UE MAT209

Analyse

Eric Blayo, Janvier 2023

Site web de l'UE :
https://chamilo.univ-grenoble-alpes.fr/courses/GBX2MT29

Vidéos pédagogiques : http://tinyurl.com/youtube-mat207

De courtes séquences appartenant à cette chaine YouTube sont indiquées au fil du document.

Ces notes de cours sont très largement inspirées de polycopiés rédigés ces dernières années pour d'autres UEs, en collaboration avec Elise Arnaud, Claudine Chaffy, Georges-Henri Cottet, Agnès Hamon, Maëlle Nodet, Régis Perrier, Martin Schreiber et Arthur Vidard. Elles correspondent aux notions d'analyse de l'UE MAT209, mais reprennent également une bonne partie de celles de l'UE MAT206.

Elles vous permettront de travailler le cours à l'avance, et seront complétées en séance par des démonstrations, commentaires, exemples et exercices divers. Elles sont donc loin d'être suffisantes à elles seules pour maîtriser les notions qui y sont présentées.

Table des matières

Chapitre 1

Révisions sur les fonctions

1.1 Définitions générales - Vocabulaire

1.1.1 Fonctions, applications, images et antécédents

Définition Une **fonction** est la description d'une relation entre les éléments de deux ensembles A et B. En général, la notation mathématique utilisée pour définir une fonction est du type :

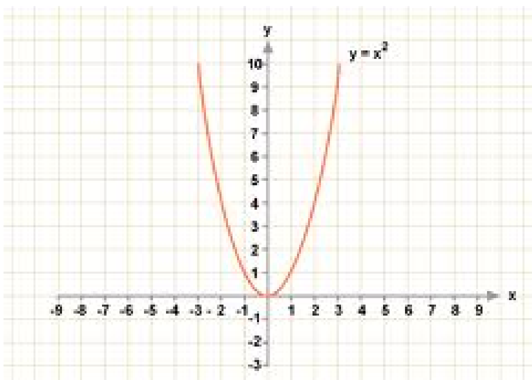
$$f: \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ x & \longrightarrow & y = f(x) \end{array}$$

- A est appelé l'**ensemble de départ** et B l'**ensemble d'arrivée**.
- y est l'**image** de x par f.
- x est un **antécédent** de y par f.

Dans la définition ci-dessus, on dit bien "l'image" et non pas "une image", car une fonction associe au plus une image à tout élément de l'ensemble de départ.
On a écrit aussi "un antécédent" et non pas "l'antécédent", car une valeur y dans B peut avoir 0, 1 ou plusieurs antécédents.

Exemple https://www.youtube.com/watch?v=Ys3Sjf9tgHc
On considère la fonction $f(x) = x^2$.

L'image de $x = 2$ *par* f *est* $y = 4$.
$y = 0$ *a un seul antécédent* $x = 0$.
$y = 3$ *a deux antécédents* $x_1 = -\sqrt{3}$ *et* $x_2 = \sqrt{3}$.
$y = -2$ *n'a pas d'antécédent.*



Définition Soit f une fonction de E vers F.

- On appelle **image directe** ou **espace image** de E par f, noté $f(E)$, l'ensemble des images de tous les éléments de E.
- On appelle **image réciproque** de F, noté $f^{-1}(F)$, l'ensemble des antécédents de tous les éléments de F.

- Plus généralement, on peut définir ainsi l'image $f(E')$ de tout sous-ensemble $E' \subset E$ et l'image réciproque $f^{-1}(F')$ de tout sous-ensemble $F' \subset F$.

Noter que l'on devrait pouvoir aussi dire "espace antécédent" comme synonyme de "image réciproque", mais ce n'est pas l'usage.

Exemple *On considère à nouveau la fonction $f(x) = x^2$. On a par exemple :* $f([0,2]) = [0,4]$, $f([0,2[) = [0,4[$, $f(]-1,2]) = [0,4]$, $f^{-1}([0,4]) = [-2,2]$.

Définition Une **application** est une fonction pour laquelle tout élément de l'ensemble de départ a une et une seule image.

Bien qu'on ait souvent tendance à employer indifféremment les deux termes "fonction" et "application", il y a donc en toute rigueur une différence. Pour une fonction, il peut exister des éléments de l'ensemble de départ qui n'ont pas d'image.

Exemple *La fonction*

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & y = 1/x \end{array}$$

n'est pas une application, car l'élément $x = 0$ n'a pas d'image par f.
Par contre, la fonction

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & y = 1/x \end{array}$$

est une application car chaque élément de l'ensemble de départ a une et une seule image.
Ceci nous amène donc naturellement à la notion de domaine de définition.

Définition Le **domaine de définition** d'une fonction f est l'ensemble des valeurs x pour lesquelles $f(x)$ est définie. Autrement dit, il s'agit des valeurs de x pour lesquelles on peut calculer $f(x)$. Il est souvent noté $\mathcal{D}_f$.

Pour la plupart des fonctions, déterminer le domaine de définition revient à trouver les valeurs de x pour lesquelles le calcul de $f(x)$ mènerait à l'une des impossibilités suivantes :

- diviser par 0
- prendre la racine carrée d'un nombre strictement négatif (ou plus généralement, prendre la puissance non entière d'un nombre négatif, car on la calcule par $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$)
- prendre le logarithme d'un nombre négatif ou nul

Exemple `https://www.youtube.com/watch?v=Kg6A-Kct4vo` *Soit* $f(x) = \dfrac{\ln(2x+1)}{\sqrt{1-x^2}}$.
Ne pas diviser par 0 implique que $1 - x^2 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq 1$ et $x \neq -1$.
Ne pas prendre la racine carrée d'un nombre strictement négatif implique que $1 - x^2 \geq 0$, c'est à dire $x \in [-1; 1]$.
Ne pas prendre le logarithme d'un nombre négatif ou nul implique que $2x + 1 > 0$, c'est-à-dire $x > -\frac{1}{2}$.
Les valeurs de x vérifiant ces 3 conditions forment le domaine de définition $\mathcal{D}_f =]-\frac{1}{2}; 1[$.

1.1.2 Quelques propriétés courantes des fonctions

Définition On dit qu'une fonction est :

- **affine** si elle est de la forme $f(x) = ax + b$ où a et b sont des constantes fixées. Sa représentation graphique est une droite, croissante si $a > 0$, horizontale si $a = 0$ et décroissante si $a < 0$. a est la **pente** ou encore le **coefficient directeur**.
- **linéaire** si elle est de la forme $f(x) = ax$ où a est une constante. Sa représentation graphique est une droite passant par l'origine $(0, 0)$. C'est un cas particulier de fonction affine.
- **polynomiale** si elle est de la forme $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x_1 + a_0$ où $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ sont des coefficients fixés. n est **l'ordre** du polynôme. Si $n = 2$ (polynôme d'ordre 2), sa représentation graphique est une parabole (comme la fonction $y = x^2$ précédente).
- **trigonométrique** si c'est une combinaison linéaire des fonctions trigonométriques élémentaires $(\sin x, \cos x, \tan x)$.

Définition Une fonction est :

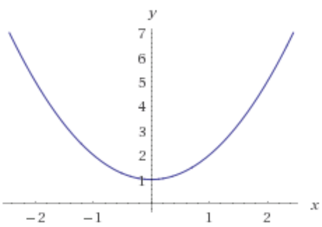
- **paire** si et seulement si elle vérifie $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$. Sa courbe représentative est alors symétrique par rapport à la droite verticale $x = 0$ (c'est à dire l'axe des ordonnées).
- **impaire** si et seulement si elle vérifie $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$. Sa courbe représentative est alors symétrique par rapport au point $(0, 0)$. En particulier, si f est définie en 0, on a $f(0) = 0$.
- **périodique de période T** (on dit aussi **T-périodique**) si et seulement si elle vérifie $f(x + T) = f(x)$ pour toute valeur x. Sa courbe représentative est alors un motif de largeur T qui se reproduit identiquement à lui-même.

Exemples

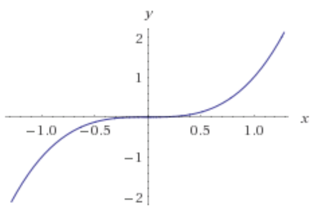
- $f(x) = x^2 + 1$ *est une fonction paire, car* $f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x)$.
- $g(x) = x^3$ *est une fonction impaire, car* $g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$.
- $h(x) = \tan(x)$ *est une fonction* π*-périodique, car*

$$h(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x = h(x)$$

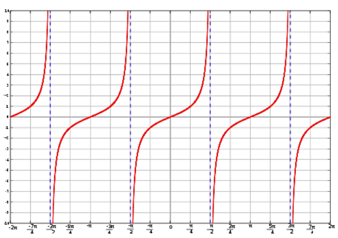
De plus, h *est impaire car* $h(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \dfrac{-\sin x}{\cos x} = -\tan(x) = -h(x)$



$f(x)$



$g(x)$



$h(x)$

Définition Soit f une application de E vers F. f est :

- **majorée** sur E si et seulement si il existe un réel M tel que $f(x) \leq M$ pour tout $x \in E$. M est un **majorant** de f sur E.
- **minorée** sur E si et seulement si il existe un réel m tel que $m \leq f(x)$ pour tout $x \in E$. m est un **minorant** de f sur E.
- **bornée** sur E si et seulement si elle est majorée et minorée sur E.

Définition Soit f une application de E vers F. f est :

- **croissante** sur E si et seulement si $\forall x_1 \in E, \forall x_2 \in E$, $(\ x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)\ )$
- **strictement croissante** sur E si et seulement si $\forall x_1 \in E, \forall x_2 \in E$, $(\ x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)\ )$
- **décroissante** sur E si et seulement si $\forall x_1 \in E, \forall x_2 \in E$, $(\ x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)\ )$
- **strictement décroissante** sur E si et seulement si $\forall x_1 \in E, \forall x_2 \in E$, $(\ x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)\ )$
- **(strictement) monotone** sur E si et seulement si elle est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante sur E.

1.1.3 Composition de fonctions

Définition Soit f une fonction de l'ensemble A vers l'ensemble B, et g une fonction de l'ensemble B vers l'ensemble C : $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$

On appelle **fonction composée**, notée $g \circ f$, la fonction définie par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Cette fonction va donc de l'ensemble A vers l'ensemble C : $A \xrightarrow{g \circ f} C$

Une erreur fréquente consiste à confondre $f \circ g$, $g \circ f$ et $f \times g$.

Exemple *Soient les 2 fonctions $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2x + 1$, définies sur $\mathbb{R}$. On a :*

- $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 = (2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$
- $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2f(x) + 1 = 2x^2 + 1$
- $(f \times g)(x) = f(x)g(x) = x^2(2x+1) = 2x^3 + x^2$

Exemple *Soient les 2 fonctions $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sqrt{x}$. Leurs domaines de définition sont $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$. Alors :*

- *$f \circ g$ est définie sur $\mathbb{R}^+$ et on a $(f \circ g)(x) = (g(x))^2 = (\sqrt{x})^2 = x$*
- *$g \circ f$ est définie sur $\mathbb{R}$ (car f est définie sur $\mathbb{R}$ et $f(x)$ est toujours dans $\mathbb{R}^+$) et on a $(g \circ f)(x) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2} = |x|$*

Dérivée d'une fonction composée Soit f une fonction définie et dérivable en un point a, et g une fonction définie et dérivable au point $f(a)$. Alors $g \circ f$ est définie et dérivable en a, et

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))\, f'(a)$$

Exemple *La fonction $\sqrt{x^2+1}$ est la composée des fonctions $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = \sqrt{x}$. Sa dérivée vaut donc*

$$\left(\sqrt{x^2+1}\right)' = g'(f(x))\, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}}\, f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

1.1.4 Injection, surjection, bijection

Définition Soit f une application de E vers F. On dit que f est :

- **injective** si et seulement si tout élément de F a au plus un antécédent dans E.

  Autrement dit : $\forall x_1 \in E, \forall x_2 \in E, (f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2)$
  ou encore : $\forall x_1 \in E, \forall x_2 \in E, (x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2))$

- **surjective** si et seulement si tout élément de F a au moins un antécédent dans E.

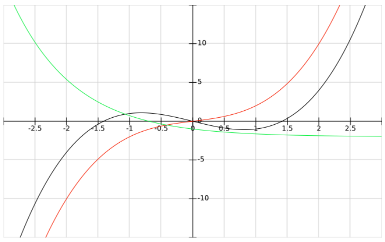
  Autrement dit : $\forall y \in F, \exists x \in E \,/\, y = f(x)$
  ou encore : $f(E) = F$

- **bijective** si et seulement si elle est injective et surjective, c'est-à-dire que tout élément de F a un et un seul antécédent dans E.

  Autrement dit : $\forall y \in F, \exists!\, x \in E \,/\, y = f(x)$

Interprétation Déterminer si une fonction est injective et/ou surjective (ou ni l'un ni l'autre) revient, pour y_0 fixé, à compter les antécédents de y_0 par f, c'est-à-dire à chercher combien il y a de solutions x au problème $f(x) = y_0$. Graphiquement, cela revient à compter combien de fois la droite horizontale $y = y_0$ coupe la courbe représentative de f.

Exemple *Dans la figure ci-contre, on constate que la fonction $e^{-x} - 2$ (courbe verte) est injective, la fonction $x^3 - 2x$ (courbe noire) est surjective, et la fonction $x^3 + x$ (courbe rouge) est bijective.*



Exemples

- *Une fonction paire ne peut pas être bijective, car si x est un antécédent de y, alors $-x$ est également un antécédent de y. Elle n'est donc pas injective.*
- *La remarque précédente n'implique pas que toute fonction impaire est bijective. Il suffit de considérer par exemple la fonction sinus, pour laquelle la valeur $y = 0$ admet une infinité d'antécédents $x_k = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.*
- *Une application strictement monotone est nécessairement injective.*

1.1.5 Bijection et fonction réciproque

Définition Soit f une application bijective de E vers F. On a donc : $\forall y \in F, \exists!\, x \in E \,/\, y = f(x)$. On peut aussi noter $x = f^{-1}(y)$, ce qui définit une application f^{-1} de F vers E appelée **application réciproque** (ou **bijection réciproque**) de f. Elle vérifie à l'évidence $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$ (la fonction identité de F) et $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$ (la fonction identité de E).

$$E \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} F$$

Exemple *Les fonctions logarithme et exponentielle sont réciproques l'une de l'autre :*

$$]0,+\infty[\ \underset{\exp}{\overset{\ln}{\rightleftarrows}} \ \mathbb{R} \qquad \textit{c'est-à-dire} \quad (y = \ln x) \iff (x = \exp y)$$

Exemple *Les fonctions trigonométriques* ($\sin$, $\cos$, $\tan$)*, réduites à une partie de leur domaine de définition, sont bijectives. Leurs fonctions réciproques sont appelées respectivement* $\arcsin$, $\arccos$, $\arctan$. *Elles sont introduites au* §*1.3*.

