (cf §1.4.1).

De ce fait,  $cu - f$ , c'est à dire  $u''$ , est dans  $\mathcal{C}^0([a,b])$ . Donc  $u'$  est dans  $\mathcal{C}^1([a,b])$ , donc  $u$  est dans  $\mathcal{C}^2([a,b])$ .

La solution faible  $u$  est donc aussi solution forte du problème de départ.

En résumé :

- On est parti d'un problème ( $\mathcal{P}$ ) et on a introduit sa formulation variationnelle ( $\mathcal{Q}$ ).
- On a montré l'existence et l'unicité d'une solution faible (en utilisant le théorème de Lax-Milgram). Toute solution forte étant aussi solution faible, ceci prouve qu'il y a au plus une solution forte pour ( $\mathcal{P}$ ).
- On a prouvé que cette solution faible est bien une solution forte. Le problème de départ ( $\mathcal{P}$ ) a donc une solution unique.

L'intérêt de cette démarche est d'une part que la formulation variationnelle se prête bien à l'étude de l'existence et de l'unicité de solutions, et d'autre part que l'on travaille dans des espaces de Hilbert, ce qui va permettre de faire de l'approximation interne.

## 2.2.4 Remarque: condition inf-sup

Dans le cas de la formulation plus générale (2.6), on a le théorème suivant.

**Théorème : (Banach-Neca-Babuska)** Soient  $V$  et  $W$  deux espaces de Hilbert,  $a$  une forme bilinéaire continue sur  $V \times W$ ,  $l$  une forme linéaire continue sur  $W$ . Alors le problème (2.6) admet une et une seule solution si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \inf_{v \in V} \sup_{w \in W} \frac{a(v,w)}{\|v\|_V \|w\|_W} \geq \alpha \\ \forall w \in W, (a(v,w) = 0 \quad \forall v \in V) \Rightarrow (w = 0) \end{array} \right.$$

**Remarques :**

- La première condition est appelée *condition inf-sup*.
- Contrairement au théorème de Lax-Milgram, ce théorème fournit une condition nécessaire et suffisante pour que la formulation soit bien posée.
- Pour prouver la condition inf-sup, on peut considérer une fonction  $v \in V$  et construire une fonction  $w_v \in W$  telle que  $a(v, w_v) \geq \alpha_1 \|v\|_V^2$  et  $\|w_v\|_W^2 \leq \alpha_2 \|v\|_V$ . Ceci prouve que la condition inf-sup est satisfaite, avec  $\alpha = \alpha_1/\alpha_2$ .

## 2.3 EDP elliptiques d'ordre 2

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ , de frontière  $\partial\Omega$  assez régulière. Soient des fonctions  $a_{ij}$  ( $1 \leq i, j \leq n$ ) dans  $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$  et  $a_0$  dans  $\mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ . On considère le problème :

$$(\mathcal{P}) \quad \left\{ \begin{array}{ll} - \sum_{i,j=1}^n \partial_i (a_{ij} \partial_j u) + a_0 u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_j u n_i = g & \text{sur } \Gamma_1 \end{array} \right. \quad (2.9)$$

où  $\Gamma_0$  et  $\Gamma_1$  forment une partition de  $\partial\Omega$  ( $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$  et  $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \partial\Omega$ ).

Une solution classique de  $(\mathcal{P})$ , sous l'hypothèse que  $f \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$  et  $g \in \mathcal{C}^0(\Gamma_1)$ , sera une fonction de  $\mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$  vérifiant l'équation en chaque point de  $\Omega$ .

La formulation variationnelle de  $(\mathcal{P})$  est obtenue par intégration par parties. Elle s'écrit :

$$(\mathcal{Q}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} \left( \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_j u \partial_i v + a_0 uv \right) = \int_{\Omega} f v + \int_{\Gamma_1} g v \quad \forall v \in V \end{array} \right. \quad (2.10)$$

avec  $V = \{v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}$ . Cette formulation est en fait définie dès lors que  $a_0$  et les  $a_{ij}$  sont dans  $L^\infty(\Omega)$ ,  $f$  dans  $L^2(\Omega)$  et  $g$  dans  $L^2(\Gamma_1)$ .

Posons  $a(u,v) = \int_{\Omega} \left( \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_j u \partial_i v + a_0 uv \right)$  et  $l(v) = \int_{\Omega} f v + \int_{\Gamma_1} g v$ . Il est immédiat

que  $a$  est une forme bilinéaire continue et  $l$  une forme linéaire continue sur  $V$ . Si l'EDP de départ (2.9) vérifie les deux hypothèses d'ellipticité :

- il existe  $\alpha > 0$  tel que  $\forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha \|\xi\|^2$  presque pour tout  $x \in \Omega$
- il existe  $\alpha_0$  tel que  $a_0(x) \geq \alpha_0$  presque pour tout  $x \in \Omega$

alors  $a$  est coercive :

- sur  $H_0^1(\Omega)$  dès que  $\alpha_0 > \frac{-\alpha}{C(\Omega)^2}$  (et donc en particulier si  $\alpha_0 \geq 0$ ) où  $C(\Omega)$  est la constante de l'inégalité de Poincaré
- sur  $H^1(\Omega)$  si  $\alpha_0 > 0$

Par application du théorème de Lax-Milgram, on a donc existence et unicité d'une solution à la formulation variationnelle ( $\mathcal{Q}$ ) :

- si  $\Gamma_0 = \partial\Omega$  (c'est à dire  $\Gamma_1 = \emptyset$ ) et si  $\alpha_0 > \frac{-\alpha}{C(\Omega)^2}$
- si  $\Gamma_1 \neq \emptyset$  et si  $\alpha_0 > 0$

## 2.4 Approximation interne

### 2.4.1 Principe général

Soit  $\Omega$  un domaine ouvert de  $\mathbb{R}^n$  ( $n = 1, 2$  ou  $3$  en pratique), de frontière  $\partial\Omega$ , et sur lequel on cherche à résoudre une équation aux dérivées partielles, munie de conditions aux limites. En écrivant la formulation variationnelle, on obtient un problème de la forme

$$(\mathcal{Q}) \quad \text{Trouver } u \in V \text{ tel que } a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in V$$

où  $V$  est un espace de Hilbert. Sous réserve que l'équation de départ ait de bonnes propriétés, c'est à dire par exemple qu'on soit dans les hypothèses du théorème de Lax-Milgram, ( $\mathcal{Q}$ ) admet une solution unique  $u$ . Pour obtenir une approximation numérique de  $u$ , on va maintenant remplacer l'espace  $V$  qui est en général de dimension infinie par un sous-espace  $V_h$  de dimension finie, et on va chercher à résoudre le problème approché

$$(\mathcal{Q}_h) \quad \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que } a(u_h, v_h) = l(v_h), \quad \forall v_h \in V_h$$

$V_h$  étant de dimension finie, c'est un fermé de  $V$ .  $V$  étant un espace de Hilbert,  $V_h$  l'est donc aussi. D'où l'existence et l'unicité de  $u_h$ , à nouveau par exemple d'après le théorème de Lax-Milgram.

L'espace  $V_h$  sera en pratique construit à partir d'un maillage du domaine  $\Omega$ , l'indice  $h$  désignant la "taille typique" des mailles. Lorsque l'on construit des maillages de plus en plus fins, la suite de sous-espaces  $(V_h)_h$  formera une **approximation interne** de  $V$ , c'est à dire que, pour tout élément  $\varphi$  de  $V$ , il existe une suite de  $\varphi_h \in V_h$  telle que  $\|\varphi - \varphi_h\| \rightarrow 0$

quand  $h \rightarrow 0$ . Cette méthode d'approximation interne est également appelée **méthode de Galerkin**.

**Remarque :** Dans le cas de la formulation plus générale (2.6)

$$(\mathcal{Q}') \quad \text{Trouver } u \in V \text{ tel que } a(u, w) = l(w), \quad \forall w \in W$$

le problème approché devient

$$(\mathcal{Q}'_h) \quad \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que } a(u_h, w_h) = l(w_h), \quad \forall w_h \in W_h$$

et le caractère bien posé de  $(\mathcal{Q}'_h)$  est équivalent aux deux conditions

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists \alpha_h > 0 \text{ tel que } \inf_{v_h \in V_h} \sup_{w_h \in W_h} \frac{a(v_h, w_h)}{\|v_h\|_{V_h} \|w_h\|_{W_h}} \geq \alpha_h \\ \forall w_h \in W_h, (a(v_h, w_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h) \Rightarrow (w_h = 0) \end{array} \right.$$

ou bien, de façon équivalente :

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists \alpha_h > 0 \text{ tel que } \inf_{v_h \in V_h} \sup_{w_h \in W_h} \frac{a(v_h, w_h)}{\|v_h\|_{V_h} \|w_h\|_{W_h}} \geq \alpha_h \\ \dim V_h = \dim W_h \end{array} \right.$$

La première relation est appelée *condition inf-sup discrète*. Attention : ces propriétés doivent être démontrées. Rien ne garantit a priori que la condition inf-sup discrète sera vérifiée, même si la condition inf-sup est vérifiée.

## 2.4.2 Interprétation de $u_h$

On a  $a(u, v) = l(v), \forall v \in V$ , donc en particulier  $a(u, v_h) = l(v_h), \forall v_h \in V_h$ , car  $V_h \subset V$ . Par ailleurs,  $a(u_h, v_h) = l(v_h), \forall v_h \in V_h$ . Par différence, on en déduit que

$$a(u - u_h, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in V_h \tag{2.11}$$

Dans le cas où  $a(.,.)$  est symétrique, il s'agit d'un produit scalaire sur  $V$ .  $u_h$  peut alors être interprétée comme la projection orthogonale de  $u$  sur  $V_h$  au sens de  $a(.,.)$ .

## 2.4.3 Estimation d'erreur

On a :

$$\begin{aligned} a(u - u_h, u - u_h) &= a(u - u_h, u - v_h + v_h - u_h) \quad \forall v_h \in V_h \\ &= a(u - u_h, u - v_h) + a(u - u_h, v_h - u_h) \end{aligned}$$

Or  $v_h - u_h \in V_h$ . Donc  $a(u - u_h, v_h - u_h) = 0$  d'après (2.11). On a donc :

$$a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h) \quad \forall v_h \in V_h \tag{2.12}$$

$a$  étant coercive, il existe  $\alpha > 0$  tel que  $a(u - u_h, u - u_h) \geq \alpha \|u - u_h\|^2$ , où  $\|\cdot\|$  est une norme sur  $V$ . Par ailleurs,  $a$  étant continue, il existe  $M > 0$  tel que  $a(u - u_h, u - v_h) \leq M \|u - u_h\| \|u - v_h\|$ . En réinjectant ces deux inégalités de part et d'autre de (2.12) et en simplifiant par  $\|u - u_h\|$  on obtient

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} \|u - v_h\| \quad \forall v_h \in V_h \quad (2.13)$$

c'est à dire

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} d(u, V_h) \quad (2.14)$$

où  $d$  est la distance induite par  $\|\cdot\|$ . Cette majoration est appelée **lemme de Céa**. Elle ramène l'étude de l'erreur d'approximation  $u - u_h$  à l'étude de l'erreur d'interpolation  $d(u, V_h)$ .