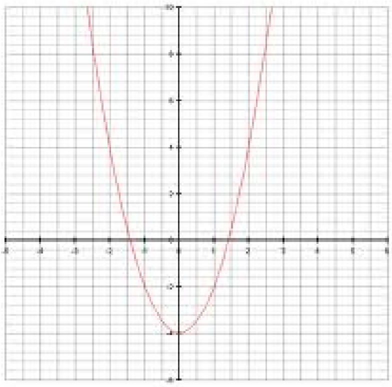
Exemple https://www.youtube.com/watch?v=cputgBhRT64

$f(x) = 2x^2 - 4$ *est bijective de* $[0,+\infty[$ *vers* $[-4,+\infty[$.

$$\textit{De plus : } y = 2x^2 - 4 \iff x^2 = \frac{y+4}{2} \iff x = \sqrt{\frac{y+4}{2}} \quad \textit{(car } x \geq 0)$$

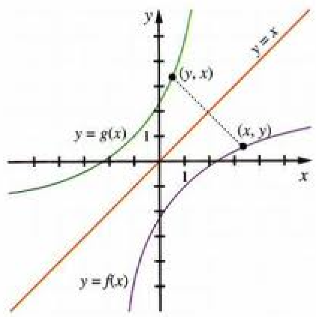
$$\textit{Donc on a : } f : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & [-4,+\infty[\\ x & \longrightarrow & y = 2x^2 - 4 \end{array}$$

$$\textit{et } f^{-1} : \begin{array}{ccc} [-4,+\infty[& \longrightarrow & [0,+\infty[\\ y & \longrightarrow & x = \sqrt{\frac{y+4}{2}} \end{array}$$



D'autres choix d'ensembles de départ et d'arrivée sont possibles. Par exemple, si on considère que f *est bijective de* $]-\infty,0[$ *vers* $[-4,+\infty[$*, alors* $f^{-1}(y) = -\sqrt{\frac{y+4}{2}}$

Interprétation graphique : le graphe de la fonction réciproque f^{-1} (notée g sur la figure ci-contre) est le symétrique du graphe de f par rapport à la droite $y = x$.



Une erreur fréquente consiste à confondre f^{-1} (fonction réciproque de f) et $1/f$ (fonction inverse de f). Dans l'exemple précédent, $1/f$ est la fonction qui à x associe $1/(2x^2-4)$.

Dérivée d'une application réciproque Soit f une bijection d'un intervalle I vers un intervalle J. Soient $a \in I$ et $b = f(a)$. Si f est dérivable en a et si $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en b et $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(b))}$.

Exemple *La fonction racine carrée étant la réciproque de la fonction carrée, on peut calculer sa dérivée avec cette formule. On pose donc* $f(x) = x^2$*, et on a* $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$*. Soient* a *et* b *tels que* $b = f(a)$*, c'est-à-dire* $b = a^2$*. Pour* a *strictement positif, on a bien* $f'(a) = 2a \neq 0$*, et donc :*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{2f^{-1}(b)} = \frac{1}{2\sqrt{b}}$$

On retrouve bien la formule connue pour la dérivée de la racine carrée.

1.2 Plan d'étude d'une fonction

1.2.1 Les différentes étapes

Les étapes de l'étude d'une fonction f sont les suivantes :

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$.
   Les points à regarder : ne pas diviser par 0, ne pas prendre la racine carrée d'un nombre strictement négatif, ne pas prendre le logarithme d'un nombre négatif ou nul...
2. Etudier la parité ou la périodicité de f, et réduire éventuellement le domaine d'étude.
   Si f est paire ou impaire, il suffit de l'étudier sur la partie positive de $\mathcal{D}_f$, et on complètera par symétrie. Si f est périodique de période T, il suffit de l'étudier sur un intervalle de longueur T, et on complètera par périodicité.
3. Calculer les valeurs de la fonction, ou ses limites, aux bornes du domaine d'étude.
   Il peut éventuellement y avoir des prolongements par continuité. Cf §3.1.2.
   Si $\mathcal{D}_f$ est de la forme $[a, b[$, calculer directement $f(a)$ et non pas $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.
4. Calculer la dérivée f' et déterminer son signe.
   Attention au domaine de définition de f' (le "domaine de dérivabilité"), qui peut éventuellement être plus petit que $\mathcal{D}_f$ s'il existe des points où f n'est pas dérivable.
5. Dresser le tableau de variations de f.
   Ce tableau résume les informations sur le domaine de définition, les limites, le signe de la dérivée et les sens de variation de f. Son contenu doit être cohérent.
6. S'il y a une ou deux branches infinies, c'est-à-dire si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, étudier l'existence éventuelle d'asymptotes, et le cas échéant la position de $\mathcal{C}_f$, la courbe représentative de f, par rapport à l'asymptote (cf rappel sur la méthode en annexe F).
7. Tracer $\mathcal{C}_f$.

Attention à la cohérence entre les différents éléments de l'étude de fonction. Par exemple, si votre fonction est croissante sur $[0; +\infty[$ et que vous trouvez une limite $-\infty$ en $x \to +\infty$, il y a un problème quelque part. De même, si vous trouvez un domaine de définition $[-1; 1]$, vous ne devez pas chercher la limite en $+\infty$. Soyez donc vigilant à être cohérent entre limites / variations / dessins / domaine de définition / etc.

1.2.2 Représentation graphique

On place sur la figure les éléments suivants :

- asymptotes éventuelles (verticales, horizontales, obliques) ;
- tangentes horizontales (c.a.d. là où la dérivée s'annule) ;
- tangentes verticales (c.a.d. là où la fonction est définie et continue mais où la dérivée n'est pas définie — voir la remarque plus bas) ;
- quelques points particuliers (par exemple pour $x = -1, 0, 1$) avec leurs tangentes locales ;
- on relie avec soin les points en tenant compte des éléments précédents.

En bref, le dessin doit être un résumé de l'étude de fonction et doit contenir toute l'information étudiée.

Remarque au sujet des tangentes verticales Les tangentes verticales se rencontrent lorsque le domaine de définition de f' n'est pas le même que celui de f, autrement dit s'il existe un ou plusieurs points en lesquels f est continue mais pas dérivable. Par exemple, si on considère la fonction $f(x) = \sqrt{x(x-1)}$, son domaine de définition est $]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[$. Sa dérivée est $f'(x) = (2x-1)/\sqrt{x(x-1)}$ et f' est définie sur $]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$. En 0 et en 1, f est définie (et continue) mais pas dérivable, et en ces points la fonction admet des tangentes verticales.

Tangentes et asymptotes sont deux notions différentes. Voir la remarque à ce sujet au §F.4.

1.2.3 Exemple

Etude de la fonction $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ https://www.youtube.com/watch?v=M5Rd_AqzIvY

1. *Domaine de définition*
   $f(x)$ est défini dès lors que l'on ne divise pas par 0, c'est-à-dire pour $x - 1 \neq 0$. Donc :
   $$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$$
2. *Parité, imparité, périodicité*
   $f(-x) = \dfrac{-x^3}{(-x-1)^2} = -\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$ qui est différent de $\pm f(x)$. Donc f n'est ni paire ni impaire. De plus, elle n'est pas périodique. Le domaine d'étude ne peut donc pas être réduit.
3. *Limites aux bornes du domaine d'étude*
   - f est une fraction rationnelle. Elle se comporte donc en $\pm\infty$ comme le rapport des termes de plus haut degré au numérateur et au dénominateur, c'est-à-dire comme $x^3/x^2 = x$. Donc :
     $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$
   - Quand $x \to 1$, $(x-1)^2 \to 0^+$ et $x^3 \to 1$. Donc $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$
4. *Calcul de la dérivée et détermination de son signe*
   On calcule $f'(x) = \dfrac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$. Son signe est déterminé en dressant un tableau de signes :

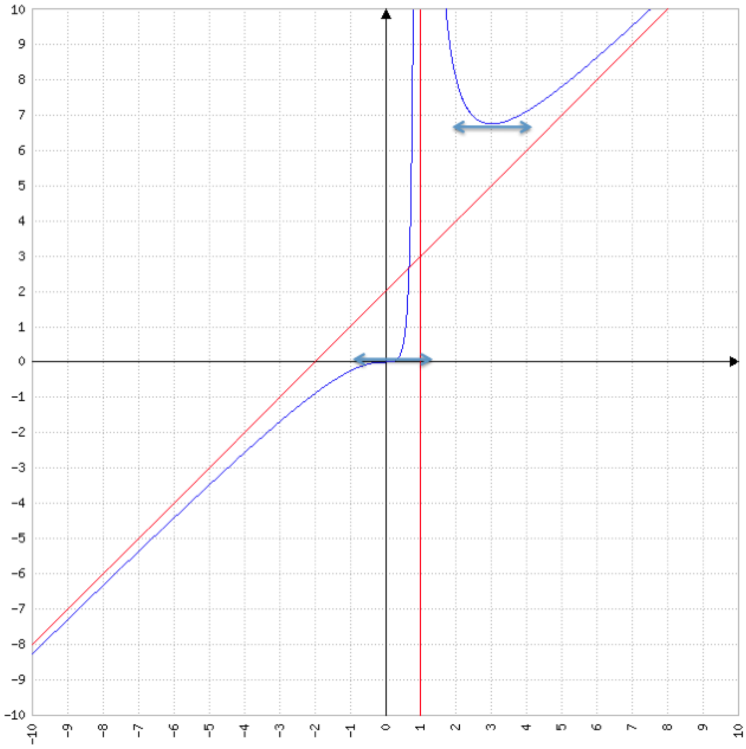
x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
x^2		$+$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-1)^3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

5. *Tableau de variations*
   Les informations précédentes peuvent être résumées dans le tableau ci-dessous. On y ajoute les valeurs particulières $f(0) = 0$ et $f(3) = 27/4$.

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	
					$+\infty \| +\infty$				$+\infty$
$f(x)$			0	$\nearrow$	$\|$	$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$	$\nearrow$			$\|$		$27/4$		

On voit donc que $(0; 0)$ est un point d'inflexion, et $(3; 27/4)$ un minimum local.

6. *Recherche des asymptotes*
   La droite $x = 1$ est asymptote verticale.
   Pour rechercher les asymptotes obliques, on calcule $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{(x-1)^2} = 1$. Il y a donc peut-être une asymptote oblique, de pente 1.
   On calcule maintenant $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - 1 \times x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2 - x}{x^2 - 2x + 1} = 2$. La droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x + 2$ est donc asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$.
   Pour connaître la position de $\mathcal{D}$ par rapport à $\mathcal{C}_f$, on détermine le signe de la différence entre leurs deux équations : $f(x) - (x + 2) = \frac{3x - 2}{(x-1)^2}$ qui est positif en $+\infty$ et négatif en $-\infty$. Donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{D}$ en $+\infty$, et en-dessous de $\mathcal{D}$ en $-\infty$.
7. *Représentation graphique*
   On place sur la figure les deux asymptotes (une verticale et une oblique), les tangentes horizontales en $x = 0$ et $x = 3$, et on trace la courbe de façon cohérente avec le tableau de variations.



1.3 Les fonctions trigonométriques inverses

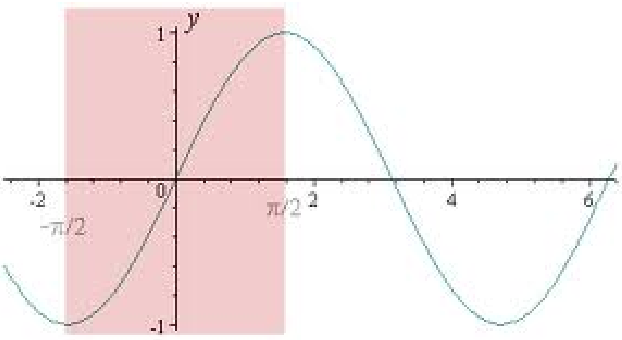
On va ici définir ainsi les **fonctions trigonométriques inverses**, aussi appelées **fonctions circulaires réciproques**.

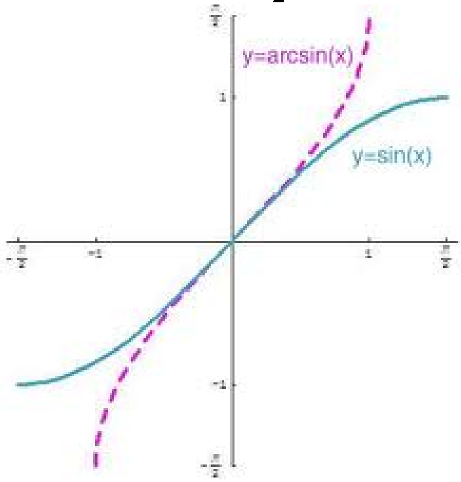
1.3.1 La fonction Arcsinus

La fonction sinus est continue et strictement croissante (donc bijective, cf §3.1.3) de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ vers $[-1, 1]$. On peut définir sa fonction réciproque, appelée **Arcsinus**, par :

$$\begin{array}{rccl} \text{Arcsin :} & [-1,1] & \longrightarrow & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ & y & \longrightarrow & x \ \text{ tel que } \ \sin x = y \end{array}$$

Ainsi par exemple, puisque $\sin 0 = 0$ et $\sin \dfrac{\pi}{2} = 1$, on a $\arcsin 0 = 0$ et $\arcsin 1 = \dfrac{\pi}{2}$.





Dérivée En utilisant la formule de dérivation d'une application réciproque vue au §1.1.5, puisque $\sin' \theta = \cos\theta \neq 0$ pour tout $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a donc :

$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} \qquad \forall x \in]-1, 1[$$

Or $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$. Donc $\cos a = \pm\sqrt{1 - \sin^2 a}$. Ici, $a = \arcsin x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Donc $\cos(\arcsin x) \in [0, 1]$, et est donc positif. D'où

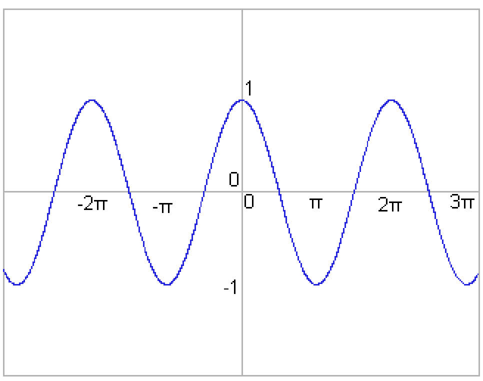
$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \forall x \in]-1, 1[$$

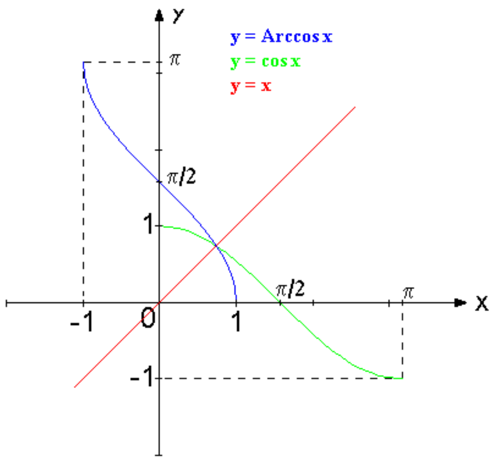
On remarque donc au passage que la fonction arcsin n'est pas dérivable en ± 1, ce qui est bien cohérent avec les tangentes verticales que l'on observe sur sa courbe représentative en ces points.