## 2.5 Principe général de la méthode des éléments finis

La démarche générale de la méthode des éléments finis est la suivante. On a une EDP à résoudre sur un domaine  $\Omega$ . On écrit la formulation variationnelle de cette EDP, et on se ramène donc à un problème du type

$$(\mathcal{Q}) \quad \text{Trouver } u \in V \text{ tel que } a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in V$$

On va chercher une approximation de  $u$  par approximation interne. Pour cela, on définit un maillage du domaine  $\Omega$ , grâce auquel on va définir un espace d'approximation  $V_h$ , s.e.v. de  $V$  de dimension finie  $N_h$  (par exemple  $V_h$  sera l'ensemble des fonctions continues sur  $\Omega$  et affines sur chaque maille). Le problème approché est alors

$$(\mathcal{Q}_h) \quad \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que } a(u_h, v_h) = l(v_h), \quad \forall v_h \in V_h$$

Soit  $(\varphi_1, \dots, \varphi_{N_h})$  une base de  $V_h$ . En décomposant  $u_h$  sur cette base sous la forme

$$u_h = \sum_{i=1}^{N_h} \mu_i \varphi_i \quad (2.15)$$

le problème  $(\mathcal{Q}_h)$  devient

$$\text{Trouver } \mu_1, \dots, \mu_{N_h} \text{ tels que } \sum_{i=1}^{N_h} \mu_i a(\varphi_i, v_h) = l(v_h), \quad \forall v_h \in V_h \quad (2.16)$$

ou encore par linéarité de  $a$  et  $l$ :

$$\text{Trouver } \mu_1, \dots, \mu_{N_h} \text{ tels que } \sum_{i=1}^{N_h} \mu_i a(\varphi_i, \varphi_j) = l(\varphi_j), \quad \forall j = 1, \dots, N_h \quad (2.17)$$

c'est à dire résoudre le système linéaire

$$\begin{pmatrix} a(\varphi_1, \varphi_1) & \cdots & a(\varphi_{N_h}, \varphi_1) \\ \vdots & & \vdots \\ a(\varphi_1, \varphi_{N_h}) & \cdots & a(\varphi_{N_h}, \varphi_{N_h}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_{N_h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l(\varphi_1) \\ \vdots \\ l(\varphi_{N_h}) \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

soit

$$A\mu = b \tag{2.19}$$

La matrice  $A$  est a priori pleine. Toutefois, pour limiter le volume de calculs, on va définir des fonctions de base  $\varphi_i$  dont le support sera petit, c'est à dire que chaque fonction  $\varphi_i$  sera nulle partout sauf sur quelques mailles. Ainsi les termes  $a(\varphi_i, \varphi_j)$  seront le plus souvent nuls, car correspondant à des fonctions  $\varphi_i$  et  $\varphi_j$  de supports disjoints. La matrice  $A$  sera donc une matrice creuse, et on ordonnera les  $\varphi_i$  de telle sorte que  $A$  soit à structure bande, avec une largeur de bande la plus faible possible.

A ce niveau, les difficultés majeures en pratique sont de trouver les  $\varphi_i$  et de les manipuler pour les calculs d'intégrales nécessaires à la construction de  $A$ . Sans rentrer pour le moment dans les détails, on peut toutefois indiquer que la plupart de ces difficultés seront levées grâce à trois idées principales :

- **Le principe d'isolance** — On s'attachera à trouver des degrés de liberté (ou ddl) tels que la donnée de ces ddl détermine de façon univoque toute fonction de  $V_h$ . Il pourra s'agir par exemple des valeurs de la fonction en quelques points. Déterminer une fonction reviendra alors à déterminer ses valeurs sur ces ddl.
- **Définition des  $\varphi_i$**  — On définira les fonctions de base par  $\varphi_i = 1$  sur le  $i^{\text{ème}}$  ddl, et  $\varphi_i = 0$  sur les autres ddl. La manipulation des  $\varphi_i$  sera alors très simplifiée, et les  $\varphi_i$  auront par ailleurs un support réduit à quelques mailles.
- **La notion de "famille affine d'éléments"** — Le maillage sera tel que toutes les mailles soient identiques à une transformation affine près. De ce fait, tous les calculs d'intégrales pourront se ramener à des calculs sur une seule maille "de référence", par un simple changement de variable.

## 2.6 Retour à l'exemple 1-D

On reprend le problème 1-D (2.1). On a écrit sa formulation variationnelle (cf §2.1.1) et montré (cf §2.2.3) qu'elle admet une solution unique.

On peut maintenant construire un maillage de  $[a, b]$  en définissant une subdivision (pas nécessairement régulière)  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N < x_{N+1} = b$ . Définissons alors l'espace  $V_h$ , sous-espace de  $H_0^1(a, b)$  de dimension finie, par :

$$V_h = \left\{ v_h \in C^0(a, b) / v_h \text{ affine sur chaque segment } [x_j, x_{j+1}] \text{ et } v_h(a) = v_h(b) = 0 \right\}$$

Le problème approché sur  $V_h$  est :

$$(Q_h) \quad \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que } a(u_h, v_h) = l(v_h), \quad \forall v_h \in V_h$$

En remarquant qu'une fonction de  $V_h$  est entièrement déterminée par ses valeurs en  $x_1, \dots, x_N$ , on établit que la dimension de  $V_h$  est  $N$ , et qu'une base de  $V_h$  est par exemple  $(\varphi_1, \dots, \varphi_N)$ , où  $\varphi_i$  est définie par  $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$ ,  $j = 1, \dots, N$  ( $\delta_{ij}$  est ici le symbole de Kronecker).  $\varphi_i$  est donc la fonction "chapeau" représentée sur la figure 2.1.

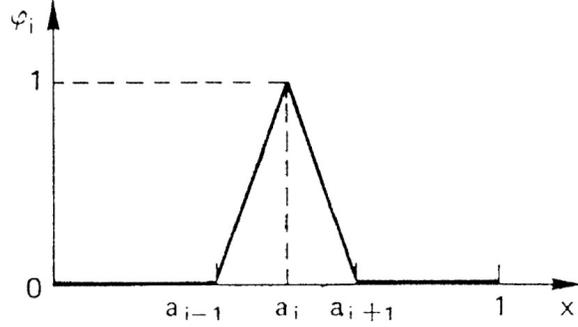


FIG. 2.1 – Fonction de base  $\varphi_i$

En décomposant la solution approchée  $u_h$  sur cette base sous la forme  $u_h = \sum_{i=1}^N \mu_i \varphi_i$ , on obtient, comme au paragraphe 2.5, le système linéaire  $A\mu = b$ , avec :

$$\begin{aligned} A_{ji} = a(\varphi_i, \varphi_j) &= \int_a^b [\varphi_i'(x)\varphi_j'(x) + c(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)] dx \\ &= \sum_{k=0}^N \int_{x_k}^{x_{k+1}} [\varphi_i'(x)\varphi_j'(x) + c(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)] dx \end{aligned} \quad (2.20)$$

Le support de  $\varphi_i$  étant réduit à  $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ , on en déduit que

$$\left\{ \begin{array}{l} a(\varphi_i, \varphi_j) = 0 \quad \text{si } |i - j| \geq 2 \\ a(\varphi_i, \varphi_{i+1}) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} [\varphi_i'(x)\varphi_{i+1}'(x) + c(x)\varphi_i(x)\varphi_{i+1}(x)] dx \\ a(\varphi_i, \varphi_{i-1}) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} [\varphi_i'(x)\varphi_{i-1}'(x) + c(x)\varphi_i(x)\varphi_{i-1}(x)] dx \\ a(\varphi_i, \varphi_i) = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [\varphi_i'^2(x) + c(x)\varphi_i^2(x)] dx \end{array} \right. \quad (2.21)$$

$A$  est donc tridiagonale.

## Compléments

1. Dans le §2.2.2, montrer que, dans le cas où  $a$  est symétrique, si  $u$  est solution du problème variationnel, alors elle est solution du problème de minimisation.

2. Montrer que  $\nabla J[u](v) = a(u,v) - l(v)$ .
3. Montrer que, si  $a$  est coercive, la matrice  $A$  de (2.19) est inversible. (C'est donc la démonstration du théorème de Lax-Milgram en dimension finie.)
4. Pour l'exemple 1-D traité dans ce chapitre, démontrer qu'on est bien dans les hypothèses du théorème de Lax-milgram
5. Calculer explicitement la matrice  $A$  pour cet exemple.
6. Pour le problème 2-D du §2.1.2, montrer que la formulation variationnelle (2.4) admet une solution unique, qui est aussi solution classique si  $f \in H^2(\Omega)$ .
7. Démontrer les résultats du §2.3

# Chapitre 3

## Eléments finis de Lagrange

On va présenter dans ce chapitre le type le plus simple et le plus classique d'éléments finis.

### 3.1 Unisolvance

**Définition :** Soit  $\Sigma = \{a_1, \dots, a_N\}$  un ensemble de  $N$  points distincts de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $P$  un espace vectoriel de dimension finie de fonctions de  $\mathbb{R}^n$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . On dit que  $\Sigma$  est  $P$ -unisolvant ssi pour tous réels  $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ , il existe un unique élément  $p$  de  $P$  tel que  $p(a_i) = \alpha_i, i = 1, \dots, N$ .

Ceci revient à dire que la fonction :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : P &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\ p &\longrightarrow (p(a_1), \dots, p(a_N)) \end{aligned} \tag{3.1}$$

est bijective.

En pratique, on montrera que  $\Sigma$  est  $P$ -unisolvant en vérifiant que  $\dim P = \text{Card } \Sigma$ , puis en montrant l'injectivité ou la surjectivité de  $\mathcal{L}$ .

L'injectivité de  $\mathcal{L}$  se démontre en établissant que la seule fonction de  $P$  s'annulant sur tous les points de  $\Sigma$  est la fonction nulle.

La surjectivité de  $\mathcal{L}$  se démontre en exhibant une famille  $p_1, \dots, p_N$  d'éléments de  $P$  tels que  $p_i(a_j) = \delta_{ij}$ , c'est à dire un antécédent pour  $\mathcal{L}$  de la base canonique de  $\mathbb{R}^N$ . En effet, étant donné des réels  $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ , la fonction  $p = \sum_{i=1}^N \alpha_i p_i$  vérifie alors  $p(a_j) = \alpha_j, j = 1, \dots, N$ .

### 3.2 Élément fini de Lagrange

**Définition :** Un **élément fini de Lagrange** est un triplet  $(K, \Sigma, P)$  tel que

- $K$  est un élément géométrique de  $\mathbb{R}^n$  ( $n = 1, 2$  ou  $3$ ), compact, connexe, et d'intérieur non vide.
- $\Sigma = \{a_1, \dots, a_N\}$  est un ensemble fini de  $N$  points distincts de  $K$ .

- $P$  est un espace vectoriel de dimension finie de fonctions réelles définies sur  $K$ , et tel que  $\Sigma$  soit  $P$ -unisolvant (donc  $\dim P = N$ ).

**Définition:** Soit  $(K, \Sigma, P)$  un élément fini de Lagrange. On appelle **fonctions de base locales** de l'élément les  $N$  fonctions  $p_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) de  $P$  telles que

$$p_i(a_j) = \delta_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq N. \quad (3.2)$$

On vérifie aisément que  $(p_1, \dots, p_N)$  ainsi définie forme bien une base de  $P$ .

**Définition:** On appelle **opérateur de  $P$ -interpolation** sur  $\Sigma$  l'opérateur  $\pi_K$  qui, à toute fonction  $v$  définie sur  $K$ , associe la fonction  $\pi_K v$  de  $P$  définie par  $\pi_K v = \sum_{i=1}^N v(a_i) p_i$ .  $\pi_K v$  est donc l'unique élément de  $P$  qui prend les mêmes valeurs que  $v$  sur les points de  $\Sigma$ .