1.3.2 La fonction Arccosinus

La fonction cosinus est continue et strictement décroissante (donc bijective, cf §3.1.3) de $[0, \pi]$ vers $[-1, 1]$. On peut définir sa fonction réciproque, appelée **Arccosinus**, par :

$$\begin{array}{rccl} \text{Arccos :} & [-1, 1] & \longrightarrow & [0, \pi] \\ & y & \longrightarrow & x \ \text{ tel que } \cos x = y \end{array}$$





On a donc par exemple : $\arccos(-1) = \pi$, $\arccos(0) = \dfrac{\pi}{2}$, $\arccos(1) = 0$.

Dérivée Comme pour arcsinus, on montre que $(\arccos)'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in]-1,1[$

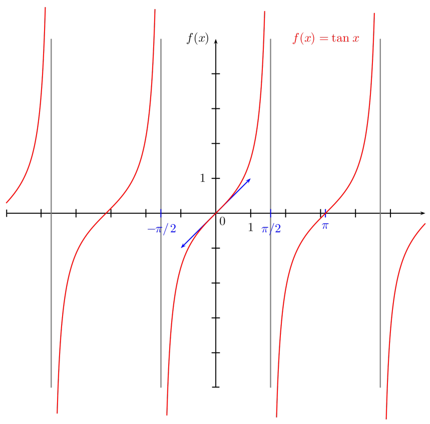
Remarque On voit que $\forall x \in]-1,1[\quad (\arcsin)'(x) + (\arccos)'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$ Donc la fonction $\arcsin x + \arccos x$ est constante sur $]-1,1[$. La valeur de cette constante peut être déterminée en évaluant la fonction par exemple en $x = 0$: $\arcsin 0 + \arccos 0 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$. On remarque de plus que l'on obtient le même résultat en $x = 1$ et $x = -1$. D'où finalement :

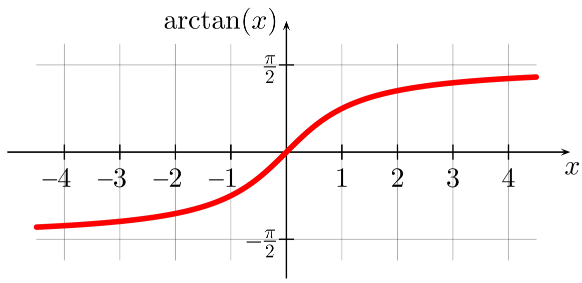
$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \qquad \forall x \in [-1,1]$$

1.3.3 La fonction Arctangente

La fonction tangente est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. Elle est impaire, et π-périodique. Elle est continue et strictement croissante (donc bijective, cf §3.1.3) de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ vers $\mathbb{R}$. On peut définir sa fonction réciproque, appelée **Arctangente**, par :

$$\text{Arctan} : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ y & \longrightarrow & x \text{ tel que } \tan x = y \end{array}$$





Dérivée Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\arctan)'(x) = \dfrac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \dfrac{1}{1+x^2}$

1.3.4 De nouvelles connaissances en intégration

Ces fonctions circulaires réciproques nous permettent de calculer de nouvelles primitives et intégrales, en se basant sur les deux propriétés suivantes :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \qquad\qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$$

Exemples

- *Calcul de* $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}}$

  En factorisant par 4 le contenu de la racine carrée, on fait apparaître une quantité de la forme

$\sqrt{1-u^2}$ *au dénominateur. Ainsi :* $I = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} = \int_0^1 \frac{dt}{2\sqrt{1-(t/2)^2}}$. *En faisant le changement de variable* $u = t/2$ *(et donc* $du = 1/2\,dt$*), on a (en faisant bien attention aux modifications des bornes) :* $\int_{t=0}^{t=1} \frac{dt}{2\sqrt{1-(t/2)^2}} = \int_{u=0}^{u=1/2} \frac{2\,du}{2\sqrt{1-u^2}}$ *. D'où finalement :*

$$I = [\arcsin u]_{u=0}^{u=1/2} = \arcsin(1/2) - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6}$$

- *Calcul des primitives de* $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$

  On procède de la même façon, en transformant le terme sous la racine pour le mettre sous la forme $1-u^2$. *Ainsi* $2x - x^2 = 1 - (1-2x+x^2) = 1-(x-1)^2$. *D'où, en posant* $u = x-1$ *(et donc* $du = dx$*) :*

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C = \arcsin(x-1) + C$$

- *Calcul de* $J = \displaystyle\int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \frac{dt}{4+t^2}$

  Comme pour les cas précédents, on va transformer le dénominateur pour se ramener à une primitive connue. Il suffit pour cela de le factoriser par 4 pour faire apparaître un terme de la forme $1+u^2$ *:* $\int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \frac{dt}{4+t^2} = \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \frac{dt}{4\,(1+(t/2)^2)}$. *D'où en posant* $u = t/2$ *:*

$$J = \int_{t=-2\sqrt{3}}^{t=2\sqrt{3}} \frac{dt}{4\,(1+(t/2)^2)} = \int_{u=-\sqrt{3}}^{u=\sqrt{3}} \frac{2\,du}{4\,(1+u^2)} = \frac{2}{4}\,[\arctan u]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{3}$$

- *Calcul des primitives de* $g(x) = \dfrac{1}{x^2+x+1}$

  Là encore, on va transformer le dénominateur, pour faire apparaître un terme de la forme $1+u^2$ *:*

$$x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left[1 + \frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right] = \frac{3}{4}[1+u^2] \qquad \text{avec } u = \sqrt{\frac{4}{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

  D'où finalement (en utilisant le fait que $du = \sqrt{\frac{4}{3}}dx$*) :*

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{\frac{3}{4}[1+u^2]} = \int \frac{\sqrt{\frac{3}{4}}\,du}{\frac{3}{4}[1+u^2]} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan u + C = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right) + C$$

Chapitre 2

Limites

Ce chapitre est consacré à l'approfondissement de la notion de limites. On va d'une part y rappeler un certain nombre de résultats que vous connaissez déjà, mais aussi en introduire de nouveaux, et notamment adopter une formalisation mathématique plus rigoureuse.

On utilise dans la suite la notation :

Définition $\overline{\mathbb{R}} =]-\infty, +\infty[\cup \{-\infty, +\infty\}$, noté aussi parfois $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$

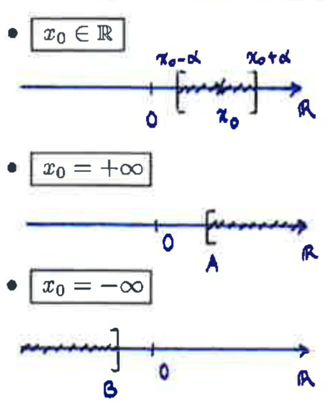
2.1 Définitions mathématiques des limites

On va définir ici les différents cas de figures pour la limite d'une fonction, au voisinage d'un point x_0 ou au voisinage de l'infini. Ces notions sont en fait très intuitives, et on peut les exprimer aussi bien de façon simple en langage courant que de façon rigoureuse en langage mathématique. Leur définition mathématique fait usage de quantificateurs ($\forall$, $\exists$) et de quantités aussi petites ou grandes que l'on veut, et c'est souvent pour vous une source de difficultés, au moins au début.

2.1.1 Définition unifiée de la limite

Définition On définit ci-dessous la notion de **voisinage** d'un nombre réel ou de l'infini.

- V est un **voisinage du réel** x_0 si et seulement si V contient un intervalle centré autour de x_0, c'est à dire un intervalle du type $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ où $\alpha > 0$.
- V est un **voisinage de** $+\infty$ si et seulement si V contient un intervalle du type $[A, +\infty[$ où $A \in \mathbb{R}$.
- V est un **voisinage de** $-\infty$ si et seulement si V contient un intervalle du type $]-\infty, B]$ où $B \in \mathbb{R}$.



Pour tout $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, on note $\mathcal{V}(x_0)$ l'ensemble des voisinages de x_0.

Définition Soit f une fonction à valeurs réelles, $\mathcal{D}_f$ son domaine de définition, et x_0 un point de $\mathcal{D}_f$ ou une extrémité de $\mathcal{D}_f$. On définit la **limite** ℓ de f en x_0 par :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \forall W \in \mathcal{V}(\ell),\ \exists V \in \mathcal{V}(x_0) \,/\, f(V \cap \mathcal{D}_f) \subset W$$

En langage courant, cette définition traduit simplement le fait que $f(x)$ se rapproche aussi près de ℓ que l'on veut si l'on prend x suffisamment proche de x_0.

Dans cette définition, x_0 et ℓ sont dans $\overline{\mathbb{R}}$, c'est-à-dire qu'ils peuvent prendre des valeurs infinies. On va maintenant détailler cette formulation générale, en la séparant en différents cas.

2.1.2 Limites en un point $x_0 \in \mathbb{R}$

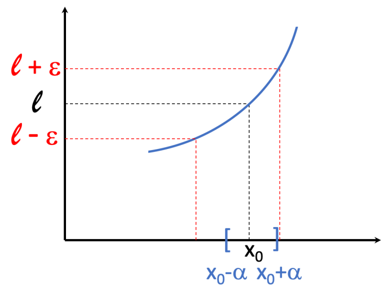
Définition Soit f une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$, et soit x_0 un point de son domaine de définition.

- La limite de f en x_0 (ou encore : la limite de $f(x)$ quand x tend vers x_0) est égale à un réel ℓ si et seulement si $f(x)$ se rapproche aussi près de ℓ que l'on veut si l'on prend x suffisamment proche de x_0.

  On note alors : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

  En langage mathématique :

  $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \;/\; x \in]x_0 - \alpha ; x_0 + \alpha[\Rightarrow f(x) \in]\ell - \varepsilon ; \ell + \varepsilon[$

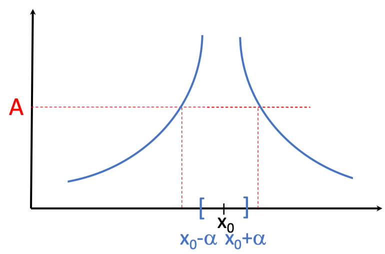


- La limite de f en x_0 (ou encore : la limite de $f(x)$ quand x tend vers x_0) est égale à $+\infty$ si et seulement si $f(x)$ devient aussi grand que l'on veut si l'on prend x suffisamment proche de x_0.

  On note alors : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

  En langage mathématique :

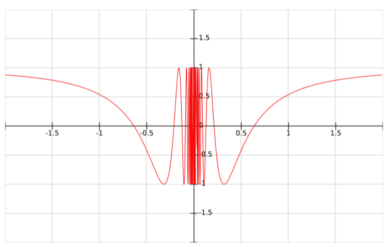
  $\forall A > 0, \exists \alpha > 0 \;/\; x \in]x_0 - \alpha ; x_0 + \alpha[$ et $x \neq x_0 \implies f(x) > A$



- On a de la même façon $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ si et seulement si $f(x)$ devient aussi négatif que l'on veut si l'on prend x suffisamment proche de x_0. Ce qui s'exprime en langage mathématique par : $\forall B < 0, \exists \alpha > 0 \;/\; x \in]x_0 - \alpha ; x_0 + \alpha[$ et $x \neq x_0 \implies f(x) < B$

- Si aucun des cas précédents ne s'applique, f n'admet pas de limite en x_0.

Exemple *$f(x) = \cos\frac{1}{x}$ n'a pas de limite en $x_0 = 0$. En effet, quand $x \to 0$, $\frac{1}{x}$ tend vers $+\infty$, et passe en particulier par toutes les valeurs $u = 2k\pi$ pour k entier (pour lesquelles $\cos(u) = 1$) et par toutes les valeurs $u = (2k+1)\pi$ (k entier) pour lesquelles $\cos(u) = -1$. Ainsi, $\cos(\frac{1}{x})$ oscille continuellement lorsque x tend vers 0 et ne converge pas.*



Exemple *La fonction valant 1 si x est rationnel et 0 si x est irrationnel n'admet de limite en aucun point x_0. En effet, si on fait tendre x vers x_0, x va prendre une infinité de valeurs rationnelles, intercalées avec une infinité de valeurs irrationnelles, et la fonction va donc sans cesse alterner entre 0 et 1.*

Les limites peuvent aussi exister lorsque l'on tend vers x_0 par la gauche (c'est-à-dire par valeurs inférieures à x_0) ou par la droite (c'est-à-dire par valeurs supérieures à x_0). On a donc les nouvelles définitions suivantes :

Définition

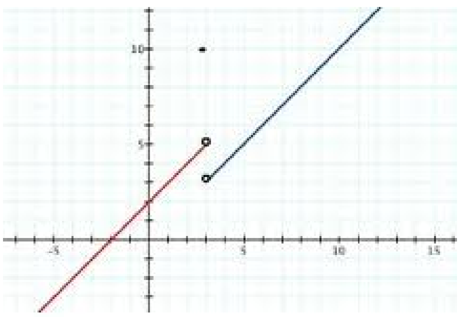
- f admet une **limite à gauche ℓ en x_0** (ou encore une **limite en x_0 par valeurs inférieures**, ou encore une **limite en x_0^-**) si et seulement si $f(x)$ se rapproche aussi près de ℓ que l'on veut si l'on prend x suffisamment proche de x_0, tout en lui restant inférieur.
  La définition mathématique devient donc
  $$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \ / \ x \in]x_0 - \alpha; x_0[\implies f(x) \in]\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon[$$
  La notation est $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$.
- On a bien sûr l'équivalent pour définir la **limite à droite**, ou **limite par valeurs supérieures**, ou **limite en x_0^+**.

Si les limites à gauche et à droite en x_0 existent et sont égales à ℓ, alors on a bien sûr $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$.

Exemple

Soit la fonction $f(x) = \begin{cases} x+2 & \textit{si } x < 3 \\ 10 & \textit{si } x = 3 \\ x & \textit{si } x > 3 \end{cases}$

On a $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 5$ *et* $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 3$, *mais* $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ *n'existe pas.*



2.1.3 Limites en $\pm\infty$

La notion de limite est également importante au voisinage de l'infini, c'est-à-dire quand x tend vers $\pm\infty$.

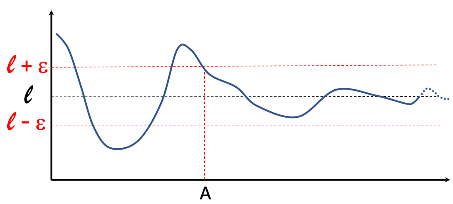
Définition

- f admet une **limite ℓ en $+\infty$** si et seulement si $f(x)$ se rapproche aussi près de ℓ que l'on veut si l'on prend x suffisamment grand. On note alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.

  En langage mathématique :

  $\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0 \ / \ x > A \implies f(x) \in]\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon[$

  La courbe de f admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = \ell$ en $+\infty$.



- On a bien sûr la même chose en $-\infty$. La définition mathématique de $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ est : $\forall \varepsilon > 0, \exists B < 0 \ / \ x < B \implies f(x) \in]\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon[$.

- On peut également avoir une limite valant $\pm\infty$ quand x tend vers $\pm\infty$. Par exemple, le cas $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ s'écrira : $\forall A > 0, \exists B < 0 \ / \ x < B \implies f(x) > A$.

- Enfin, si aucun des cas précédents ne s'applique, on dit que f n'admet pas de limite en $\pm\infty$.

Exemple *$f(x) = \sin x$ n'a pas de limite en $\pm\infty$.*

2.2 Limites de fonctions monotones

Théorème Soit f une fonction croissante sur un intervalle $]a,b[$. Alors les limites de f à droite en a et à gauche en b existent, et l'on a

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \inf_{x\in]a,b[} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = \sup_{x\in]a,b[} f(x)$$

Cela ne veut pas dire que ces limites sont finies. Elles peuvent être infinies.