### 3.3 Exemples d'éléments finis de Lagrange

#### 3.3.1 Espaces de polynômes

On notera  $P_k$  l'espace vectoriel des polynômes de degré total inférieur ou égal à  $k$ .

- Sur  $\mathbb{R}$ ,  $P_k = \text{Vect}\{1, X, \dots, X^k\}$  et  $\dim P_k = k + 1$ .
- Sur  $\mathbb{R}^2$ ,  $P_k = \text{Vect}\{X^i Y^j; 0 \leq i + j \leq k\}$  et  $\dim P_k = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ .
- Sur  $\mathbb{R}^3$ ,  $P_k = \text{Vect}\{X^i Y^j Z^l; 0 \leq i + j + l \leq k\}$  et  $\dim P_k = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}$ .

On notera  $Q_k$  l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à  $k$  par rapport à chaque variable.

- Sur  $\mathbb{R}$ ,  $Q_k = P_k$ .
- Sur  $\mathbb{R}^2$ ,  $Q_k = \text{Vect}\{X^i Y^j; 0 \leq i, j \leq k\}$  et  $\dim Q_k = (k+1)^2$ .
- Sur  $\mathbb{R}^3$ ,  $Q_k = \text{Vect}\{X^i Y^j Z^l; 0 \leq i, j, l \leq k\}$  et  $\dim Q_k = (k+1)^3$ .

#### 3.3.2 Exemples 1-D

**Elément  $P_1$**

- $K = [a, b]$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $P = P_1$

**Elément  $P_2$**

- $K = [a, b]$
- $\Sigma = \{a, \frac{a+b}{2}, b\}$
- $P = P_2$

**Elément  $P_m$**

- $K = [a, b]$
- $\Sigma = \{a + i \frac{b-a}{m}, i = 0, \dots, m\}$
- $P = P_m$

### 3.3.3 Exemples 2-D triangulaires

**Elément  $P_1$**

- $K$ =triangle de sommets  $a_1, a_2, a_3$
- $\Sigma = \{a_1, a_2, a_3\}$
- $P = P_1$

Les fonctions de base sont définies par  $p_i(a_j) = \delta_{ij}$ . Ce sont donc les coordonnées barycentriques :  $p_i = \lambda_i$  (cf annexe A).

**Elément  $P_2$**

- $K$ =triangle de sommets  $a_1, a_2, a_3$
- $\Sigma = \{a_1, a_2, a_3, a_{12}, a_{13}, a_{23}\}$ , où  $a_{ij} = \frac{a_i + a_j}{2}$ .
- $P = P_2$

Les fonctions de base sont  $p_i = \lambda_i(2\lambda_i - 1)$  et  $p_{ij} = 4\lambda_i\lambda_j$ . Un exemple de calcul de ces fonctions de base est donné en annexe A.

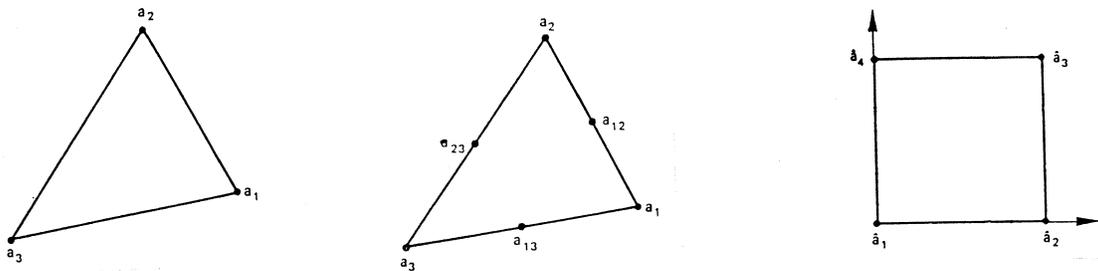


FIG. 3.1 – *Eléments finis triangulaire  $P_1$ , triangulaire  $P_2$  et rectangulaire  $Q_1$*

### 3.3.4 Exemples 2-D rectangulaires

**Elément  $Q_1$**

- $K$ =rectangle de sommets  $a_1, a_2, a_3, a_4$ , de côtés parallèles aux axes
- $\Sigma = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$
- $P = Q_1$

Les fonctions de base sont  $p_i(X,Y) = \frac{(X - x_j)(Y - y_j)}{(x_i - x_j)(y_i - y_j)}$ , où  $(x_i, y_i)$  sont les coordonnées de  $a_i$ , et où  $a_j$ , de coordonnées  $(x_j, y_j)$  est le coin opposé à  $a_i$ .

### 3.3.5 Exemples 3-D

#### Elément tétraédrique $P_1$

- $K$ =tétraèdre de sommets  $a_1, a_2, a_3, a_4$
- $\Sigma = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$
- $P = P_1$

#### Elément tétraédrique $P_2$

- $K$ =tétraèdre de sommets  $a_1, a_2, a_3, a_4$
- $\Sigma = \{a_i\}_{1 \leq i \leq 4} \cup \{a_{ij}\}_{1 \leq i < j \leq 4}$
- $P = P_2$

Les fonctions de base sont  $p_i = \lambda_i(2\lambda_i - 1)$  et  $p_{ij} = 4\lambda_i\lambda_j$ .

#### Elément parallélépipédique $Q_1$

- $K$ =parallélépipède de sommets  $a_1, \dots, a_8$  de côtés parallèles aux axes
- $\Sigma = \{a_i\}_{1 \leq i \leq 8}$
- $P = Q_1$

#### Elément prismatique

- $K$ =prisme droit de sommets  $a_1, \dots, a_6$
- $\Sigma = \{a_i\}_{1 \leq i \leq 6}$
- $P = \{p(X,Y,Z) = (a + bX + cY) + Z(d + eX + fY), a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}\}$

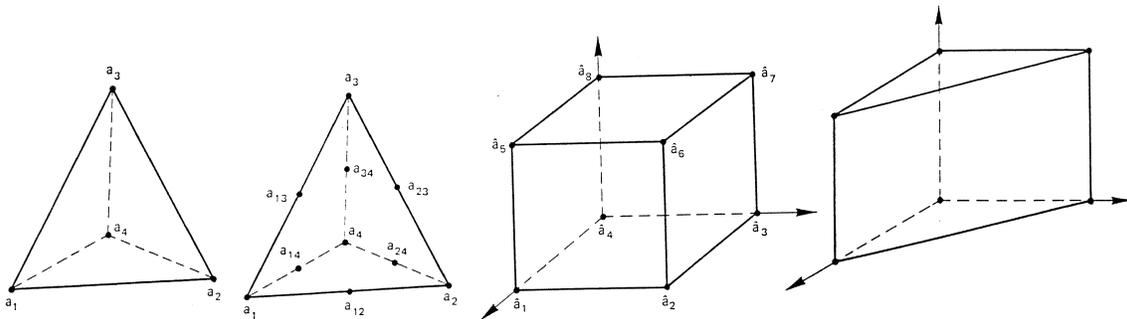


FIG. 3.2 – *Eléments finis tétraédriques  $P_1$  et  $P_2$ , parallélépipédique  $Q_1$ , et prismatique*

### 3.4 Famille affine d'éléments finis

**Définition :** Deux éléments finis  $(\hat{K}, \hat{\Sigma}, \hat{P})$  et  $(K, \Sigma, P)$  sont **affine-équivalents** ssi il existe une fonction affine  $F$  inversible ( $F : \hat{x} \rightarrow B\hat{x} + b$ ) telle que

- $K = F(\hat{K})$
- $a_i = F(\hat{a}_i) \quad i = 1, \dots, N$
- $P = \{\hat{p} \circ F^{-1}, \hat{p} \in \hat{P}\}$

**Remarque :** Si l'on est dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $B$  est donc une matrice  $n \times n$  inversible, et  $b$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ .

**Propriété :** Soient  $(\hat{K}, \hat{\Sigma}, \hat{P})$  et  $(K, \Sigma, P)$  deux éléments finis affine-équivalents, via une transformation  $F$ . On note  $\hat{p}_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) les fonctions de base locales de  $\hat{K}$ . Alors les fonctions de base locales de  $K$  sont les  $p_i = \hat{p}_i \circ F^{-1}$ .

**Définition :** On appelle **famille affine d'éléments finis** une famille d'éléments finis tous affine-équivalents à un même élément fini  $(\hat{K}, \hat{\Sigma}, \hat{P})$ , appelé **élément de référence**.

D'un point de vue pratique, le fait de travailler avec une famille affine d'éléments finis permet de ramener tous les calculs d'intégrales à des calculs sur l'élément de référence.

Les éléments de référence sont :

- En 1-D : le segment  $[0,1]$
- En 2-D triangulaire : le triangle unité, de sommets  $(0,0)$ ,  $(0,1)$  et  $(1,0)$ .
- En 2-D rectangulaire : le carré unité  $[0,1] \times [0,1]$ .
- En 3-D tétraédrique : le tétraèdre unité, de sommets  $(0,0,0)$ ,  $(1,0,0)$ ,  $(0,1,0)$  et  $(0,0,1)$ .
- En 3-D parallélépipédique : le cube unité  $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ .
- En 3-D prismatique : le prisme unité de sommets  $(0,0,0)$ ,  $(0,1,0)$ ,  $(1,0,0)$ , et  $(0,0,1)$ ,  $(0,1,1)$ ,  $(1,0,1)$ .

### 3.5 Du problème global aux éléments locaux

On va maintenant faire le lien entre la résolution d'un problème par méthode d'éléments finis et les notions qui viennent d'être introduites.

Soit une EDP à résoudre sur un domaine  $\Omega$ , et  $V$  l'espace de Hilbert dans lequel on cherche une solution de la formulation variationnelle du problème. On réalise un maillage de  $\Omega$  par une famille affine de  $N_e$  éléments finis  $(K_i, \Sigma_i, P_i)_{i=1, \dots, N_e}$ .

Par unisolvance, la solution approchée  $u_h$  sera entièrement définie sur chaque élément  $(K_i, \Sigma_i, P_i)$  par ses valeurs sur les points de  $\Sigma_i$ , qu'on appellera les **noeuds du maillage**. Il est à noter qu'un noeud sera en général commun à plusieurs éléments adjacents. Le nombre total de noeuds  $N_h$  est donc inférieur à  $N_e \times \text{Card}\Sigma_i$ , et on a  $\dim V_h = N_h$ . Notons  $a_1, \dots, a_{N_h}$  les noeuds du maillage. Le problème approché se ramène donc à la détermination des valeurs de  $u_h$  aux points  $a_i$ : ce sont les degrés de liberté du problème approché.

On va construire une base de  $V_h$  en associant à chaque ddl  $a_i$  un vecteur de la base. On définit ainsi les **fonctions de base globales**  $\varphi_i$  ( $i = 1, \dots, N_h$ ) par

$$\varphi_i|_{K_j} \in P_j, \quad j = 1, \dots, N_e \quad \text{et} \quad \varphi_i(a_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq N_h \quad (3.3)$$

L'espace d'approximation interne est donc alors :

$$V_h = \text{Vect} \{ \varphi_1, \dots, \varphi_{N_h} \} \quad (3.4)$$

Il est facile de remarquer qu'une telle fonction  $\varphi_i$  est nulle partout, sauf sur les éléments dont  $a_i$  est un noeud. En effet, si  $a_i$  n'appartient pas à un élément  $K$ ,  $\varphi_i$  est nulle sur tous les noeuds de  $K$ , et donc sur  $K$  tout entier par unisolvance.