Exemple

- *$f(x) = x^2$ sur $]0,1[$. On a : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$*
- *$f(x) = -\dfrac{1}{x}$ sur $]0,1[$. On a : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -1$*
- *$f(x) = \ln x$ sur $]0,1[$. On a : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0$*

On en déduit immédiatement la propriété suivante :

Corollaire Soit f une fonction croissante sur $]a,b[$ et majorée par un réel M. Alors $\lim_{x\to b^-} f(x)$ existe, est finie, et est inférieure ou égale à M.

On a bien sûr un résultat équivalent pour des fonctions décroissantes :

Corollaire Soit f une fonction décroissante sur $]a,b[$ et minorée par un réel m. Alors $\lim_{x\to b^-} f(x)$ existe, est finie, et est supérieure ou égale à m.

2.3 Limites et comparaison de fonctions

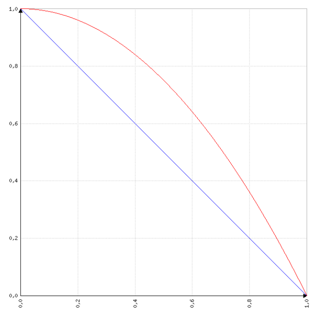
On peut parfois obtenir des informations sur les limites d'une fonction en la comparant à d'autres fonctions plus simples dont on connait le comportement. On dispose pour cela de quelques résultats très simples, exprimés dans les théorèmes suivants.

Théorème Soit un réel a et soient deux fonctions f et g définies dans un voisinage de a. Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout x dans ce voisinage, alors $\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)$.

Si on est dans le cas de figure de ce théorème, on en déduit par exemple que :

- Si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$
- Si $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$

Si l'on a $f(x) < g(x)$ au lieu de $f(x) \leq g(x)$, cela ne change pas le résultat, qui reste $\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)$ (et non pas $\lim_{x\to a} f(x) < \lim_{x\to a} g(x)$).



Exemple *Considérons $f(x) = 1 - x$ (courbe bleue) et $g(x) = 1 - x^2$ (courbe rouge) au voisinage de $a = 0$.*

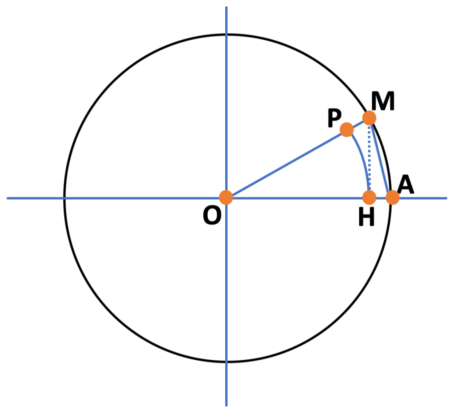
On a : $f(x) < g(x)$ pour tout $x \in]0, 1[$.

Pourtant $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 1$.

Théorème *(des gendarmes)* Soit un réel a et soient trois fonctions f, g et h telles que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = \ell$. S'il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ pour tout $x \in I$, alors $\lim_{x\to a} g(x) = \ell$.

Exemple *On cherche à calculer $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$. Pour cela, on considère la figure géométrique ci-dessous. Il s'agit du cercle trigonométrique (c'est-à-dire le cercle de centre O et de rayon 1), dans lequel on considère un angle (petit) de x radians. Soit M le point du cercle correspondant à cet angle x, et H le point de l'axe Ox de même abscisse que M. On a donc $HM = \sin x$ et $OH = \cos x$. Enfin, on note A le point de coordonnées $(1, 0)$ et P le point du segment $[OM]$ tel que $OP = OH$.*
On a l'encadrement suivant, qui dit que le triangle OAM est inclus dans le morceau de disque délimité par OAM, et contient le morceau de disque délimité par OHP :

$$Aire(\widehat{OAM}) > Aire(\widehat{OAM}) > Aire(\widehat{OHP})$$



On rappelle que l'aire d'un triangle est égale à la moitié du produit de la base par la hauteur, et que l'aire d'un secteur angulaire d'angle α (en radians) et de rayon R vaut $\frac{\alpha}{2}R^2$. D'où :

$$\frac{x}{2}1^2 > \frac{1}{2}1 \sin x > \frac{x}{2}(\cos x)^2$$

d'où en divisant par $x/2$: $1 > \frac{\sin x}{x} > (\cos x)^2$, puis en utilisant le théorème des gendarmes : $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Cette fonction $\sin x / x$ est appelée "sinus cardinal". Elle est très utilisée par exemple en traitement du signal, pour le filtrage des signaux.

2.4 Opérations sur les limites

Théorème Les opérations algébriques usuelles s'appliquent aux limites finies, ce qui signifie que, si $\lim_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x\to a} g(x) = \ell' \in \mathbb{R}$ avec $a \in \overline{\mathbb{R}}$, alors

$$\lim_{x\to a} \alpha f(x) = \alpha\,\ell \;\; (\forall \alpha \in \mathbb{R}) \qquad \lim_{x\to a} (f+g)(x) = \ell+\ell' \qquad \lim_{x\to a} (f\times g)(x) = \ell\ell' \qquad \lim_{x\to a} \frac{f}{g}(x) = \frac{\ell}{\ell'} \text{ (si } \ell' \neq 0)$$

Pour des limites infinies (ou pour $\ell' = 0$ dans le cas de la division), les mêmes règles s'appliquent mais on rencontre parfois des **cas indéterminés**. Ce sont les cas du type (en notant symboliquement) :

$$+\infty - \infty, \quad 0 \times \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty^0, \quad 1^\infty$$

Exemple *On considère les fonctions*

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad g_1(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad g_2(x) = -\frac{2}{x^2}, \quad g_3(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

au voisinage de $a = 0$. On s'intéresse aux limites en 0 des fonctions $f + g_i$. On a $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to 0} g_i(x) = -\infty$, donc on est à chaque fois dans le cas indéterminé du type "$+\infty - \infty$". Si l'on simplifie les expressions de ces fonctions, on voit toutefois que :

- $(f + g_1)(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} = 0$. *Donc* $\lim_{x\to 0} (f + g_1)(x) = 0$
- $(f + g_2)(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$. *Donc* $\lim_{x\to 0} (f + g_2)(x) = -\infty$
- $(f + g_3)(x) = \frac{1}{x^2} + 1 - \frac{1}{x^2} = 1$. *Donc* $\lim_{x\to 0} (f + g_3)(x) = 1$

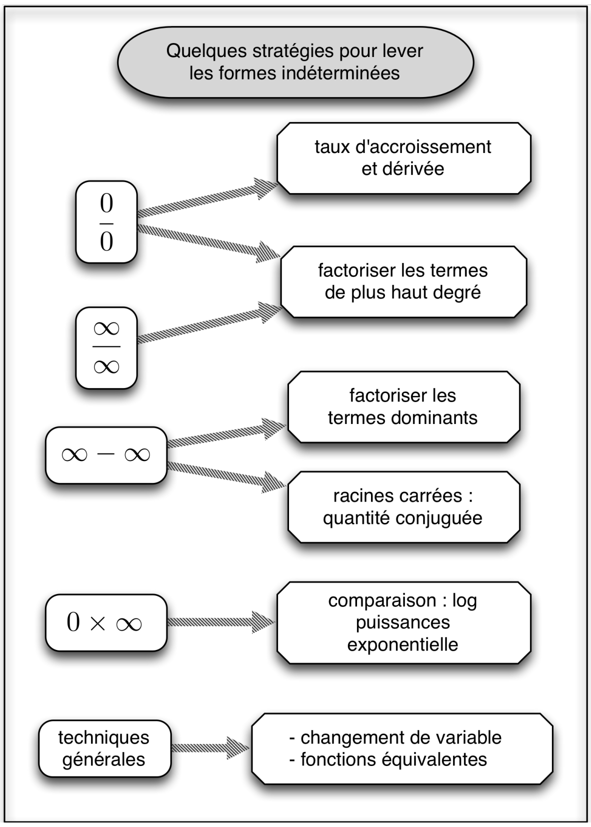
Ceci illustre donc que le cas noté symboliquement "$+\infty - \infty$" peut mener à n'importe quel résultat.

On peut facilement illustrer le même type de résultat par exemple avec la forme indéterminée "$0 \times \infty$" :

$$\lim_{x\to 0} x \times \frac{1}{x^2} = \infty \qquad \lim_{x\to 0} x^2 \times \frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to 0} x \times \frac{2}{x} = 2$$

2.5 Quelques outils pour traiter les cas indéterminés

Déterminer si la limite existe, et si oui quelle est sa valeur, dans les cas indéterminés demande toujours un travail spécifique. Bien qu'il n'y ait pas de "recette miracle" pour cela, les méthodes listées ci-dessous permettent souvent de résoudre ces cas (voir aussi la figure qui suit).



Fiche conceptuelle donnant quelques exemples de méthodes pour lever des formes indéterminées.

Attention : ce ne sont pas des recettes miracles, mais juste une aide pour démarrer si vous n'avez aucune idée de la méthode à utiliser...

2.5.1 Transformation de l'expression

Dans certains cas, une simple transformation de l'expression dont on cherche la limite permet de lever l'indétermination.

Pour la limite d'une **fraction rationnelle** (c'est-à-dire la division de deux polynômes $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$) :

- si on est dans le cas $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{\infty}{\infty}$, factoriser P et Q par leurs termes de plus haut degré
- si on est dans le cas $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{0}{0}$, factoriser P et Q par $(x - x_0)$

Exemple $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^4 - x^2 + 2}$ *est de la forme indéterminée* $\dfrac{\infty}{\infty}$. *Si l'on factorise par les termes de plus haut degré :*

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^4 - x^2 + 2} = \frac{x^3\,(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3})}{x^4\,(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^4})} = \frac{1}{x}\,\frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}}{1 - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^4}} \longrightarrow 0 \times \frac{1}{1} = 0 \text{ quand } x \to \infty$$

En cas d'indétermination du type "$+\infty - \infty$" impliquant des racines carrées, la multiplication par la **quantité conjuguée** permet souvent de lever l'incertitude.
Rappel : la quantité conjuguée de $A + B$ est $A - B$, la quantité conjuguée de $A - B$ est $A + B$. Leur produit vaut donc $A^2 - B^2$.

Exemple https://www.youtube.com/watch?v=AJDmhjQkDAE
$\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}$ *est de la forme indéterminée "*$+\infty - \infty$*". Si l'on multiplie et que*

l'on divise par la quantité conjuguée, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1} &= \frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}} \\
&= \frac{(x^2+x+1)-(x^2-x+1)}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}} \\
&= \frac{2x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}} \\
&= \frac{x}{\sqrt{x^2}}\,\frac{2}{\sqrt{1+1/x+1/x^2}+\sqrt{1-1/x+1/x^2}} \\
&= \frac{x}{|x|}\,\frac{2}{\sqrt{1+1/x+1/x^2}+\sqrt{1-1/x+1/x^2}}
\end{aligned}$$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}=1$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}=-1.$

2.5.2 Changement de variable

Un **changement de variable** adéquat peut permettre de transformer un cas indéterminé que l'on ne sait pas traiter en un cas indéterminé que l'on sait résoudre.

Exemple $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^2-1}$ *est de la forme indéterminée* $\dfrac{0}{0}$. *Un changement de variable "naturel" consiste à se ramener en zéro. Ici on est en* $x\to 1$, *donc* $x-1\to 0$ *; il faut donc poser* $X=x-1$ *pour avoir* $X\to 0$. *On réécrit maintenant la fonction en fonction de* X *et non de* $x-1$ *:*

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{X\to 0}\frac{\sin X}{X(X+2)}$$

qui est encore de la forme $\dfrac{0}{0}$. *Par contre, on sait que* $\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{\sin X}{X}=1.$

D'où finalement $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^2-1}=\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{\sin X}{X}\times\dfrac{1}{X+2}=1\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}.$

Un changement de variable ne transformera jamais directement un cas indéterminé en un cas déterminé.

2.5.3 Comparaison des fonctions logarithmes, puissances et exponentielles

Théorème *(Règle des croissances comparées)*

$$\forall\alpha>0,\ \forall\beta>0,\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\beta x}}{x^\alpha}=+\infty\qquad \lim_{x\to+\infty}x^\alpha\,e^{-\beta x}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha}=0\qquad \lim_{x\to 0^+}x^\alpha\,(\ln x)^\beta=0$$

Exprimé en langage courant : en cas d'indétermination dans le calcul d'une limite, l'exponentielle impose sa limite à la fonction puissance, et la fonction puissance impose sa limite au logarithme.

Une démonstration de ce résultat est donnée à la fin de ce paragraphe.

Exemple

- $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x =$? *Cette limite est de la forme indéterminée* $0\times\infty$.
  C'est la fonction puissance (c.a.d. ici x) qui va dominer et donner la limite. Donc $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\, e^{-x} =$? *Cette limite est de la forme indéterminée* $\infty\times 0$.
  C'est la fonction exponentielle (c.a.d. ici e^{-x}) qui va dominer et donner la limite. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\, e^{-x} = 0$.

Deux erreurs sont fréquemment commises dans l'utilisation de cette règle, en se référant de façon trop approximative à son énoncé "en langage courant".

- Ne pas oublier que cette règle ne s'applique qu'en cas d'indétermination. Il faut donc bien vérifier qu'on est dans un tel cas.
  Considérons par exemple $\lim\limits_{x\to 0} x^2 e^x$. Cette limite se calcule directement, car il n'y a pas d'indétermination : $x^2\to 0$ et $e^x\to e^0 = 1$. Donc le produit tend vers $0\times 1 = 0$.
  Si l'on avait appliqué (alors que ce n'était pas justifié) la règle de comparaison des fonctions puissance et exponentielle, on aurait conclu à tort que c'est l'exponentielle qui donne la valeur de la limite, et donc que la limite vaut 1.

- Bien se ramener aux cas indiqués dans le théorème. Ainsi on peut conclure à tort sur la valeur d'une limite en disant que "l'exponentielle l'emporte sur la puissance", alors que le contenu de l'exponentielle est en fait une fonction compliquée. Autrement dit, par exemple en $+\infty$, on n'a pas forcément $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{u(x)}}{x^\beta} = +\infty$, même si $u(x)\to+\infty$ quand $x\to+\infty$.

  Cherchons ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\exp\left(3\ln(2+\sqrt{x})-1\right)}{x^2}$. C'est une forme indéterminée, du type ∞/∞.

  On a : $e^{3\ln(2+\sqrt{x})-1} = e^{3\ln(2+\sqrt{x})}\, e^{-1} = e^{\ln((2+\sqrt{x})^3)}\, e^{-1} = \dfrac{1}{e}\,(2+\sqrt{x})^3$. D'où :

$$\frac{\exp\left(3\ln(2+\sqrt{x})-1\right)}{x^2} = \frac{1}{e}\,\frac{(2+\sqrt{x})^3}{x^2} = \frac{1}{e}\,\frac{(\sqrt{x})^3\left(1+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^3}{x^2} = \frac{1}{e}\,\frac{1}{\sqrt{x}}\left(1+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^3$$

  On a donc finalement $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\exp\left(3\ln(2+\sqrt{x})-1\right)}{x^2} = 0$, contrairement à ce qu'une utilisation trop "expéditive" de la règle des croissances comparées aurait conclu.