De plus, sur un élément  $K$  dont  $a_i$  est un noeud,  $\varphi_i$  vaut 1 sur  $a_i$  et 0 sur les autres noeuds de  $K$ . Donc  $\varphi_i|_K$  est une fonction de base locale de  $K$ . On voit donc que **la fonction de base globale  $\varphi_i$  est construite comme réunion des fonctions de base locales sur les éléments du maillage dont  $a_i$  est un noeud.**

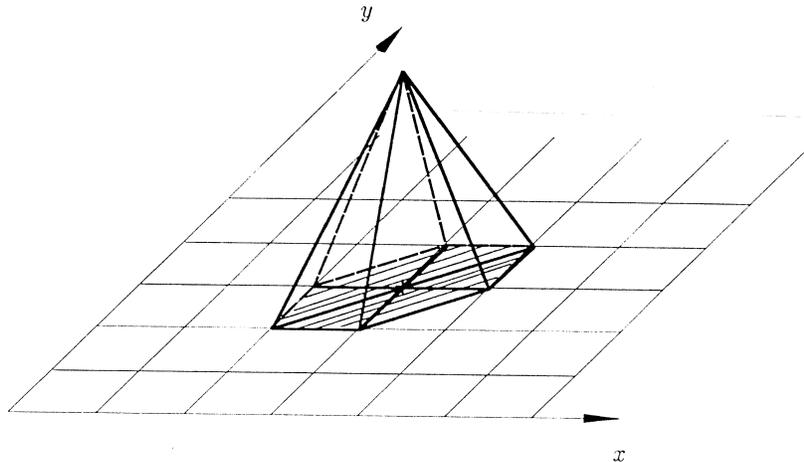


FIG. 3.3 – Exemple de fonction de base globale (élément triangulaire  $P_1$ )

C'est à ce niveau que se situe le lien entre les définitions locales introduites au §3.2 et le problème global approché à résoudre. Par ailleurs, ceci implique que tous les calculs à effectuer sur les fonctions de base globales peuvent se ramener à des calculs sur les fonctions de base locales, et donc simplement à des calculs sur l'élément de référence (car on a maillé le domaine avec une famille d'éléments finis affine-équivalents).

**Remarque :** Ce type de définition des fonctions de base n'est possible que si le maillage est **conforme**, c'est à dire si l'intersection entre deux éléments est soit vide, soit réduite à un sommet ou une arête en dimension 2 (ou à un sommet, une arête ou une face en dimension 3). On interdit ainsi les situations du type de celle de la figure 3.4.

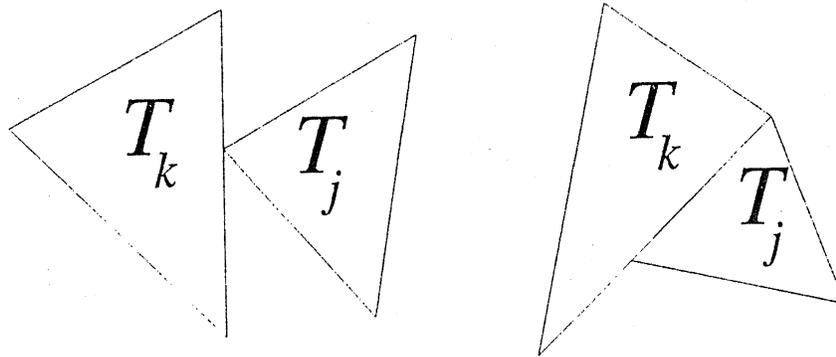


FIG. 3.4 – Exemples de maillage non conforme

## Compléments

1. Calculer les fonctions de base locales des éléments finis de Lagrange introduits dans ce chapitre.
2. Donner l'allure des fonctions de base globales correspondantes. Sont-elles continues? dérivables?
3. Pour les éléments finis de Lagrange introduits dans ce chapitre, écrire le changement de variable affine entre élément quelconque et élément de référence.

# Chapitre 4

## Eléments finis d’Hermite

### 4.1 Classe d’un élément fini

Une question naturelle survenant dans la méthode des éléments finis est de savoir quelle est la régularité de la solution approchée  $u_h$ ? En particulier,  $u_h$  est-elle continue? dérivable?  $u_h$  étant combinaison linéaire des fonctions de base globales  $\varphi_i$ , la question est donc de déterminer la régularité de ces fonctions de base globales. Or, la restriction d’une fonction de base globale à un élément de maillage est une fonction de base locale de cet élément, c’est à dire qu’elle appartient à un espace de fonctions de régularité connue (en général il s’agit d’un espace de polynômes, donc de fonctions  $\mathcal{C}^\infty$ ). La régularité de  $\varphi_i$  sera donc en fait donnée par sa régularité au niveau des interfaces entre les éléments adjacents formant son support.

Pour les éléments finis de Lagrange introduits au chapitre précédent, les fonctions de base globales sont le plus souvent continues, sauf dans quelques cas particuliers (par exemple les fonctions constantes par maille). Par contre, elles ne sont jamais dérivables (cf figure 3.3). Prenons par exemple le cas très simple des éléments finis  $P_m$  ( $m \geq 1$ ) en 1-D (cf §3.3.2). Soient  $K_1$  et  $K_2$  deux mailles adjacentes, et  $\{a\} = K_1 \cap K_2$  leur point commun.  $a$  est un noeud du maillage. Notons  $\varphi_a$  la fonction de base globale associée. On impose à  $\varphi_a$  de vérifier  $\varphi_a|_{K_1} = p_1$  avec  $p_1 \in P_m(K_1)$ ,  $\varphi_a|_{K_2} = p_2$  avec  $p_2 \in P_m(K_2)$  et  $p_1(a) = p_2(a) = 1$ . Ceci va imposer la continuité de  $\varphi_a$  au point  $a$  (et donc sur  $K_1 \cup K_2$ ). Par contre, cela n’impose pas du tout la dérivabilité de  $\varphi_a$  en  $a$ . Il faudrait pour cela contrôler la dérivée de  $\varphi_a$  en imposant  $p'_1(a) = p'_2(a)$ .

C’est pour permettre ce type d’amélioration que l’on va généraliser la notion d’élément fini.

### 4.2 Eléments finis d’Hermite

#### 4.2.1 Définitions

**Définition :** Un **élément fini d’Hermite** ou **élément fini général** est un triplet  $(K, \Sigma, P)$  tel que

- $K$  est un élément géométrique de  $\mathbb{R}^n$  ( $n = 1, 2$  ou  $3$ ), compact, connexe, et d’intérieur

non vide.

- $\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_N\}$  est un ensemble de  $N$  formes linéaires sur l'espace des fonctions définies sur  $K$ , ou sur un sous-espace plus régulier contenant  $P$ .
- $P$  est un espace vectoriel de dimension  $N$  de fonctions réelles définies sur  $K$ , et tel que  $\Sigma$  soit  $P$ -unisolvant.

**Remarque :** La définition de l'unisolvance est légèrement modifiée par rapport aux éléments finis de Lagrange.  $\Sigma$  est  $P$ -unisolvant ssi pour tous réels  $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ , il existe un unique élément  $p$  de  $P$  tel que  $\sigma_i(p) = \alpha_i, i = 1, \dots, N$ .

Ceci revient à dire que la fonction :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : P &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\ p &\longrightarrow (\sigma_1(p), \dots, \sigma_N(p)) \end{aligned} \quad (4.1)$$

est bijective.

**Définition :** Soit  $(K, \Sigma, P)$  un élément fini général. On appelle **fonctions de base locales** de l'élément les  $N$  fonctions  $p_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) de  $P$  telles que

$$\sigma_j(p_i) = \delta_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq N. \quad (4.2)$$

**Définition :** On appelle **opérateur de  $P$ -interpolation** sur  $\Sigma$  l'opérateur  $\pi_K$  qui, à toute fonction  $v$  définie sur  $K$  associe la fonction  $\pi_K v$  de  $P$  définie par  $\pi_K v = \sum_{i=1}^N \sigma_i(v) p_i$ .  $\pi_K v$  est donc l'unique élément de  $P$  qui prend les mêmes valeurs que  $v$  sur les éléments de  $\Sigma$ .

## 4.2.2 Lien avec les éléments finis de Lagrange

Avec les définitions précédentes, les éléments finis de Lagrange apparaissent donc comme un cas particulier des éléments finis généraux, pour lequel

$$\sigma_i(p) = p(a_i) \quad i = 1, \dots, N \quad (4.3)$$

Cette généralisation permet maintenant d'introduire des opérateurs de dérivation dans  $\Sigma$ , et donc d'améliorer la régularité des fonctions de  $V_h$ .

## 4.2.3 Fonctions de base globales

On reprend les notations du §3.5. Les  $N_h$  degrés de liberté sont maintenant les valeurs des formes linéaires sur les  $N_e$  éléments du maillage. Pour le cas d'un problème dans  $\mathbb{R}^2$  avec un maillage par des triangles, ce pourront être par exemple les valeurs de  $u_h, \frac{\partial u_h}{\partial x}$  et  $\frac{\partial u_h}{\partial y}$  sur les sommets de la triangulation.

Les fonctions de base globales  $\varphi_i$  ( $i = 1, \dots, N_h$ ) sont définies par :

$$\varphi_i|_{K_j} \in P_j, \quad j = 1, \dots, N_e \quad \text{et} \quad \sigma_j(\varphi_i) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq N_h \quad (4.4)$$

Suivant les éléments utilisés, ces fonctions de base pourront être de classe  $\mathcal{C}^1$  ou plus, et il en sera donc de même pour la solution approchée  $u_h$ .

## 4.3 Exemples

### 4.3.1 Exemples 1-D

#### Elément d'Hermite cubique

- $K = [a, b]$
- $\Sigma = \{p(a), p'(a), p(b), p'(b)\}$
- $P = P_3$

Cet élément fini est  $\mathcal{C}^1$  et  $H^2$ .

#### Elément d'Hermite quintique

- $K = [a, b]$
- $\Sigma = \{p(a), p'(a), p''(a), p(b), p'(b), p''(b)\}$
- $P = P_5$

Cet élément fini est  $\mathcal{C}^2$  et  $H^3$ .

### 4.3.2 Exemples 2-D triangulaires

#### Elément d'Hermite cubique

- $K = \text{triangle de sommets } a_1, a_2, a_3$
- $\Sigma = \left\{ p(a_i), \frac{\partial p}{\partial x}(a_i), \frac{\partial p}{\partial y}(a_i), i = 1, 2, 3 \right\} \cup \{p(a_0)\}$
- $P = P_3$

Cet élément fini est  $\mathcal{C}^0$ , mais pas  $\mathcal{C}^1$ .

#### Elément d'Argyris

- $K = \text{triangle de sommets } a_1, a_2, a_3$
- $\Sigma = \left\{ p(a_i), \frac{\partial p}{\partial x}(a_i), \frac{\partial p}{\partial y}(a_i), \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(a_i), \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}(a_i), \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y}(a_i), i = 1, 2, 3 \right\} \cup \left\{ \frac{\partial p}{\partial n}(a_{ij}), 1 \leq i < j \leq 3 \right\}$
- $P = P_5$

Cet élément fini est  $\mathcal{C}^1$ .