Démonstration de la règle des croissances comparées

- *On va pour cela commencer par démontrer que* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$. *Posons* $f(x) = \ln x - \sqrt{x}$. *Sa dérivée vaut* $f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2}\right)$. *D'où* $f'(x) = 0$ *pour* $x = 4$. *On a donc le tableau de variations suivant :*

x	0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

La valeur maximale de f *est* $K = f(4) = \ln 4 - 2$.
On a donc : $\forall x > 0,\ \ln x - \sqrt{x} < K$
C'est à dire $\forall x > 0,\ \ln x < K + \sqrt{x}$.
Donc $\forall x > 1,\ \ 0 < \ln x < K + \sqrt{x}$.
En divisant par x*, on obtient* $0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{K}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{K}{x} \longrightarrow 0$ *quand* $x \to +\infty$*. Donc, par le théorème des gendarmes :* $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

- *Par changement de variable* $X = \frac{1}{x}$*, on en déduit que* $\lim_{X\to 0} X \ln X = 0$.
- *Par changement de variable* $X = \ln x$*, on en déduit que* $\lim_{X\to+\infty} X e^{-X} = 0$.
- *L'extension à des puissances quelconques est immédiate. Par exemple, pour* $\alpha > 0$ *et* $\beta > 0$ *:*

$\ln\left(\frac{e^{\beta x}}{x^{\alpha}}\right) = \beta x - \alpha \ln x = \beta x \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\frac{\ln x}{x}\right)$*. Donc* $\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{e^{\beta x}}{x^{\alpha}}\right) = +\infty$*. Donc* $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\beta x}}{x^{\alpha}} = +\infty$

□

2.5.4 Fonctions équivalentes

Définition Deux fonctions f et g sont **équivalentes au voisinage de a** si et seulement si

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

On note alors : $f(x) \sim g(x)$ au voisinage de a.

Dire simplement que $f(x) \sim g(x)$ n'a aucun sens. Il faut toujours préciser au voisinage de quelle(s) valeur(s).

Théorème Au voisinage de 0 : $\sin x \sim x \qquad \ln(1+x) \sim x \qquad e^x - 1 \sim x$

La démonstration de ces propriétés peut être faite soit au cas par cas (par exemple par encadrement pour montrer que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, comme on l'a fait au §2.3), soit par utilisation des taux d'accroissement et des dérivées :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \sin'(0) = \cos 0 = 1$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1+0)}{x - 0} = [\ln(1+x)]'(0) = \left(\frac{1}{1+x}\right)(0) = 1$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = (e^x)'(0) = e^0 = 1$$

On verra également au chapitre 4 que les équivalents sont en fait des cas particuliers de la notion de **développements limités**.

Exemple *Sachant que* $\sin x \sim x$ *au voisinage de* 0*, on en déduit immédiatement que*

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x} = 2 \qquad \textit{et} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{3\sqrt{x}}{(\sin x)^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3x^{1/2}}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3}{x^{3/2}} = +\infty$$

Remarque sur une erreur fréquente D'après la définition, il est correct d'écrire : $e^x \sim 1+x$ au voisinage de 0, car $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{1+x} = 1$.
Mais il est tout aussi correct d'écrire par exemple : $e^x \sim 1+x^4$ au voisinage de 0, car $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{1+x^4} = 1$.
Pourtant $e^x - 1$ n'est pas équivalent à x^4 au voisinage de 0, mais bien à x.

En pratique, si l'expression d'un équivalent comporte deux termes dont l'un est négligeable devant l'autre (comme c'est le cas dans $1+x$ et dans $1+x^4$ au voisinage de 0), il ne faut conserver que le terme principal. Ainsi, on écrira tout simplement $e^x \sim 1$ au voisinage de 0.

Bonne nouvelle : ces subtilités, et les risques d'erreur associés, disparaitront d'eux-mêmes lorsqu'on travaillera avec les développements limités (chapitre 4).

2.5.5 Taux d'accroissement et dérivées

On rappelle la définition de la dérivée (on y reviendra au §3.2) d'une fonction f en un point a : $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$. On peut parfois utiliser cette définition pour trouver la valeur de la limite dans des cas indéterminés du type $\dfrac{0}{0}$, en remarquant que l'expression dont on cherche la limite est justement un **taux d'accroissement**, c'est-à-dire de la forme $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Exemple

- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x\sqrt{x}-1}{x-1}$? https://www.youtube.com/watch?v=gqKRwnh9W0c

  Cette limite est de la forme $\dfrac{0}{0}$. *Si l'on pose* $f(x) = x\sqrt{x} = x^{3/2}$, *on reconnait le taux d'accroissement* $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$. *Donc la limite recherchée vaut* $f'(1)$. *Ici* $f'(x) = \dfrac{3}{2}x^{1/2}$. *Donc finalement :* $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x\sqrt{x}-1}{x-1} = \dfrac{3}{2}$

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+x}{1-\cos x}$? *Cette limite est de la forme* $\dfrac{0}{0}$.

  On a : $\dfrac{x^2+x}{1-\cos x} = (x+1)\,\dfrac{x}{1-\cos x} = -(x+1)\,\dfrac{x-0}{\cos x - \cos 0}$ *(car* $\cos 0 = 1$*). Si l'on pose* $g(x) = \cos x$, *on a donc* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \cos 0}{x-0} = g'(0) = -\sin 0 = 0$. *D'où* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+x}{1-\cos x} = \infty$

2.5.6 Et la règle de L'Hôpital dans tout ça ?

Beaucoup d'étudiants aiment utiliser "la" **règle de L'Hôpital**. Il y en a en fait deux versions, l'une simple, et l'autre plus "complète". On va montrer ici que la version simple revient en fait à utiliser les taux d'accroissement, comme au §2.5.5, et que la version complète est nettement plus complexe, ce qui conduit malheureusement à ce qu'elle soit souvent mal énoncée, et donc utilisée à tort.

Théorème *(version simple)*

Si f et g sont deux fonctions définies dans un voisinage de a, et dérivables en a, si $f(a) = g(a) = 0$, et si $g'(a) \neq 0$, alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(a)}{g'(a)}$.

On a un énoncé similaire si f et g sont définies sur un intervalle dont a est une extrémité : $[a, b[$ ou $]c, a]$.

Cette version simple n'est en fait qu'une utilisation directe de la technique des taux d'accroissement rappelée au §2.5.5. En effet :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-0}{g(x)-0} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\,\frac{x-a}{g(x)-g(a)} \longrightarrow \frac{f'(a)}{g'(a)} \text{ quand } x \longrightarrow a$$

Exemple $\quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - \cos x}{3\sin x} = ?$

En posant $f(x) = e^{2x} - \cos x$ et $g(x) = 3\sin x$, on peut vérifier que les hypothèses du théorème sont bien satisfaites. On a $f'(x) = 2e^{2x} + \sin x$ et $g'(x) = 3\cos x$. Donc la limite recherchée vaut $f'(0)/g'(0) = 2/3$.

Théorème *(version généralisée)*

Si f et g sont deux fonctions définies et dérivables au voisinage de a (mais pas forcément en a), a pouvant être réel ou infini, si $g'(x) \neq 0$ au voisinage de a,

$$\text{si} \begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0 & \textit{(généralisation 1)} \\ \text{ou} & \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty & \textit{(généralisation 2)} \end{cases}$$

alors $\left(\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell\right) \Longrightarrow \left(\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell\right)$, ℓ pouvant être réel ou infini.

La démonstration de ce théorème utilise des outils du type du théorème des accroissements finis, que l'on verra au chapitre 3. En pratique, il est malheureusement souvent mal utilisé, c'est-à-dire sans que ses hypothèses soient réunies. De plus, on verra au chapitre 4 que l'utilisation des développements limités permet en général de calculer de façon simple les limites, sans avoir à recourir à ce théorème.

Chapitre 3

Continuité, dérivabilité, accroissements finis

3.1 Continuité

On va rappeler ici la notion de continuité, et deux autres notions importantes : le théorème des valeurs intermédiaires (et ses corollaires, dont la méthode de dichotomie), et le **prolongement par continuité**.

3.1.1 Définition

La continuité est une notion assez intuitive. Elle correspond au fait de "tracer sans lever le crayon" la courbe représentative d'une fonction.

Définition Une fonction f est **continue en un point a** de son domaine de définition si et seulement si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

En utilisant la définition mathématique des limites vue au §2.1.2, on peut donc écrire en langage mathématique : f est continue au point a si et seulement si

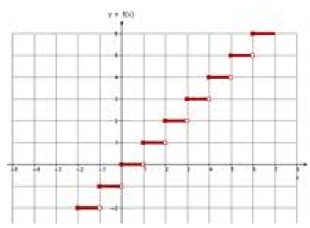
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \;/\; x \in]a - \alpha; a + \alpha[\implies f(x) \in]f(a) - \varepsilon; f(a) + \varepsilon[$$

Deux autres définitions sont associées à cette notion :

- Une fonction f est **continue à gauche en a** si et seulement si $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.
- Une fonction f est **continue à droite en a** si et seulement si $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

On en déduit bien sûr immédiatement que f est continue en un point a si et seulement si elle y est continue à gauche et à droite.

Exemples



• *La plupart des fonctions usuelles sont continues en tout point de leur domaine de définition : polynômes, fonctions trigonométriques, logarithmes, exponentielles...*

• *La* **partie entière** *d'un réel x, notée $E(x)$, est l'entier relatif immédiatement inférieur ou égal à x (cf dessin ci-contre). Cette fonction est continue en tout point $a \notin \mathbb{Z}$. Par contre, en tout point $a \in \mathbb{Z}$, elle est continue à droite mais pas à gauche.*

Définition Une fonction f est **continue sur un intervalle ouvert** $]a, b[$ si et seulement si elle est continue en tout point de cet intervalle.

Définition Une fonction f est **continue sur un intervalle fermé** $[a, b]$ si et seulement si elle est

- continue en tout point de $]a, b[$,
- continue à droite en a,
- continue à gauche en b.

Théorème Soient deux fonctions f et g, et a un réel.

- Si f est continue en a, alors λf est continue en a, pour tout réel λ.
- Si f et g sont continues en a, alors $f + g$ et $f \times g$ sont continues en a.
- Si f est continue en a et g est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.

Avec ce théorème et la continuité des fonction usuelles, on démontre la continuité de la plupart des fonctions que l'on a à étudier.

Exemple *On considère la fonction* $f(x) = \ln\left(\dfrac{2|x|}{1+x^2}\right)$, *qui est définie sur* $\mathbb{R}^*$.

$x \longrightarrow |x|$ *est continue sur* $\mathbb{R}^*$, *et* $x \longrightarrow \dfrac{1}{1+x^2}$ *est continue sur* $\mathbb{R}$ *(composée de* $g_1(x) = 1/x$ *et de* $g_2(x) = 1 + x^2$ *qui ne s'annule pas). Donc (par produit)* $x \longrightarrow \dfrac{2|x|}{1+x^2}$ *est continue sur* $\mathbb{R}^*$, *et à valeurs dans* $\mathbb{R}_+^*$.

Donc, par composition avec la fonction logarithme qui est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, $x \longrightarrow \ln\left(\dfrac{2|x|}{1+x^2}\right)$ *est continue sur* $\mathbb{R}^*$.

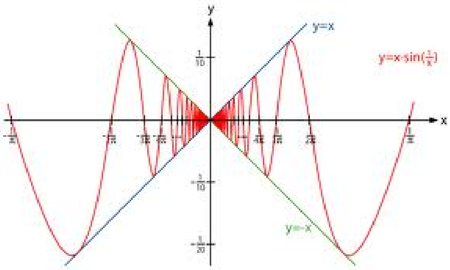
3.1.2 Prolongement par continuité

Une fonction f peut admettre une limite $\ell \in \mathbb{R}$ en un point a n'appartenant pas à son domaine de définition. Dans ce cas, il est logique d'étendre le domaine de définition en y incluant a et en posant $f(a) = \ell$. Il s'agit là d'un **prolongement par continuité**.

Exemple *On considère la fonction* $f(x) = x \sin\dfrac{1}{x}$, *qui est a priori définie sur* $\mathbb{R}^*$.

On a : $0 \leq \left|\sin\dfrac{1}{x}\right| \leq 1$, *donc* $0 \leq \left|x \sin\dfrac{1}{x}\right| \leq |x|$. *Par le théorème des gendarmes (cf §2.3), on en déduit que* $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. *On peut donc prolonger* f *par continuité en 0 en définissant la nouvelle fonction* $\tilde{f}$ *sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x \sin\dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

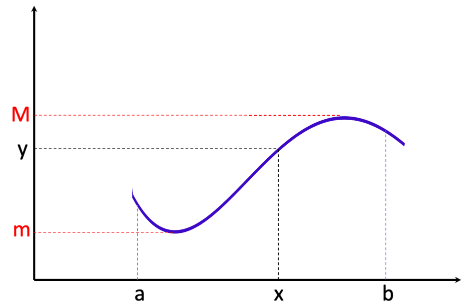


Il est très courant aussi de conserver la même notation f *pour la fonction prolongée, sans introduire de nouvelle notation* $\tilde{f}$.

3.1.3 Théorème des valeurs intermédiaires et ses corollaires

Théorème *(TVI : théorème des valeurs intermédiaires)*

Soit une fonction f continue sur un intervalle fermé $[a, b]$. L'image de $[a, b]$ par f est alors un intervalle fermé $[m, M]$, et pour toute valeur $y \in [m, M]$ il existe au moins une valeur $x \in [a, b]$ telle que $f(x) = y$.



Exemple *La fonction altitude est continue et vérifie donc le TVI. Lorsqu'on se promène en montagne, on ne peut pas passer de l'altitude z_1 à l'altitude z_2 sans passer par chaque altitude intermédiaire.*

Corollaire *(passage par 0)*
Si f est continue sur $[a, b]$ et que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes différents (l'une < 0 et l'autre > 0), alors il existe au moins une valeur $x_0 \in]a, b[$ telle que $f(x_0) = 0$.

Corollaire *(théorème de la bijection, ou théorème des fonctions réciproques)*
Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I (d'extrémités éventuellement infinies). Alors :

- $J = f(I)$ est un intervalle de même nature (ouvert, semi-ouvert, ou fermé) que I.
- f est bijective de I vers J, et sa fonction réciproque f^{-1} est continue de J vers I, strictement monotone et de même sens (croissant ou décroissant) que f.

Il existe plusieurs démonstrations de ces résultats, toutes basées sur le théorème de la borne supérieure : tout ensemble de réels non vide et majoré possède une borne supérieure (c'est-à-dire qu'il existe un réel qui est le plus petit des majorants).

3.2 Dérivabilité

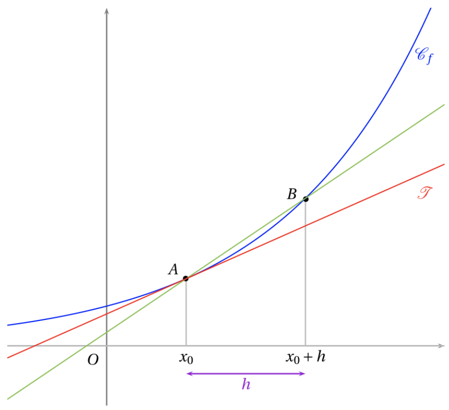
3.2.1 Définitions

Définition Soit f continue sur un intervalle I. Soit $x_0 \in I$. f est **dérivable en x_0** si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe.
Cette limite est alors notée $f'(x_0)$ et est appelée **dérivée de f en x_0**.

Remarque La définition suivante de la dérivée est équivalente à la définition précédente :

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Interprétation graphique La dérivée $f'(x_0)$ est la pente de la tangente à la courbe représentative de f en x_0. Dans le dessin ci-contre, la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A est en rouge, et est la limite quand h tend vers 0 de la droite verte correspondant à la pente $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.



Définition f est **dérivable sur un intervalle I** si et seulement si elle est dérivable en tout point de I.

Théorème Si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0.

Démonstration *Repartons de la définition de la dérivabilité en x_0 : $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. On veut en déduire que $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, c'est-à-dire que $\lim_{x\to x_0} (f(x)-f(x_0)) = 0$. Il suffit pour cela d'écrire : $f(x)-f(x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)$. On remarque que le premier terme tend vers $f'(x_0)$ d'après l'hypothèse de dérivabilité en x_0, tandis que le second terme tend naturellement vers 0.* □

Une erreur classique est de se tromper de sens dans l'implication, c'est-à-dire d'affirmer à tort que la continuité implique la dérivabilité. N'importe quelle fonction continue mais non dérivable illustre que ceci est faux, comme par exemple la fonction valeur absolue en $x = 0$.

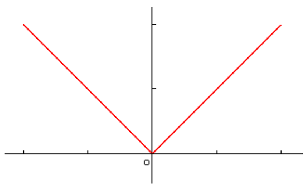
3.2.2 Dérivées à droite et à gauche

Définition De la même façon qu'on a défini les limites à droite et à gauche, et donc la continuité à droite et à gauche, on définit les **dérivées à droite et à gauche** :

- La fonction f, continue sur un intervalle $[a, b]$, est **dérivable à droite au point a** si et seulement si $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe. On la note $f'_d(a)$ ou $f'(a^+)$.
- La fonction f, continue sur un intervalle $[a, b]$, est **dérivable à gauche au point b** si et seulement si $\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)-f(b)}{x-b}$ existe. On la note $f'_g(b)$ ou $f'(b^-)$.

Comme pour la limite (cf §2.1.2), si les dérivées à droite et à gauche en un point x_0 existent et sont égales, alors la fonction est dérivable en ce point et $f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$. Au contraire, si f est continue dans un voisinage de x_0 mais que $f'_d(x_0) \neq f'_g(x_0)$, on dit alors que x_0 est un **point anguleux**.

Exemple *La fonction $f(x) = |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$. En $x = 0$, elle admet une dérivée à droite $f'_d(0) = 1$ et une dérivée à gauche $f'_g(0) = -1$. Elle n'a donc pas de dérivée en 0, mais y présente un point anguleux.*



En pratique Cette notion de dérivée à droite ou à gauche est particulièrement utile aux bornes du domaine de définition, notamment par exemple dans le cas d'un prolongement par continuité. Pour calculer une éventuelle dérivée à droite ou à gauche en un point x_0, on a deux possibilités :

- Partir de la définition : la dérivée à droite ou à gauche en x_0 est égale, si elle existe, à la limite du taux d'accroissement à droite ou à gauche en x_0.
- Calculer la limite à droite ou à gauche en x_0 de la dérivée. Si elle existe, cela signifie que la dérivée à droite ou à gauche en x_0 existe, et que la dérivée est de plus continue à droite ou à gauche en x_0. C'est le *théorème de la limite de la dérivée*, formulé ci-dessous.

L'erreur classique dans ce type de problème consiste à calculer la limite à droite ou à gauche en x_0 de la dérivée, à observer qu'elle n'existe pas, et à en déduire que la dérivée à droite ou à gauche en x_0 n'existe pas. Cette conclusion est fausse : on peut en fait seulement en déduire que la dérivée n'est pas continue à droite ou à gauche en x_0.

Exemple *Considérons la fonction* $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & \textit{si } x \neq 0 \\ 0 & \textit{si } x = 0 \end{cases}$. *$f$ est continue sur $\mathbb{R}$ (sa définition en $x=0$ résulte d'un prolongement par continuité). Elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (en tant que composée et produit de fonctions usuelles), et on a* $f'(x) = 2x \sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}$.
Etudions maintenant la dérivabilité en $x=0$. On voit assez facilement que $f'(x)$ n'a pas de limite quand x tend vers 0 (cas similaire à l'exemple du §2.1.2). On ne peut toutefois pas en conclure que f n'est pas dérivable en 0, mais seulement que f' n'est pas continue en 0. Il se peut malgré tout que $f'(0)$ existe. Pour le savoir, revenons à la définition, c'est-à-dire au taux d'accroissement :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$$

Donc f est dérivable en $x=0$ et $f'(0)=0$. Ainsi $f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x} & \textit{si } x \neq 0 \\ 0 & \textit{si } x = 0 \end{cases}$

Théorème *(de la limite de la dérivée)*
Si f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b]$, alors :

- Si f' admet une limite à droite finie en a, alors f est dérivable à droite en a et $f'_d(a) = \lim_{x\to a^+} f'(x)$.
- Si f' admet une limite à droite en a valant $+\infty$ ou $-\infty$, alors f n'est pas dérivable à droite en a, et la courbe représentative de f présente une tangente verticale en $x=a$.

On a évidemment un résultat équivalent à gauche en b pour une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $[a,b[$.

Démonstration *La démonstration de ce théorème est immédiate en revenant aux définitions précédentes des dérivées à gauche et à droite, et de la dérivée.* □

3.2.3 Tangente à la courbe représentative d'une fonction et approximation linéaire tangente

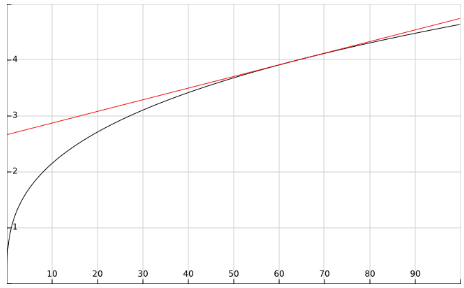
Soit une fonction f continue et dérivable dans un voisinage d'un point x_0. On peut facilement déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point x_0. En effet, il s'agit d'une droite, donc son équation est de la forme $y = ax+b$. De plus, on a vu que sa pente est égale à la dérivée en x_0 : $a = f'(x_0)$. Enfin, le point $(x_0, f(x_0))$ appartient à cette droite. Donc $f(x_0) = f'(x_0)\,x_0 + b$, d'où la valeur de b.

Finalement, **l'équation de la tangente au point x_0** est : $y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$.

Supposons que f ait une expression compliquée. Il peut alors être pratique pour obtenir rapidement une valeur approchée de $f(x)$ au voisinage d'un point x_0, d'utiliser plutôt l'équation de sa tangente en x_0. On parle d'**approximation affine tangente** (ou encore d'**approximation linéaire tangente**, même s'il s'agit d'une fonction affine et non pas linéaire !).

Exemple *On souhaite obtenir sans calculatrice une approximation de* $\sqrt[3]{66} = x^{1/3}$*. On peut remarquer que 66 est proche de 64, qui vaut exactement* 4^3*. Si l'on pose* $f(x) = \sqrt[3]{x}$ *et* $x_0 = 64$*, on a alors* $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3\,(\sqrt[3]{x})^2}$*,* $f(x_0) = f(64) = 4$ *et* $f'(x_0) = \frac{1}{3 \times 4^2} = \frac{1}{48}$ *. L'équation de la tangente à* f *en* $x_0 = 4$ *est donc* $T(x) = 4 + \frac{x-64}{48}$.

Appliquée à $x = 66$*, elle donne* $T(66) = 4+2/48 = 4,04166...$*, alors que la véritable valeur est* $f(66) = \sqrt[3]{66} = 4,04124...$
On a donc obtenu une approximation à 10^{-3} *près de la véritable valeur (c.a.d. que l'erreur commise* $T(66) - f(66)$ *est inférieure à* 10^{-3} *en valeur absolue).*



On généralisera le principe de telles approximations locales d'une fonction par un polynôme au chapitre 4, consacré aux développements limités.

3.2.4 Opérations sur les dérivées

On rappelle ici les résultats classiques d'opérations sur les dérivées, dont certains ont été vus au §1.1.

Théorème

- Si f et g sont dérivables en a, alors $f + g$ aussi et $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.
- Si f et g sont dérivables en a, alors $f \times g$ aussi et $(f \times g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.
- La dérivée de la fonction inverse est $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
- Si f est dérivable en a et et g est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))\, f'(a)$.
- Si f et g sont dérivables en a et si $g(a) \neq 0$, alors $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$.
- Si f est bijective d'un intervalle I vers un intervalle J, si f est dérivable en $a \in I$ et si $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ et $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$.

Démonstration *Tous ces résultats peuvent être démontrés très simplement en revenant à la définition de la dérivée comme limite d'un taux d'accroissement.* □

Un formulaire sur les dérivées (opérations et fonctions usuelles) est disponible en Annexe D.

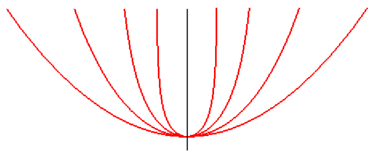
3.2.5 Dérivées d'ordres supérieurs

- En dérivant plusieurs fois de suite une même fonction, on définit ses dérivées successives : dérivée seconde, dérivée troisième... Ainsi : $f'' = (f')'$ $\quad f^{(3)} = (f'')'$ $\quad \dots \quad$ $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$
- $f''(a)$, la valeur de la dérivée seconde d'une fonction f en un point a, représente la **courbure** de la courbe représentative de f au point a.

  Si $f''(a) > 0$, la courbe est **convexe** au point a (c'est-à-dire que sa concavité est orientée vers le haut).

Si $f''(a) < 0$, la courbe est **concave** au point a (c'est-à-dire que sa concavité est orientée vers le bas).
La courbure est forte si et seulement si $|f''(a)|$ est grand.
La courbure est faible si et seulement si $|f''(a)|$ est petit.

Exemple *La fonction $f(x) = \alpha x^2$ est une parabole. Sa dérivée seconde est la fonction constante égale à 2α. Donc si $|\alpha|$ est petit, la courbe sera très aplatie, et au contraire si $|\alpha|$ est grand, la courbe sera très convexe ou très concave.*



Si $f''(a) = 0$, on ne peut rien en déduire sur la concavité/convexité de la courbe au voisinage de a. Par exemple $f_1(x) = x^4$ et $f_2(x) = -x^4$ vérifient $f_1''(0) = f_2''(0) = 0$, et f_1 est convexe au voisinage de 0 alors que f_2 est concave.

- Un point où la concavité change d'orientation est appelé un **point d'inflexion**. Géométriquement, cela se traduit par le fait que la courbe traverse la tangente en ce point.
- Une fonction f est **de classe $\mathcal{C}^k$** sur un intervalle I si et seulement si $f', f'', \ldots, f^{(k)}$ existent sur I et si $f^{(k)}$ est continue sur I.
- Une fonction est **de classe $\mathcal{C}^\infty$** sur un intervalle I si et seulement si elle est indéfiniment dérivable sur I. C'est le cas par exemple des fonctions polynômes, exponentielles, trigonométriques.
- $(fg)^{(n)}$, la dérivée d'ordre n ($n \in \mathbb{N}$) du produit de deux fonctions f et g chacune n fois dérivable, est donnée par la formule de Leibniz, fournie en annexe (§D.2).

3.2.6 Dérivée et sens de variation

Théorème Soit une fonction f continue sur un intervalle I contenant x_0, et dérivable au point x_0.

- si $f'(x_0) > 0$, alors f est croissante dans un voisinage de x_0
- si $f'(x_0) < 0$, alors f est décroissante dans un voisinage de x_0

Démonstration *Supposons que $f'(x_0) > 0$ (la démonstration est similaire dans l'autre cas). Le taux d'accroissement $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est une fonction continue sur I, et tend vers la valeur strictement positive $f'(x_0)$ quand x tend vers x_0. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc un voisinage de x_0 sur lequel le taux d'accroissement est strictement positif. Donc $f(x) - f(x_0)$ est du même signe que $x - x_0$ sur ce voisinage, ce qui signifie que f y est croissante.* $\square$

Ce résultat bien connu explique l'importance qu'il y a à déterminer le signe de la dérivée lors de l'étude d'une fonction, afin de décrire ses variations.

Si $f'(a) = 0$, on ne peut rien en déduire sur le sens de variation de la courbe au voisinage de a. Par exemple $f_1(x) = x^3$ et $f_2(x) = -x^3$ vérifient $f_1'(0) = f_2'(0) = 0$, et f_1 est croissante au voisinage de 0 alors que f_2 est décroissante.

3.2.7 Extrema de fonctions

Théorème Soit f une fonction définie dans un voisinage d'un point a. Si f présente un extremum local en a et si f est dérivable en a, alors $f'(a) = 0$.

Démonstration *Supposons que f admette un maximum local en a. Alors il existe un intervalle autour de a, que l'on va noter par exemple $[a-\alpha, a+\alpha]$, tel que $\forall x \in [a-\alpha, a+\alpha], f(x) \leq f(a)$. On en déduit que :*

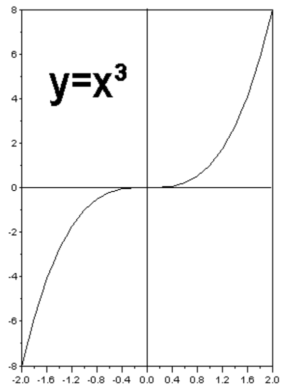
- $\forall x \in [a-\alpha, a[$, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$. *Donc $f'(a) \geq 0$ en passant à la limite quand x tend vers a.*
- $\forall x \in]a, a+\alpha]$, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$. *Donc $f'(a) \leq 0$ en passant à la limite quand x tend vers a.*

$f'(a)$ est donc à la fois positif et négatif. Donc $f'(a) = 0$.

La démonstration est similaire si f admet un minimum local. □

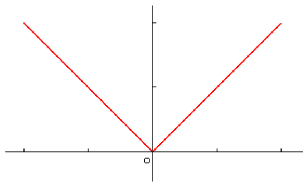
Si f est dérivable en a, $f'(a) = 0$ est une condition nécessaire pour avoir un extremum, mais ce n'est pas une condition suffisante.

Exemple *La fonction $f(x) = x^3$ a pour dérivée $f'(x) = 3x^2$. On a donc $f'(0) = 0$, mais pourtant 0 n'est pas un extremum. C'est juste un point d'inflexion (voir §3.2.5).*



Une fonction peut admettre un extremum en un point a sans être dérivable en ce point.