### 4.3.3 Exemple 2-D rectangulaire

#### Elément $Q_3$

- $K$ =rectangle de sommets  $a_1, a_2, a_3, a_4$ , de côtés parallèles aux axes
- $\Sigma = \left\{ p(a_i), \frac{\partial p}{\partial x}(a_i), \frac{\partial p}{\partial y}(a_i), \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y}(a_i), i = 1, \dots, 4 \right\}$
- $P = Q_3$

Cet élément fini est  $\mathcal{C}^1$ .

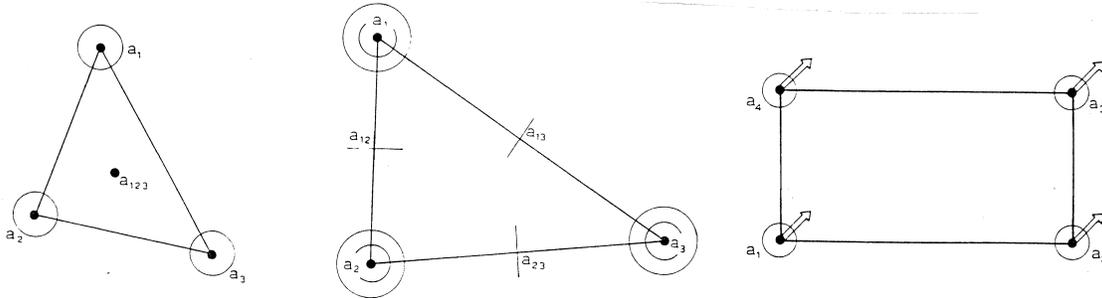


FIG. 4.1 – *Elément triangulaire d’Hermite cubique, élément d’Argyris et élément rectangulaire  $Q_3$*

### Compléments

Pour chaque élément fini d’Hermite 1-D et 2-D présenté dans ce chapitre, calculer ses fonctions de base locales, et démontrer sa régularité ( $\mathcal{C}^1$ , etc).

# Chapitre 5

## Convergence de la méthode des éléments finis

### 5.1 Introduction

On suppose ici que l'on résout un problème sur un domaine  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  de façon approchée par méthode d'éléments finis.

Le but de ce chapitre est de fournir une estimation de l'erreur  $\|u - u_h\|_m$  où  $\|\cdot\|_m$  désigne la norme  $H^m$ . La régularité de  $u$  et de  $u_h$  (et donc les valeurs possibles pour  $m$ ) dépendent évidemment du problème continu et du type d'éléments finis choisis pour sa résolution, on exposera ici la démarche de façon générale, en supposant les fonctions suffisamment régulières par rapport à la valeur de  $m$ . En pratique, on aura le plus souvent  $m = 0, 1$  ou  $2$ .

On notera  $\mathcal{T}_h$  le maillage de  $\Omega$  considéré. On supposera ici le domaine  $\Omega$  polygonal, ce qui permet de recouvrir exactement  $\Omega$  par le maillage. Si ce n'est pas le cas, les calculs qui suivent doivent être modifiés pour tenir compte de l'écart entre le domaine couvert par le maillage et le domaine réel.

Les différentes étapes du calcul seront, de façon assez schématique, les suivantes :

$\ u - u_h\ _m \leq C \ u - \pi_h u\ _m$	L'erreur d'approximation est bornée par l'erreur d'interpolation
$\ u - \pi_h u\ _m^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \ u - \pi_h u\ _{m,K}^2$	On se ramène à des majorations locales sur chaque élément
$\ u - \pi_h u\ _{m,K} \leq C(K) \ \hat{u} - \hat{\pi} \hat{u}\ _{m,\hat{K}}$	On se ramène à l'élément de référence
$\ \hat{u} - \hat{\pi} \hat{u}\ _{m,\hat{K}} \leq \hat{C}  \hat{u} _{k+1,\hat{K}}$	Majoration sur l'élément de référence
$\ u - \pi_h u\ _m \leq C' h^{k+1-m}  u _{k+1}$	Assemblage des majorations locales

## 5.2 Calcul de majoration d'erreur

### 5.2.1 Etape 1: majoration par l'erreur d'interpolation

L'équation (2.13) établie au § 2.4.3 indique que

$$\|u - u_h\|_m \leq \frac{M}{\alpha} \|u - v_h\|_m \quad \forall v_h \in V_h \quad (5.1)$$

On peut l'appliquer dans le cas particulier où  $v_h = \pi_h u$ , ce qui donne

$$\|u - u_h\|_m \leq \frac{M}{\alpha} \|u - \pi_h u\|_m \quad (5.2)$$

### 5.2.2 Etape 2: Décomposition sur les éléments

On a, avec des notations évidentes :

$$\begin{aligned} \|u - \pi_h u\|_m^2 &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|u - \pi_h u\|_{m,K}^2 \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{l=0}^m |u - \pi_h u|_{l,K}^2 \end{aligned}$$

Le calcul est donc ramené à un calcul sur chaque élément, pour toutes les semi-normes  $|\cdot|_{l,K}$ ,  $l = 0, \dots, m$ .

### 5.2.3 Etape 3: Passage à l'élément de référence

**Théorème :** Soit  $K$  un élément quelconque de  $\mathcal{T}_h$ , et  $\hat{K}$  l'élément de référence. Soit  $F$  la transformation affine de  $\hat{K}$  vers  $K$  :  $F(\hat{x}) = B\hat{x} + b$ , avec  $B$  inversible. On a :

$$\forall v \in H^l(K), \quad |\hat{v}|_{l,\hat{K}} \leq C(l,n) \|B\|_2^l |\det B|^{-1/2} |v|_{l,K} \quad (5.3)$$

*Démonstration :* Il s'agit là en fait d'un simple résultat de changement de variable dans une intégrale.

Soit  $v$  une fonction  $l$  fois différentiable au point  $x$ . On note  $D^l v(x)$  sa dérivée  $l^{\text{ème}}$  au sens de Fréchet au point  $x$ . Il s'agit donc d'une forme  $l$ -linéaire symétrique sur  $\mathbb{R}^n$ . On notera  $D^l v(x) \cdot (\xi_1, \dots, \xi_l)$  sa valeur pour  $l$  vecteurs  $\xi_i \in \mathbb{R}^n$  ( $1 \leq i \leq l$ ).

Reprenons les notations du §1.4.1.  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  désigne un multi-entier, et on note  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ . On a alors :

$$|v|_{l,K}^2 = \int_{x \in K} \sum_{|\alpha|=l} \left\| \partial^{|\alpha|} v(x) \right\|^2 dx \quad (5.4)$$

et :

$$\partial^{|\alpha|} v(x) = D^{|\alpha|} v(x) \cdot \underbrace{(e_1, \dots, e_1)}_{\alpha_1 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{(e_n, \dots, e_n)}_{\alpha_n \text{ fois}} \quad (5.5)$$

où  $(e_1, \dots, e_n)$  désigne la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . Alors, en posant :

$$\|D^l v(x)\| = \sup_{\xi_1, \dots, \xi_l \in (\mathbb{R}^*)^n} \frac{D^l v(x) \cdot (\xi_1, \dots, \xi_l)}{|\xi_1| \cdots |\xi_l|}, \quad (5.6)$$

on déduit qu'il existe des constantes  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  dépendant uniquement de  $n$  et  $l$  (donc en particulier indépendantes de  $v$ ) telles que

$$\gamma_1 |v|_{l,K} \leq \left( \int_{x \in K} \|D^l v(x)\|^2 dx \right)^{1/2} \leq \gamma_2 |v|_{l,K} \quad (5.7)$$

Par ailleurs, si l'on utilise le changement de variable  $x = F(\hat{x}) = B\hat{x} + b$  dans  $D^l v(x)$ , il vient :

$$\forall \xi_1, \dots, \xi_l \in \mathbb{R}^n, \quad D^l \hat{v}(\hat{x}) \cdot (\xi_1, \dots, \xi_l) = D^l v(x) \cdot (B\xi_1, \dots, B\xi_l) \quad (5.8)$$

d'où

$$\|D^l \hat{v}(\hat{x})\| \leq \|B\|^l \|D^l v(x)\| \quad (5.9)$$

Or,  $D^l v(x) = D^l v(F(\hat{x}))$ . Donc

$$\int_{\hat{x} \in \hat{K}} \|D^l \hat{v}(\hat{x})\|^2 d\hat{x} \leq \|B\|^{2l} \int_{\hat{x} \in \hat{K}} \|D^l v(F(\hat{x}))\|^2 d\hat{x} = \|B\|^{2l} |\det B|^{-1} \int_{x \in K} \|D^l v(x)\|^2 dx \quad (5.10)$$

En minorant et majorant (5.10) grâce à (5.7), on obtient :

$$\gamma_1^2 |\hat{v}|_{l,\hat{K}}^2 \leq \|B\|^{2l} |\det B|^{-1} \gamma_2^2 |v|_{l,K}^2 \quad (5.11)$$

d'où le résultat (5.3).

**Corollaire :** On a de même :

$$\forall v \in H^l(K), \quad |v|_{l,K} \leq C(l,n) \|B^{-1}\|_2^l |\det B|^{1/2} |\hat{v}|_{l,\hat{K}} \quad (5.12)$$

**Estimation de  $\|B\|$**

Soit  $h_K$  le diamètre de  $K$ , c'est à dire le maximum des distances euclidiennes entre deux points de  $K$ . Soit  $\rho_K$  la rondeur de  $K$ , c'est à dire le diamètre maximum des sphères incluses dans  $K$ . On a :

$$\|B\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=\hat{\rho}} \frac{\|Bx\|}{\hat{\rho}} \quad (5.13)$$

Soit  $x$  un vecteur de  $\mathbb{R}^n$  tel que  $\|x\| = \hat{\rho}$ . Par définition de  $\hat{\rho}$ , il existe deux points  $\hat{y}$  et  $\hat{z}$  de  $\hat{K}$  tels que  $x = \hat{y} - \hat{z}$ . Alors  $Bx = B\hat{y} - B\hat{z} = F(\hat{y}) - F(\hat{z}) = y - z$  avec  $y$  et  $z$  appartenant à  $K$ . Par définition de  $h_K$ ,  $\|y - z\| \leq h_K$ . Donc  $\|Bx\| \leq h_K$ . En reportant dans la définition de  $\|B\|$ , on obtient donc :

$$\|B\| \leq \frac{h_K}{\hat{\rho}} \quad (5.14)$$

Et on a évidemment de même :

$$\|B^{-1}\| \leq \frac{\hat{h}}{\rho_K} \quad (5.15)$$

## 5.2.4 Etape 4: Majoration sur l'élément de référence

Le résultat principal est le suivant :

**Théorème :** Soient  $l$  et  $k$  deux entiers tels que  $0 \leq l \leq k + 1$ . Si  $\hat{\pi} \in \mathcal{L}(H^{k+1}(\hat{K}), H^l(\hat{K}))$  laisse  $P_k(\hat{K})$  invariant (c'est à dire vérifie  $\forall \hat{p} \in P_k(\hat{K}), \hat{\pi}\hat{p} = \hat{p}$ ), alors

$$\exists C(\hat{K}, \hat{\pi}), \forall \hat{v} \in H^{k+1}(\hat{K}), |\hat{v} - \hat{\pi}\hat{v}|_{l, \hat{K}} \leq C|\hat{v}|_{k+1, \hat{K}} \quad (5.16)$$

*Démonstration :*

$\hat{\pi} \in \mathcal{L}(H^{k+1}(\hat{K}), H^l(\hat{K}))$ , et donc  $I - \hat{\pi} \in \mathcal{L}(H^{k+1}(\hat{K}), H^l(\hat{K}))$  car  $l \leq k + 1$ .