Exemple *La fonction $f(x) = |x|$ est minimale en $x = 0$. Pourtant, la dérivée de f n'existe pas en 0.*

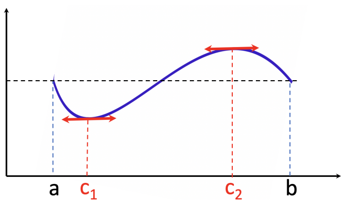


3.3 Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

Théorème *(de Rolle)* Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Si $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration *f étant continue, l'image de l'intervalle fermé $[a, b]$ est un intervalle fermé $[m, M]$ (comme pour le théorème des valeurs intermédiaires, au §3.1.3). Donc $\exists c_1 \in [a, b] / f(c_1) = m$ et $\exists c_2 \in [a, b] / f(c_2) = M$.*

- *Si $m = M$, alors f est constante. Donc $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]a, b[$.*
- *Si $m < M$, alors l'une de ces 2 valeurs au moins est différente de $f(a) = f(b)$.*
  Supposons que $m \neq f(a)$. Alors $m < f(a)$. Donc $c_1 \in]a, b[$ est un minimum de f. Donc $f'(c_1) = 0$.
  De même, supposons que $M \neq f(a)$. Alors $M > f(a)$. Donc $c_2 \in]a, b[$ est un maximum de f. Donc $f'(c_2) = 0$. □



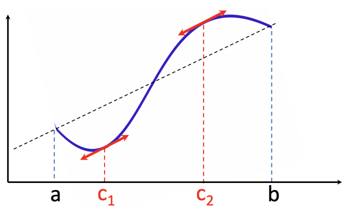
Une interprétation simple de ce théorème est que, lorsqu'on se déplace "sans à-coups" le long d'un axe, si l'on part et que l'on arrive au même point, il y a forcément un instant où la vitesse instantanée est nulle.

Exemple *Le théorème de Rolle permet par exemple d'établir les résultats suivants :*

- *Si $P(x)$ est un polynôme admettant n racines réelles distinctes, $P'(x)$ admet au moins $n-1$ racines réelles distinctes.*
- *Si $P(x)$ est un polynôme de degré n admettant n racines réelles distinctes, $P'(x)$ admet exactement $n-1$ racines réelles distinctes.*

Théorème *(des accroissements finis)* Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Démonstration *Posons $g(x) = f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$. D'après les propriétés de f, g est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. De plus, on a construit g de façon à ce que $g(a) = g(b)$. On peut donc appliquer le théorème de Rolle à g : il existe $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$. Or $g'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. D'où le résultat.* □



Une interprétation de ce théorème consiste à dire que, lorsqu'on se déplace "sans à-coups" d'un point à un autre, il y a forcément un instant où la vitesse instantanée est égale à la vitesse moyenne.

On reviendra sur le théorème des accroissements finis notamment lors de l'étude des développements limités, avec la formule de Taylor-Lagrange (cf §4.7).

Une conséquence du théorème des accroissements finis concerne l'étude des variations d'une fonction, comme vu au §3.2.6. Ainsi :

Théorème Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I.

- f est croissante sur I si et seulement si $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$.
- f est décroissante sur I si et seulement si $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$.

Démonstration

- *Supposons que f est croissante sur I :*
  Alors tous les taux d'accroissement sont positifs : $\forall x, y \in I \quad \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq 0$
  Donc toutes les dérivées sont positives ou nulles, en tant que limites des taux d'accroissements.
- *Réciproquement, si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$:*
  Soient $x, y \in I$ avec $x < y$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x,y[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$. Or $f'(c) \geq 0$ par hypothèse. Donc $f(x) \leq f(y)$. f est donc croissante, puisque ceci est vrai pour toutes valeurs de x et y avec $x < y$.
- *L'équivalence (f décroissante sur I) $\Longleftrightarrow$ ($f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$) se démontre de façon similaire, ou bien simplement en changeant f en $-f$ dans le résultat précédent.* □

Une autre conséquence immédiate du théorème des accroissements finis est la suivante :

Théorème *(inégalité des accroissements finis)* Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. S'il existe un réel k tel que $|f'(x)| \leq k \ \forall x \in]a,b[$, alors $\left|\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right| \leq k$.

En remarquant que la moyenne de f' sur $]a,b[$ vaut $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f'(x)\,dx = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, on déduit une interprétation simple de ce théorème : si une quantité variant sur un intervalle $]a,b[$ ne peut pas dépasser la valeur k, alors sa valeur moyenne non plus.

3.4 Résolution d'une équation de type $f(x) = 0$

Le but de cette section est de présenter des méthodes systématiques (des **algorithmes**) pour trouver les valeurs de x qui annulent une fonction f continue donnée. Ces valeurs x vérifiant $f(x) = 0$ sont appelées les **zéros** de f, ou encore les **racines** de f.

3.4.1 Un cadre d'utilisation très large

Il faut bien comprendre qu'un tel problème $f(x) = 0$ recouvre en fait de très nombreux cas. Pour ne citer que quelques exemples :

- chercher les valeurs de x telles que $f(x) = 2$ revient à résoudre $F(x) = 0$, avec $F(x) = f(x) - 2$
- chercher les points d'intersection de la courbe représentative de la fonction f avec une droite d'équation $y = ax + b$ revient à résoudre $F(x) = 0$, avec $F(x) = f(x) - ax - b$
- chercher les points d'intersection des courbes représentatives des fonctions f et g revient à résoudre $F(x) = 0$, avec $F(x) = f(x) - g(x)$
- chercher les extremums d'une fonction f dérivable demande de résoudre $F(x) = 0$, avec $F(x) = f'(x)$

3.4.2 Méthode de dichotomie

La méthode de dichotomie (prononcer *dikotomie*) est basée sur le théorème des valeurs intermédiaires, et plus précisément son corollaire de passage par 0, présentés au §3.1.3 : si f est continue sur $[a,b]$ et que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes différents (l'une < 0 et l'autre > 0), alors il existe au moins une valeur $x_0 \in]a,b[$ telle que $f(x_0) = 0$.

Etant donnée une telle situation, la méthode de dichotomie consiste à rechercher la valeur de x_0 (ou plutôt une approximation de x_0) en réduisant petit à petit l'intervalle contenant x_0. Pour cela, on coupe l'intervalle de recherche en 2, on teste la valeur de f au point de coupure, et on regarde sur lequel des 2 sous-intervalles le corollaire de passage par zéro s'applique.

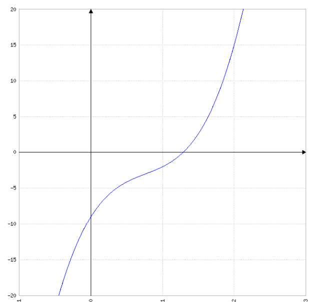
Au niveau algorithmique, cette méthode s'écrit de la façon suivante :

```
% Initialisation de l'algorithme
    ValeurInf ← a
    ValeurSup ← b
    PrécisionVoulue ← 0.001 % (par exemple)

    ApproxRacine ← (a + b)/2
    Précision ← (b − a)/2

% Boucle de recherche
```

```
Tant que Précision > PrécisionVoulue Faire
    Milieu ← (ValeurInf + ValeurSup)/2
    Si f(Milieu) = 0 Alors
        ValeurInf ← Milieu
        ValeurSup ← Milieu
        ApproxRacine ← Milieu
    Sinon
        Si f(Milieu) > 0 Alors
            Si f(ValeurInf) > 0 Alors
                ValeurInf ← Milieu
            Sinon
                ValeurSup ← Milieu
            Fin Si
        Sinon
            Si f(ValeurInf) > 0 Alors
                ValeurSup ← Milieu
            Sinon
                ValeurInf ← Milieu
            Fin Si
        Fin Si
    Fin Si
    ApproxRacine ← (ValeurInf + ValeurSup)/2
    Précision ← (ValeurSup - ValeurInf)/2
Fin Tant que
```

En sortie de cet algorithme, l'approximation d'une racine x_0 est la valeur de `ApproxRacine`. Elle est précise à `Précision` près, c'est-à-dire qu'on est sûr que l'écart entre l'approximation `ApproxRacine` et la vraie valeur x_0 est inférieur à `Précision`.

Exemple https://www.youtube.com/watch?v=6PUMMIB9U8Q



On cherche par méthode de dichotomie la racine x_0 de la fonction $f(x) = 7x^3 - 16x^2 + 16x - 9$ (figure ci-contre).
On remarque que $f(1) = -2 < 0$ et que $f(2) = 15 > 0$. Donc, f étant continue, on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires et en déduire que $x_0 \in]1, 2[$.
On initialise l'algorithme de dichotomie avec `ValeurInf` $= 1$ *et* `ValeurSup` $= 2$.

`Boucle 1` : `Milieu` $= 1.5$. *On a* $f(1.5) = 2.625 > 0$. *Donc* $x_0 \in]1, 1.5[$, *et* 1.25 *est une valeur approchée de* x_0 *à* 0.25 *près.*

`Boucle 2` : `Milieu` $= 1.25$. *On a* $f(1.25) \simeq -0.3281 < 0$. *Donc* $x_0 \in]1.25, 1.5[$, *et* 1.375 *est une valeur approchée de* x_0 *à* 0.125 *près.*

`Boucle 3` : `Milieu` $= 1.375$. *On a* $f(1.375) \simeq 0.9473 > 0$. *Donc* $x_0 \in]1.25, 1.375[$, *et* 1.3125 *est une valeur approchée de* x_0 *à* 0.0625 *près.*

`Boucle 4` : `Milieu` $= 1.3125$. *On a* $f(1.3125) \simeq 0.2644 > 0$. *Donc* $x_0 \in]1.25, 1.3125[$, *et* 1.28125 *est une valeur approchée de* x_0 *à* 0.03125 *près.*

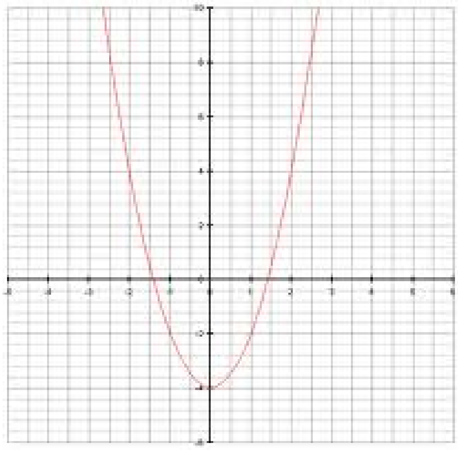
En continuant ainsi, on arrive à $x_0 \simeq 1.285714...$

Remarque 1 Le fait de trouver une racine par dichotomie ne garantit pas qu'il n'y en ait pas d'autres.

Exemple *On considère la fonction* $f(x) = 2x^2 - 4$. *En résolvant l'équation* $f(x) = 0$, *on détermine facilement ses deux racines* $-\sqrt{2}$ *et* $\sqrt{2}$.

On voit que si l'on recherche ces racines par méthode de dichotomie, l'intervalle $[a, b]$ *utilisé pour initialiser l'algorithme va déterminer la racine trouvée. Ainsi par exemple :*

- *si l'on choisit* $[a, b] = [-5, 1]$, *on trouvera seulement une approximation de la racine* $-\sqrt{2}$
- *si l'on choisit* $[a, b] = [0, 2]$, *on trouvera seulement une approximation de la racine* $\sqrt{2}$



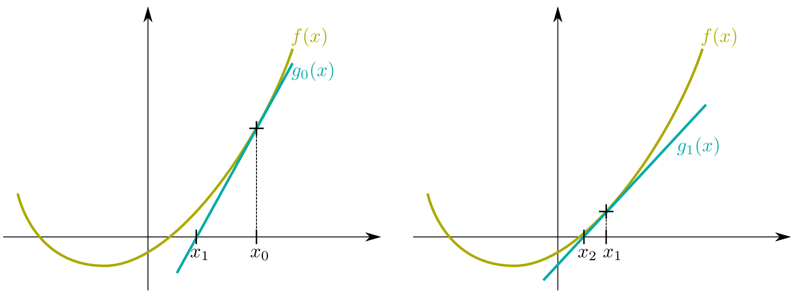
Remarque 2 Si la fonction f n'est pas continue, utiliser la méthode de dichotomie n'a pas de sens.

Exemple *On considère la fonction* $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 3 \\ +1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$.
On a par exemple $f(0) = -1$ *et* $f(5) = 1$. *Donc, si l'on oubliait que* f *doit être continue pour pouvoir appliquer le théorème des valeurs intermédiaires, on pourrait à tort en déduire que* f *admet une racine dans l'intervalle* $[0, 5]$. *Une application de la méthode de dichotomie amènerait à trouver comme racine une valeur très proche de 3, ce qui est faux puisque* $f(3) = 1$.

3.4.3 Méthode de Newton

L'exemple de recherche par dichotomie de la racine de la fonction $f(x) = 7x^3 - 16x^2 + 16x - 9$ au §3.4.2 montre que cet algorithme peut nécessiter de nombreuses itérations pour atteindre une précision donnée (on reviendra sur cette notion de vitesse de convergence au §3.4.4). Une autre approche, appelée méthode de Newton, consiste à utiliser non seulement les valeurs de $f(x)$ mais aussi les tangentes à la courbe représentative de f (c'est-à-dire également les valeurs de la dérivée $f'(x)$).

L'idée générale consiste à construire itérativement une suite de valeurs $(x_i)_i$ convergeant vers la racine de l'équation $f(x) = 0$ en définissant x_{i+1} comme l'intersection de la tangente $g_i(x)$ à la courbe au point $(x_i, f(x_i))$ avec l'axe des x. La figure ci-contre présente les 2 premières itérations de cette méthode sur un exemple.



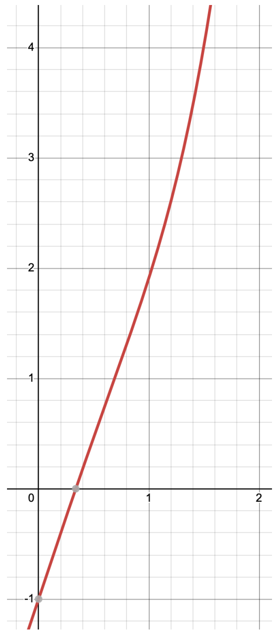
Iteration 1 Iteration 2

Détaillons maintenant cette méthode. Etant donnée une approximation x_i de la racine, l'équation de la tangente à la courbe de f en ce point est (d'après §3.2.3) : $g_i(x) = f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i)$. Cette droite coupe l'axe des x en un point que l'on va noter x_{i+1}, et qui vérifie donc : $g_i(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) = 0$. On en déduit immédiatement : $x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)}$.

L'algorithme de Newton consiste donc à choisir une valeur arbitraire x_0 et à construire la suite de valeurs x_1, x_2... en appliquant la formule $x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)}$.

Exemple *On considère la fonction $f(x) = \sin(2x) + x^3 + x - 1$. Comme on peut le voir sur la figure ci-contre, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution, dont la valeur se situe entre 0.3 et 0.4.*
Appliquons la méthode de Newton à partir par exemple de $x_0 = \dfrac{\pi}{2} \simeq 1.751$. On a $f'(x) = 2\cos(2x) + 3x^2 + 1$.