Et donc  $|\hat{v} - \hat{\pi}\hat{v}|_{l, \hat{K}} \leq \|I - \hat{\pi}\|_{\mathcal{L}(H^{k+1}(\hat{K}), H^l(\hat{K}))} \|\hat{v}\|_{k+1, \hat{K}}$ .

On utilise maintenant l'invariance de  $P_k(\hat{K})$ :

$$\forall \hat{p} \in P_k(\hat{K}), \hat{v} - \hat{\pi}\hat{v} = (I - \hat{\pi})(\hat{v}) = (I - \hat{\pi})(\hat{v} + \hat{p}) \quad (5.17)$$

Donc

$$|\hat{v} - \hat{\pi}\hat{v}|_{l, \hat{K}} \leq \|I - \hat{\pi}\|_{\mathcal{L}(\dots)} \inf_{\hat{p} \in P_k(\hat{K})} \|\hat{v} + \hat{p}\|_{k+1, \hat{K}} \quad (5.18)$$

On aura donc démontré le théorème si l'on montre que

$$\exists C, \forall \hat{v} \in H^{k+1}(\hat{K}) \inf_{\hat{p} \in P_k(\hat{K})} \|\hat{v} + \hat{p}\|_{k+1, \hat{K}} \leq C|\hat{v}|_{k+1, \hat{K}} \quad (5.19)$$

Soit  $(f_i)_{i=0, \dots, k}$  une base du dual de  $P_k(\hat{K})$ . D'après le théorème d'Hahn-Banach, il existe des formes linéaires continues sur  $H^{k+1}(\hat{K})$ , que l'on notera encore  $f_i$ , et qui prolongent les  $f_i$ . En particulier, si  $\hat{p} \in P_k(\hat{K})$  vérifie  $f_i(\hat{p}) = 0$ , ( $i = 0, \dots, k$ ), alors  $\hat{p} = 0$ . Nous allons montrer que

$$\exists C, \forall \hat{v} \in H^{k+1}(\hat{K}), \|\hat{v}\|_{k+1, \hat{K}} \leq C \left\{ |\hat{v}|_{k+1, \hat{K}} + \sum_{i=0}^k |f_i(\hat{v})| \right\} \quad (5.20)$$

On aura le résultat souhaité en appliquant (5.20) à  $\hat{v} + \hat{q}$ , avec  $\hat{q}$  tel que  $f_i(\hat{q}) = f_i(-\hat{v})$ .

La relation (5.20) se démontre par l'absurde. Si elle n'est pas vraie, alors il existe une suite de fonctions  $\hat{v}_n$  de  $H^{k+1}(\hat{K})$  telles que :

$$\|\hat{v}_n\|_{k+1, \hat{K}} = 1, \quad |\hat{v}_n|_{k+1, \hat{K}} \longrightarrow 0, \quad \text{et } \forall i \ f_i(\hat{v}_n) \longrightarrow 0 \quad (5.21)$$

Par complétude de  $H^{k+1}(\hat{K})$ , on extrait une sous-suite convergente vers  $\hat{v} \in H^{k+1}(\hat{K})$ . Mais  $|\hat{v}_n|_{k+1, \hat{K}} \longrightarrow 0$ . Donc  $\hat{v} \in P_k(\hat{K})$  et  $f_i(\hat{v}) = 0$ . D'où une contradiction.

## 5.2.5 Etape 5: Assemblage des majorations locales

### Majoration sur un élément quelconque

En rassemblant les résultats précédents, on peut établir une majoration sur un élément quelconque  $K$  du maillage. On a :

$$|v - \pi_K v|_{l, K} \leq C(l, n) \|B^{-1}\|^l |\det B|^{1/2} |\hat{v} - \hat{\pi}\hat{v}|_{l, \hat{K}} \quad \text{d'après (5.12)}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C(l,n) \|B^{-1}\|^l |\det B|^{1/2} C(\hat{K},\hat{\pi}) |\hat{v}|_{k+1,\hat{K}} \quad \text{d'après (5.16)} \\
&\leq C(l,n) \|B^{-1}\|^l |\det B|^{1/2} C(\hat{K},\hat{\pi}) C(k+1,n) \|B\|^{k+1} |\det B|^{-1/2} |v|_{k+1,K} \\
&\quad \text{d'après (5.3)} \\
&\leq C(l,n) \frac{\hat{h}^l}{\rho_K^l} C(\hat{K},\hat{\pi}) C(k+1,n) \frac{h_K^{k+1}}{\hat{\rho}_K^{k+1}} |v|_{k+1,K} \quad \text{d'après (5.14) et (5.15)}
\end{aligned}$$

D'où finalement :

$$|v - \pi_K v|_{l,K} \leq \hat{C}(\hat{\pi},\hat{K},l,k,n) \frac{h_K^{k+1}}{\rho_K^l} |v|_{k+1,K} \quad (5.22)$$

Il est important de remarquer à ce niveau que  $\hat{C}$  est indépendant de  $K$ .

### Assemblage des résultats locaux

On va maintenant reprendre la majoration (5.22) pour tous les éléments du maillage et toutes les valeurs de  $l = 0, \dots, m$ . On va définir deux quantités représentatives du maillage :

- $h$  tel que  $h_K \leq h, \forall K \in \mathcal{T}_h$  (diamètre maximum des éléments)
- $\sigma$  tel que  $\frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma, \forall K \in \mathcal{T}_h$  (caractérise l'aplatissement des éléments)

Alors :

$$\begin{aligned}
\|v - \pi_K v\|_{m,K}^2 &= \sum_{l=0}^m |v - \pi_K v|_{l,K}^2 \\
&\leq \sum_{l=0}^m \hat{C}^2(\hat{\pi},\hat{K},l,k,n) \left( \frac{h_K^{k+1}}{\rho_K^l} \right)^2 |v|_{k+1,K}^2 \quad \text{d'après (5.22)} \\
&\leq \sum_{l=0}^m \hat{C}^2(\hat{\pi},\hat{K},l,k,n) \left\{ \left( \frac{h_K}{\rho_K} \right)^l h_K^{m-l} h_K^{k+1-m} \right\}^2 |v|_{k+1,K}^2 \\
&\leq \left\{ \sum_{l=0}^m \hat{C}^2(\hat{\pi},\hat{K},l,k,n) \sigma^{2l} h^{2m-2l} \right\} \left[ h^{k+1-m} |v|_{k+1,K} \right]^2
\end{aligned}$$

Le terme entre accolades ne tend ni vers 0 ni vers l'infini quand  $h$  tend vers 0. D'où :

$$\|v - \pi_K v\|_{m,K} \leq \hat{C}'(\hat{\pi},\hat{K},l,k,n,\sigma,h) h^{k+1-m} |v|_{k+1,K} \quad (5.23)$$

En sommant ensuite sur tous les éléments du maillage :

$$\begin{aligned}
\|v - \pi_h v\|_m^2 &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|v - \pi_K v\|_{m,K}^2 \\
&\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[ \hat{C}'(\hat{\pi},\hat{K},l,k,n,\sigma,h) h^{k+1-m} |v|_{k+1,K} \right]^2
\end{aligned}$$

D'où finalement :

$$\|v - \pi_h v\|_m \leq C(\mathcal{T}_h, m, k, n) h^{k+1-m} |v|_{k+1} \quad (5.24)$$

### 5.2.6 Résultat final

En reportant (5.24) dans (5.2), on obtient le résultat final classique de majoration d'erreur :

$$\|u - u_h\|_m \leq \mathcal{C} h^{k+1-m} |u|_{k+1} \quad (5.25)$$

## 5.3 Quelques commentaires

- Une utilisation fréquente de (5.25) a lieu dans le cas  $m = 1$ . Alors si l'espace de polynômes  $P_k(\hat{K}) \subset H^1(\hat{K})$  (ce qui est toujours le cas) et si  $\hat{\pi}$  est bien défini sur  $H^{k+1}(\hat{K})$ , on a :

$$\text{si } u \in H^{k+1}(\Omega), \quad \|u - u_h\|_1 \leq \mathcal{C} h^k |u|_{k+1} \quad (5.26)$$

- Si le domaine  $\Omega$  n'est pas polygonal, la majoration précédente n'est plus valable. On peut alors établir d'autres majorations du même type – se référer par exemple à Raviart et Thomas (1983).
- De même, si les calculs d'intégrales ne sont pas faits exactement mais à l'aide d'une intégration numérique, une erreur supplémentaire doit être prise en compte, qui conduit à une nouvelle majoration d'erreur – voir là-aussi par exemple Raviart et Thomas (1983).

# Chapitre 6

## Quelques aspects pratiques de la méthode des éléments finis

On va donner dans ce chapitre quelques indications pratiques concernant la programmation d'une méthode d'éléments finis. On pourra trouver beaucoup plus de détails par exemple dans les ouvrages de Joly (1990), de Lucquin et Pironneau (1996) et de Ern (2005).

On exposera ici quelques principes généraux dans le cas classique d'une méthode d'éléments finis  $P_1$  de Lagrange sur un maillage triangulaire d'un domaine de  $\mathbb{R}^2$ . Des modifications devront donc être apportées pour d'autres types d'éléments finis.

### 6.1 Maillage

On va se placer ici dans le cas fréquent de la résolution d'un problème sur un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$ , noté  $\Omega$ . Ce problème comporte des conditions aux limites sur  $\partial\Omega$ , qui peuvent être de type Dirichlet ou Neumann. On notera  $\Gamma_0$  la partie de  $\partial\Omega$  où ces conditions sont de type Dirichlet, et  $\Gamma_1$  la partie où elles sont de type Neumann. On aura  $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$  et  $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ .

Comme dans les chapitres précédents, on va noter  $N_e$  le nombre d'éléments du maillage, et  $N_h$  le nombre de noeuds (qui sont ici simplement les sommets des triangles).

Le repérage des noeuds est fait par l'intermédiaire d'un tableau  $COOR(2, N_h)$  :

$$\begin{aligned} COOR(1, k) &= \text{abscisse du noeud } k \\ COOR(2, k) &= \text{ordonnée du noeud } k \end{aligned}$$

C'est le seul tableau travaillant avec les coordonnées "physiques" dans le domaine. Tous les autres seront des tableaux d'adressage relatif.

La définition des éléments du maillage est faite par un tableau  $CONEC(3, N_e)$ , qui fait le lien noeuds-éléments. Chaque élément contient 3 noeuds "locaux" (car on travaille dans cet exemple sur des triangles). Ces noeuds correspondent chacun à un indice du tableau  $COOR$ , qu'on appellera leur "numéro global".

$\text{CONEC}(i,l) = \text{numéro global du } i^{\text{ème}} \text{ noeud local de l'élément } l \text{ (} i = 1,2,3\text{)}$

Le repérage des conditions de Dirichlet est réalisé directement par un tableau  $\text{DIRI}(N_0)$  balayant les  $N_0$  noeuds de  $\Gamma_0$  :

$\text{DIRI}(i) = \text{numéro global du } i^{\text{ème}} \text{ noeud de } \Gamma_0$ .

Le repérage des conditions de Neumann est réalisé par un premier tableau  $\text{NEUM}_0(N_1)$  balayant les  $N_1$  éléments ayant un côté sur  $\Gamma_1$ , et par un second tableau  $\text{NEUM}(3,N_1)$  indiquant quels côtés des éléments sont sur  $\Gamma_1$  :

$\text{NEUM}_0(j) = \text{numéro du } j^{\text{ème}} \text{ élément ayant un côté sur } \Gamma_1$ .

$\text{NEUM}(i,j) = 1$  si le côté opposé au  $i^{\text{ème}}$  noeud local du  $j^{\text{ème}}$  élément de la liste  $\text{NEUM}_0$  est sur  $\Gamma_1$ , 0 sinon.

## 6.2 Assemblage de la matrice du système

Le système linéaire auquel aboutit la démarche des éléments finis est  $A\mu = b$ , avec

$$\begin{aligned} A_{ij} &= a(\varphi_i, \varphi_j) = \int_{\Omega} \cdots + \int_{\Gamma_1} \cdots \\ b_j &= l(\varphi_j) = \int_{\Omega} \cdots + \int_{\Gamma_1} \cdots \end{aligned}$$

Les étapes de la programmation sont alors :

1. Calcul de  $A_{ij} = \int_{\Omega} \cdots$ , pour  $i = 1, \dots, N_h$ ,  $j = 1, \dots, N_h$ .

2. Calcul de  $b_j = \int_{\Omega} \cdots$ , pour  $j = 1, \dots, N_h$ .

3. Conditions de Neumann :

Pour tous les noeuds  $j$  des éléments ayant un côté sur  $\Gamma_1$  faire:

- $A_{ij} = A_{ij} + \int_{\Gamma_1} \cdots$  pour les noeuds  $i$  des éléments ayant un côté sur  $\Gamma_1$
- $b_j = b_j + \int_{\Gamma_1} \cdots$

4. Conditions de Dirichlet : on modifie les composantes de  $A$  et  $b$  où les noeuds de  $\Gamma_0$  interviennent.

Pour tous les noeuds  $j$  de  $\Gamma_0$  faire:

- $b_i = b_i - u_j A_{ij}$  pour tous les noeuds  $i$  de  $\Omega \setminus \Gamma_0$  ( $u_j$  désigne la valeur imposée sur le noeud  $j$  par les conditions de Dirichlet)
- $A_{ij} = A_{ji} = 0$  pour tous les noeuds  $i$  de  $\Omega \setminus \Gamma_0$
- $A_{ij} = 0$  pour tous les noeuds  $i$  de  $\Gamma_0$
- $A_{jj} = 1$
- $b_j = u_j$

L'étape la plus coûteuse est la première, c'est à dire le calcul de  $A_{ij} = \int_{\Omega} H(\varphi_i, \varphi_j)$ , où  $H$  est un opérateur dépendant du problème que l'on traite.  $A_{ij}$  peut évidemment être décomposé sur les éléments du maillage :

$$A_{ij} = \sum_{l=1}^{N_l} A_{ij}^{(l)} \quad \text{avec } A_{ij}^{(l)} = \int_{K_l} H(\varphi_i, \varphi_j)$$

Une méthode naïve de calcul serait :

```

Pour  $i = 1$  à  $N_h$ 
Pour  $j = 1$  à  $N_h$ 
  Pour  $l = 1$  à  $N_l$ 
    Calcul de  $A_{ij}^{(l)}$ 
     $A_{ij} = A_{ij} + A_{ij}^{(l)}$ 
  Fin pour
Fin pour
Fin pour

```

Toutefois, on calcule ainsi une grande majorité de contributions  $A_{ij}^{(l)}$  nulles. En effet,  $A_{ij}^{(l)} \neq 0$  ssi les noeuds  $i$  et  $j$  appartiennent à l'élément  $l$ . On peut donc reprendre l'assemblage de  $A$  en bouclant cette fois sur les éléments, pour ne calculer que les termes utiles :

```

Pour  $l = 1$  à  $N_l$ 
  Pour  $i_0 = 1$  à 3
  Pour  $j_0 = 1$  à 3
     $i = \text{CONEC}(i_0, l)$ 
     $j = \text{CONEC}(j_0, l)$ 
    Calcul de  $A_{ij}^{(l)}$ 
     $A_{ij} = A_{ij} + A_{ij}^{(l)}$ 
  Fin pour
  Fin pour
Fin pour

```

On voit que la méthode d'assemblage naïve conduit à  $N_h^2 \times N_l$  calculs élémentaires, contre  $9N_l$  pour la seconde méthode. Dans le cas réel d'un maillage à  $N_l = 10^6$  éléments, on aura environ  $N_h = 5 \cdot 10^5$  noeuds, ce qui mène à  $2.5 \cdot 10^{17}$  calculs élémentaires pour la méthode naïve, contre  $9 \cdot 10^6$  pour la seconde méthode !!

## 6.3 Formules de quadrature

### 6.3.1 Définitions

Le calcul des intégrales sur les éléments du maillage a souvent lieu par intégration numérique. On utilise pour cela une formule de quadrature, c'est à dire une formule du type

$$\int_K f(x) dx \simeq \sum_{m=1}^M \omega_m f(\xi_m) \quad (6.1)$$

où les  $\xi_m$  sont des points de  $K$  (appelés points de quadrature) et les  $\omega_m$  des coefficients de pondération (ou encore des poids). On choisit en général ces formules de telle sorte qu'elles soient exactes pour les polynômes jusqu'à un certain degré. On a d'ailleurs le résultat suivant :

**Théorème :** Si la formule (6.1) est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à  $r$ , alors il existe une constante  $C > 0$  telle que, pour toute fonction  $f \in \mathcal{C}^{r+1}(K)$  :

$$\left| \int_K f(x) dx - \sum_{m=1}^M \omega_m f(\xi_m) \right| \leq C |K| h^{r+1} \quad (6.2)$$

où  $|K|$  est la mesure de  $K$  et  $h$  son diamètre.

### 6.3.2 Quadrature en 1-D

On cherche à estimer  $\int_a^b f(x) dx$ . Les formules les plus courantes sont :

**formule des rectangles**

$$\int_a^b f(x) dx \simeq (b-a) f(a) \quad (6.3)$$

Elle est exacte pour les polynômes constants.

**formule du point milieu**

$$\int_a^b f(x) dx \simeq (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \quad (6.4)$$

Elle est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 1.

**formule des trapèzes**

$$\int_a^b f(x) dx \simeq (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2} \quad (6.5)$$

Elle est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 1.

**formule à deux points internes**

$$\int_a^b f(x) dx \simeq (b-a) \frac{f(\xi_1) + f(\xi_2)}{2} \quad (6.6)$$

avec  $\xi_1 = a + \lambda(b-a)$ ,  $\xi_2 = b - \lambda(b-a)$  et  $\lambda = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}$ . Elle est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

**formule de Simpson**

$$\int_a^b f(x) dx \simeq (b-a) \frac{f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)}{6} \quad (6.7)$$

Elle est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

### 6.3.3 Quadrature en 2-D triangulaire

$K$  est cette fois un triangle, de sommets  $a_1, a_2, a_3$ , de milieux des arêtes  $a_{12}, a_{13}, a_{23}$ , de centre de gravité  $a_0$ , et de surface  $|K|$ .

**formule centrée**

$$\int_K f(x) dx \simeq |K| f(a_0) \quad (6.8)$$

Elle est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 1.

**formule sur les sommets**

$$\int_K f(x) dx \simeq \frac{|K|}{3} (f(a_1) + f(a_2) + f(a_3)) \quad (6.9)$$

Elle est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 1.

**formule sur les milieux**

$$\int_K f(x) dx \simeq \frac{|K|}{3} (f(a_{12}) + f(a_{23}) + f(a_{13})) \quad (6.10)$$

Elle est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

## 6.4 Domaines à frontière courbe

Lorsque le problème est posé sur un domaine à frontière courbe, celle-ci ne pourra pas être représentée exactement par des mailles polygonales. Si l'on veut une approximation très précise, on peut introduire des mailles courbes au voisinage de la frontière, en autorisant des transformations de l'élément de référence qui ne soient plus seulement des transformations affines, mais des transformations de degré plus élevé que 1. On doit alors se préoccuper de la compatibilité entre le degré des polynômes et le degré de la transformation géométrique. On parle, suivant leurs degrés respectifs, d'interpolation *isoparamétrique*, *subparamétrique* ou *surparamétrique*. Ceci dépasse le cadre de ce cours d'introduction.

## Compléments

1. Démontrer la formule (6.2)
2. Pour chaque formule de quadrature 1-D et 2-D présentée dans ce chapitre, démontrer qu'elle est exacte pour les polynômes jusqu'à un certain degré.

# Annexe A

## Coordonnées barycentriques

Soit  $K$  un triangle de  $\mathbb{R}^2$  de sommets  $a_1, a_2, a_3$ . On appelle coordonnées barycentriques de  $K$  les fonctions affines  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  de  $K$  dans  $\mathbb{R}$  définies par

$$\lambda_j(a_i) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq 3 \quad (\text{A.1})$$

On voit que la somme  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$  est une fonction affine qui vaut 1 sur chacun des 3 sommets. C'est donc la fonction constante égale à 1.

Si l'on note  $(x_i, y_i)$  les coordonnées d'un sommet  $a_i$  et  $\lambda_j(x, y) = \alpha_j x + \beta_j y + \gamma_j$ , la relation (A.1) est équivalente au système linéaire :

$$\begin{cases} \alpha_j x_i + \beta_j y_i + \gamma_j = 0 \\ \alpha_j x_k + \beta_j y_k + \gamma_j = 0 \\ \alpha_j x_j + \beta_j y_j + \gamma_j = 1 \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

où  $\{i, j, k\}$  est une permutation de  $\{1, 2, 3\}$ . La résolution de ce système mène à :

$$\begin{aligned} \alpha_j &= \frac{y_k - y_i}{(x_j - x_k)(y_j - y_i) - (x_j - x_i)(y_j - y_k)} \\ \beta_j &= \frac{x_i - x_k}{(x_j - x_k)(y_j - y_i) - (x_j - x_i)(y_j - y_k)} \\ \gamma_j &= \frac{x_k y_i - x_i y_k}{(x_j - x_k)(y_j - y_i) - (x_j - x_i)(y_j - y_k)} \end{aligned}$$

Si l'on note  $|K|$  l'aire du triangle et  $\varepsilon$  le signe de  $(\vec{a_k a_j}, \vec{a_i a_j})$ , on peut aussi réécrire ces égalités sous la forme :

$$\begin{aligned} \alpha_j &= \frac{y_k - y_i}{2\varepsilon |K|} \\ \beta_j &= \frac{x_i - x_k}{2\varepsilon |K|} \\ \gamma_j &= \frac{x_k y_i - x_i y_k}{2\varepsilon |K|} \end{aligned}$$

**Propriété :**  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  est une base de  $P_1$ .

**Propriété :**  $(\lambda_1 \lambda_2, \lambda_1 \lambda_3, \lambda_2 \lambda_3, \lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2)$  est une base de  $P_2$ .

**Propriété :** On note  $\{i, j, k\}$  une permutation de  $\{1, 2, 3\}$  et  $m, n, p$  des entiers. On a alors :

$$\int_K \lambda_i^m \lambda_j^n \lambda_k^p dx = \frac{2|K| m! n! p!}{(2 + m + n + p)!} \quad (\text{A.3})$$

La notion de coordonnées barycentriques s'étend naturellement au cas d'un tétraèdre dans  $\mathbb{R}^3$ . On travaille dans ce cas avec 4 coordonnées barycentriques.

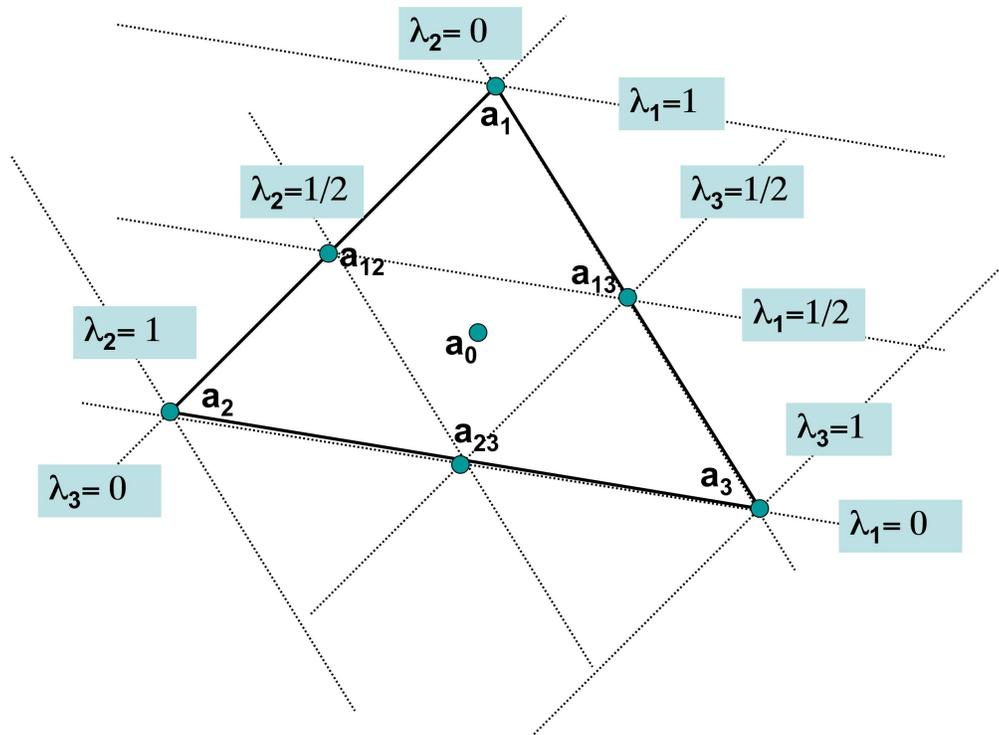


FIG. A.1 – Coordonnées barycentriques sur un triangle

**Propriété :** Soit  $p$  un polynôme de degré quelconque à deux variables qui s'annule sur une droite d'équation  $\lambda(x, y) = 0$ . Alors il existe un polynôme  $q$  tel que  $p = \lambda q$ .

Soit  $\vec{n}$  un vecteur orthogonal à la droite d'équation  $\lambda(x, y) = 0$ . Si de plus  $\frac{\partial p}{\partial n}(x, y)$  s'annule sur cette droite, alors il existe un polynôme  $r$  tel que  $p = \lambda^2 r$ .

**Exemples de calcul de fonctions de base :**

- **Fonctions de base  $P_1$**  Soit  $p_i$  la fonction de base  $P_1$  associée au sommet  $a_i$ . Elle est

définie par :  $p_i(a_i) = 1$ ,  $p_i(a_j) = 0$  pour  $i \neq j$ , et  $p_i \in P_1$ . C'est donc exactement la définition des coordonnées barycentriques :  $p_i = \lambda_i$

- **Fonctions de base  $P_2$**  Soit  $p_1$  la fonction de base  $P_2$  associée au sommet  $a_1$ . Elle est définie par :  $p_1(a_1) = 1$ ,  $p_1(a_2) = p_1(a_3) = p_1(a_{12}) = p_1(a_{13}) = p_1(a_{23}) = 0$ , et  $p_1 \in P_2$ . La restriction de  $p_1$  à la droite  $[a_2, a_3]$  est un polynôme à **une** variable, de degré 2, qui s'annule en trois points distincts  $a_2$ ,  $a_{23}$  et  $a_3$ . Elle est donc identiquement nulle sur la droite  $[a_2, a_3]$ , dont l'équation est  $\lambda_1 = 0$ . Donc il existe un polynôme  $q_1$  de degré inférieur ou égal à 1 tel que  $p_1 = \lambda_1 q_1$ .

Les relations  $p_1(a_{12}) = p_1(a_{13}) = 0$  deviennent donc  $q_1(a_{12}) = q_1(a_{13}) = 0$  (car  $\lambda_1(a_{12}) \neq 0$  et  $\lambda_1(a_{13}) \neq 0$ ). Donc la restriction de  $q_1$  à la droite  $[a_{12}, a_{13}]$  est un polynôme à **une** variable, de degré 1, qui s'annule en deux points distincts  $a_{12}$  et  $a_{13}$ . Elle est donc identiquement nulle sur la droite  $[a_{12}, a_{13}]$ , dont l'équation est  $\lambda_1 - 1/2 = 0$ . Donc il existe une constante  $\alpha$  telle que  $q_1 = \alpha(\lambda_1 - 1/2)$ , soit  $p_1 = \alpha\lambda_1(\lambda_1 - 1/2)$ .

La relation  $p_1(a_1) = 1$  fournit finalement  $\alpha = 2$ . D'où  $p_1 = \lambda_1(2\lambda_1 - 1)$ .

# Annexe B

## Calcul d'intégrales

### B.1 Formules de Green

Soit  $\Omega$  un ouvert non-vide de  $\mathbb{R}^n$ , de frontière notée  $\partial\Omega$ . On note  $n$  la normale locale sur  $\partial\Omega$ .

On a les propriétés suivantes, appelées formules de Green, qui sont en fait simplement des cas particuliers d'intégration par parties :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_k} v \, dx = - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_k} \, dx + \int_{\partial\Omega} u v (e_k \cdot n) \, ds \quad (\text{B.1})$$

où  $e_k$  est le vecteur unitaire dans la direction  $x_k$ .

$$\int_{\Omega} \Delta u v \, dx = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, ds \quad (\text{B.2})$$

$$\int_{\Omega} u \operatorname{div} E \, dx = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot E \, dx + \int_{\partial\Omega} u (E \cdot n) \, ds \quad (\text{B.3})$$

### B.2 Changement de variable dans une intégrale

Soient  $\hat{K}$  et  $K$  deux ouverts de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $F$  un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $\hat{K}$  dans  $K$ , c'est à dire une bijection de classe  $\mathcal{C}^1$  dont la réciproque est également de classe  $\mathcal{C}^1$ . On note  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  et

$$F : x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \longrightarrow F(x) = \sum_{i=1}^n F_i(x_1, \dots, x_n) e_i$$

La matrice jacobienne de  $F$  au point  $x$ , notée  $J_F(x)$  est la matrice  $n \times n$  définie par

$$(J_F(x))_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n) \quad 1 \leq i, j \leq n$$

On a alors la formule de changement de variable :

$$\int_K u(x) \, dx = \int_{\hat{K}} u(F(\hat{x})) |\det J_F(\hat{x})| \, d\hat{x} \quad (\text{B.4})$$

**Remarque :** dans la méthode des éléments finis, on aura souvent à calculer de tels changements de variables dans des intégrales du type  $\int_K Hu(x) dx$ , où  $H$  est un opérateur aux dérivées partielles (gradient, laplacien, ...). Il faudra alors faire attention au changement de variable dans l'opérateur lui-même. Par exemple dans  $\mathbb{R}^2$  :

$$\begin{aligned}
\int_K (\nabla u(x))^2 dx &= \int_K \left[ \left( \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \\
&= \int_{\hat{K}} \left[ \left( \frac{\partial u(F(\hat{x},\hat{y}))}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u(F(\hat{x},\hat{y}))}{\partial y} \right)^2 \right] |\det J_F(\hat{x})| d\hat{x} d\hat{y} \\
&= \int_{\hat{K}} \left[ \left( \frac{\partial u(F(\hat{x},\hat{y}))}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} + \frac{\partial u(F(\hat{x},\hat{y}))}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{\partial u(F(\hat{x},\hat{y}))}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} + \frac{\partial u(F(\hat{x},\hat{y}))}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} \right)^2 \right] |\det J_F(\hat{x})| d\hat{x} d\hat{y} \\
&= \int_{\hat{K}} \left[ \left( \frac{\partial \hat{u}(\hat{x},\hat{y})}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{u}(\hat{x},\hat{y})}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \hat{u}(\hat{x},\hat{y})}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{u}(\hat{x},\hat{y})}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} \right)^2 \right] |\det J_F(\hat{x})| d\hat{x} d\hat{y}
\end{aligned}$$

Dans le cas d'une transformation  $F$  affine, notée :

$$\begin{cases} x = a\hat{x} + b\hat{y} + e \\ y = c\hat{x} + d\hat{y} + f \end{cases}$$

on a :

$$\hat{x} = \frac{d(x-e) - b(y-f)}{D}, \quad \hat{y} = \frac{-c(x-e) + a(y-f)}{D}, \quad \text{et } |\det J_F(\hat{x})| = D = ad - bc$$

Le calcul précédent devient alors :

$$\begin{aligned}
\int_K (\nabla u(x))^2 dx &= \int_{\hat{K}} \left[ \left( \frac{\partial \hat{u}(\hat{x},\hat{y})}{\partial \hat{x}} \frac{d}{D} + \frac{\partial \hat{u}(\hat{x},\hat{y})}{\partial \hat{y}} \frac{-c}{D} \right)^2 + \left( \frac{\partial \hat{u}(\hat{x},\hat{y})}{\partial \hat{x}} \frac{-b}{D} + \frac{\partial \hat{u}(\hat{x},\hat{y})}{\partial \hat{y}} \frac{a}{D} \right)^2 \right] |D| d\hat{x} d\hat{y} \\
&= \frac{1}{|D|} \int_{\hat{K}} \left[ \left( d \frac{\partial \hat{u}(\hat{x},\hat{y})}{\partial \hat{x}} - c \frac{\partial \hat{u}(\hat{x},\hat{y})}{\partial \hat{y}} \right)^2 + \left( -b \frac{\partial \hat{u}(\hat{x},\hat{y})}{\partial \hat{x}} + a \frac{\partial \hat{u}(\hat{x},\hat{y})}{\partial \hat{y}} \right)^2 \right] d\hat{x} d\hat{y}
\end{aligned}$$

# Bibliographie

**Brézis P.**, 1999: *Analyse fonctionnelle*. Dunod.

**Ciarlet P.**, 1990: *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*. Masson.

**Dhatt G., G. Touzot et E. Lefrançois**, 2005: *Méthode des éléments finis*. Hermes - Lavoisier.

**Ern A.**, 2005: *Aide-mémoire Eléments finis*. Dunod.

**Joly P.**, 1990: *Mise en oeuvre de la méthode des éléments finis*. Ellipses.

**Larrouturou B. et P.-L. Lions**, 1992: *Méthodes mathématiques pour les sciences de l'ingénieur: optimisation et analyse numérique*. Cours de l'Ecole Polytechnique.

**Lascaux P. et R. Théodor**, 1986: *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur*. Masson.

**Lucquin B. et O. Pironneau**, 1996: *Introduction au calcul scientifique*. Masson.

**Raviart P.-A. et J.-M. Thomas**, 1983: *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Masson.

**Sainsaulieu L.**, 1996: *Calcul scientifique*. Masson.

**Thomas P.**, 2006: *Eléments finis pour l'ingénieur*. Lavoisier, Tec et Doc.