- *on peut calculer $f(x_0) \simeq 4.447$ et $f'(x_0) \simeq 6.402$. D'où $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} \simeq 0.876$*
- *on en déduit $f(x_1) \simeq 1.532$ et $f'(x_1) \simeq 2.942$. D'où $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)} \simeq 0.355$*
- *on en déduit $f(x_2) \simeq 0.053$ et $f'(x_2) \simeq 2.895$. D'où $x_3 = x_2 - \dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)} \simeq 0.337$*
- *on a $f(0.337) \simeq -6\,10^{-4}$: x_3 est donc déjà une très bonne approximation de la solution.*



Remarque 1 Comme pour la méthode de dichotomie, le fait de trouver une racine ne garantit pas qu'il n'y en ait pas d'autres. Si une fonction a plusieurs zéros, celui que l'on va trouver dépend de la valeur x_0 choisie pour initialiser l'algorithme.

Remarque 2 On a vu que la méthode de dichotomie peut être appliquée dès lors que la fonction f est continue. La méthode de Newton nécessite en plus que f soit dérivable, ce qui est donc un peu plus restrictif.

3.4.4 Vitesse de convergence des algorithmes

Nous avons présenté deux méthodes différentes, mais laquelle est la meilleure ? Il n'est pas possible de le dire de façon générale pour tout problème de recherche de zéros d'une fonction. Mais une fois que nous avons approché la racine d'assez près, nous pouvons déterminer à quelle vitesse les erreurs sont réduites à chaque itération.

3.4.4.1 Convergence de la dichotomie

Pour la dichotomie, notons $x_{i,-}$ et $x_{i,+}$ les bornes de l'intervalle à l'itération i. Chaque itération mène à un nouveau point central

$$x_{i+1,c} = \tfrac{1}{2}\left(x_{i,+} + x_{i,-}\right)$$

qui sera la nouvelle borne soit inférieure soit supérieure de l'intervalle. La taille de l'intervalle à l'itération i vaut $d_i = x_{i,+} - x_{i,-}$, et elle est divisée par 2 à chaque itération : $d_{i+1} = \dfrac{1}{2} d_i$.

En notant x_* la valeur exacte de la racine, on peut définir l'erreur à l'itération i comme l'écart entre le point central de l'intervalle et cette valeur exacte : $\epsilon_i = x_* - x_{i,c}$. Elle est en moyenne divisée par 2 à chaque itération. On a donc $\epsilon_{i+1} \simeq \epsilon_i/2$, et on dit qu'on a une **convergence linéaire** (ou encore convergence d'ordre 1) de la méthode de dichotomie.

3.4.4.2 Convergence de la méthode de Newton

Ce paragraphe utilise la notion de développement limité, que nous ne verrons qu'au §4.3.2. Considérez donc ceci comme une mise en bouche. Vous pouvez aussi sauter cette section si vous le souhaitez et y revenir plus tard.

Si l'on suppose que la fonction $f(x)$ est dérivable au moins jusqu'à l'ordre 2 dans un voisinage de x_*, on peut alors écrire pour tout x dans ce voisinage :

$$f(x) = \underbrace{f(x_*)}_{=0} + (x - x_*) f'(x_*) + \frac{1}{2}(x - x_*)^2 f''(x_*) + o\left((x - x_*)^2\right)$$

et $$f'(x) = f'(x_*) + (x - x_*) f''(x_*) + o(x - x_*)$$

où la notation $o\left((x - x_*)^2\right)$ désigne une quantité négligeable devant $(x - x_*)^2$, et la notation $o(x - x_*)$ désigne une quantité négligeable devant $(x - x_*)$.

Définissons l'erreur à l'itération i par $\epsilon_i = x_i - x_*$. En utilisant la relation $x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)}$ de la méthode de Newton, et en remplaçant $f(x_i)$ et $f'(x_i)$ par leurs développements limités (obtenus en remarquant que $x_i = x_* + \epsilon_i$), on obtient :

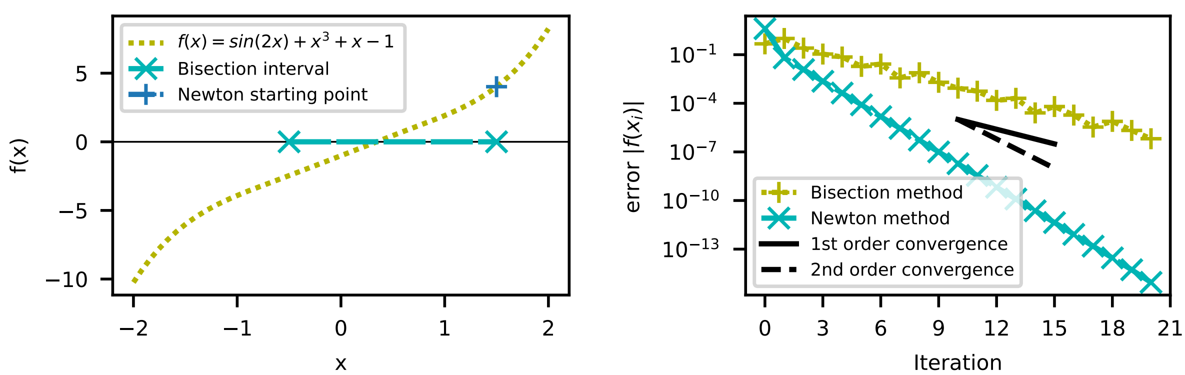
$$\cancel{x_*} + \epsilon_{i+1} = \cancel{x_*} + \epsilon_i - \frac{(x_i - x_*) f'(x_*) + \frac{1}{2}(x_i - x_*)^2 f''(x_*) + o\left((x_i - x_*)^2\right)}{f'(x_*) + (x_i - x_*) f''(x_*) + o(x_i - x_*)}$$

d'où $$\epsilon_{i+1} = \epsilon_i - \frac{\epsilon_i f'(x_*) + \frac{1}{2}\epsilon_i^2 f''(x_*) + o\left(\epsilon_i^2\right)}{f'(x_*) + \epsilon_i f''(x_*) + o(\epsilon_i)} = \frac{\frac{1}{2} f''(x_*) + o(1)}{f'(x_*) + o(1)} \epsilon_i^2$$

On a donc finalement $\epsilon_{i+1} \simeq \dfrac{f''(x_*)}{2 f'(x_*)} \epsilon_i^2$. L'erreur à l'itération $i+1$ est proportionnelle au carré de l'erreur à l'itération i : on dit qu'on a une **convergence quadratique** (ou encore convergence d'ordre 2).

3.4.4.3 Exemple

On peut illustrer cette notion de vitesse de convergence pour les deux méthodes (dichotomie et Newton) sur l'exemple du §3.4.3 : rechercher le zéro de la fonction $f(x) = \sin(2x) + x^3 + x - 1$. L'allure de la fonction sur l'intervalle $[-2; 2]$ est indiquée sur la figure de gauche ci-dessous, ainsi que l'intervalle initial $[x_{0,-}, x_{0,+}]$ pour la méthode de dichotomie et la valeur initiale x_0 pour la méthode de Newton. La figure de droite indique quant à elle la valeur de $|f(x_{i,c}|$ (dichotomie) et de $|f(x_i)|$ (méthode de Newton) en fonction des itérations. Ces valeurs convergent donc vers $|f(x_*)| = 0$. L'axe des y utilise une échelle logarithmique, et l'on observe bien une décroissance linéaire (droite de pente -1) pour la dichotomie et quadratique (droite de pente -2) pour la méthode de Newton : cette dernière converge deux fois plus vite que la dichotomie.



Chapitre 4

Développements limités

Le but de ce chapitre est de construire une méthode pour fournir des approximations locales d'une fonction quelconque par un polynôme, ceci afin par exemple de calculer des limites, des asymptotes, etc. Ce sont aussi de telles approximations polynomiales (et d'autres versions un peu plus complexes) qui sont utilisées dans les micro-processeurs pour évaluer les fonctions usuelles (fonctions trigonométriques, exponentielle, logarithme, racine carrée), ou encore dans les méthodes de simulation numérique de phénomènes physiques.

4.1 Polynômes d'approximation de Taylor

Dans ce paragraphe, on va introduire la formulation générale de polynômes approchant localement une fonction f au voisinage d'un point x_0. On ne va pas, pour l'instant, se préoccuper de quantifier l'erreur d'approximation commise.

Le choix fait par Brook Taylor (1685-1731) consiste à dire qu'on peut sans doute approcher correctement une fonction f au voisinage de x_0 par un polynôme qui aurait la même valeur que f en x_0, ainsi que la même dérivée première que f en x_0, la même dérivée seconde que f en x_0, etc. C'est ce choix qui va nous mener à la notion de développement limité.
Il faut cependant être conscient du fait que bien d'autres approximations seraient possibles, comme par exemple approcher f par un polynôme coïncidant exactement avec f sur quelques points proches de x_0 (polynôme d'interpolation de Lagrange), ou par un polynôme coïncidant exactement avec f et f' sur quelques points proches de x_0 (polynôme d'interpolation d'Hermite).

4.1.1 Polynômes de Taylor en $x_0 = 0$

Commençons par nous placer au voisinage de $x_0 = 0$.

Un polynôme P_n, de degré n, s'écrit de façon générale $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, avec $a_n \neq 0$. Le définir revient à fixer les valeurs des $n+1$ coefficients $a_0, \ldots, a_n$, ce qui peut être réalisé en imposant $n+1$ conditions indépendantes. Avec le choix de Taylor, on va donc imposer :

$$P_n(0) = f(0)\ , \quad P_n'(0) = f'(0)\ , \ \ldots\ , \quad P_n^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)$$

On a de plus :

$$\begin{array}{lcll}
P_n(x) & = & a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 & \text{d'où } P_n(0) = a_0 \\
P'_n(x) & = & n\,a_n x^{n-1} + (n-1)\,a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2x + a_1 & \text{d'où } P'_n(0) = a_1 \\
P''_n(x) & = & n(n-1)\,a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2)\,a_{n-1}x^{n-3} + \cdots + 2a_2 & \text{d'où } P''_n(0) = 2a_2 \\
 & \vdots & & \\
P_n^{(n-1)}(x) & = & n(n-1)\ldots 2\,a_n x + (n-1)!\,a_{n-1} & \text{d'où } P_n^{(n-1)}(0) = (n-1)!\,a_{n-1} \\
P_n^{(n)}(x) & = & n!\,a_n & \text{d'où } P_n^{(n)}(0) = n!\,a_n
\end{array}$$

D'où : $a_0 = f(0)$, $a_1 = f'(0)$, $a_2 = \frac{1}{2}f''(0)$, $\ldots$, $a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)$. (on rappelle la définition de la factorielle : $n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$)

On obtient donc finalement :

$$P_n(x) = f(0) + x\,f'(0) + \frac{x^2}{2}\,f''(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\,f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{n!}\,f^{(n)}(0) \tag{4.1}$$

Définition $P_n(x)$ est appelé **polynôme de Taylor de degré n de f au voisinage de 0**. On l'appelle aussi **polynôme de Mac Laurin de degré n de f**.

Cette dénomination *polynôme de Mac Laurin* sous-entend donc que l'on est au voisinage de 0.

4.1.2 Exemples

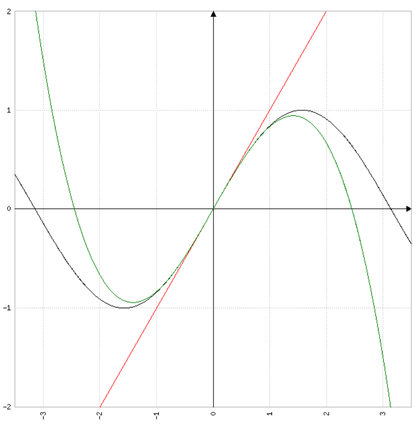
Approximation de la fonction sinus au voisinage de 0 Appliquons la méthode précédente à la fonction $f(x) = \sin x$ au voisinage de 0. On a :

$$f(x) = \sin x \qquad f'(x) = \cos x \qquad f''(x) = -\sin x \qquad f^{(3)}(x) = -\cos x \qquad f^{(4)}(x) = \sin x$$

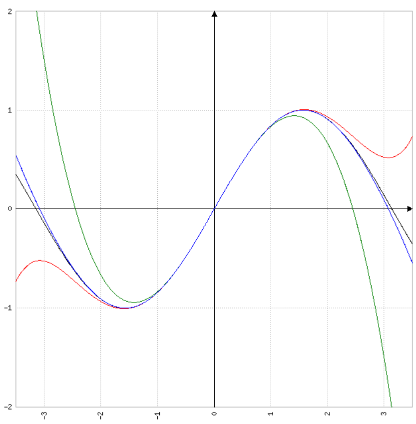
On voit donc que toutes les dérivées d'ordre pair valent $\pm\sin x$, et toutes les dérivées d'ordre impair valent $\pm\cos x$. D'où $f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0, f^{(3)}(0) = -1\ldots$, et donc :

$$P_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

En dessinant la fonction sinus et les premiers polynômes d'approximation P_1, P_3, P_5, P_7, on voit que ces derniers approchent de mieux en mieux la fonction sinus au voisinage de 0.



Comparaison de la fonction sinus (en noir) et de ses polynômes d'approximation de Taylor P_1 (en rouge) et P_3 (en vert)



Comparaison de la fonction sinus (en noir) et de ses polynômes d'approximation de Taylor P_3 (en vert), P_5 (en rouge) et P_7 (en bleu)

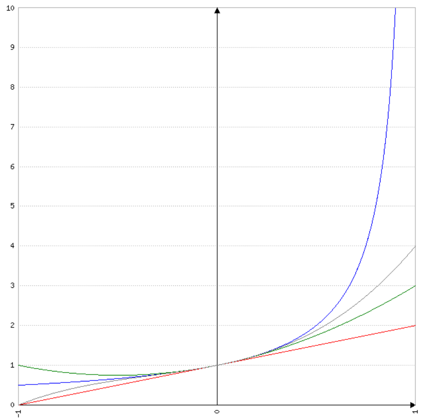
Approximation de la fonction $\frac{1}{1-x}$ au voisinage de 0 Avec $f(x) = \frac{1}{1-x}$, on a :

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}\ , \quad f''(x) = \frac{1\times 2}{(1-x)^3}\ , \quad f^{(3)}(x) = \frac{1\times 2\times 3}{(1-x)^4}\quad ,\dots\ ,\ f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

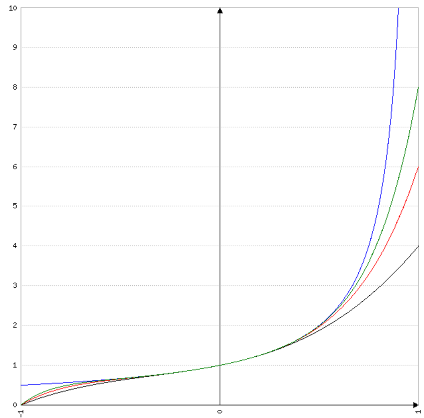
D'où : $f'(0) = 1$, $f''(0) = 2$, $f^{(3)}(0) = 3!$, ... , $f^{(n)}(0) = n!$, et donc :

$$P_n(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$$

Comme dans l'exemple précédent, on voit ci-dessous que ces polynômes approchent de mieux en mieux la fonction $\frac{1}{1-x}$ au voisinage de 0.



Comparaison de la fonction $1/(1-x)$ (en bleu) et de ses polynômes d'approximation P_1 (en rouge), P_2 (en vert) et P_3 (en noir)



Comparaison de la fonction $1/(1-x)$ (en bleu) et de ses polynômes d'approximation P_3 (en noir), P_5 (en rouge) et P_7 (en vert)

4.1.3 Extension pour x_0 réel quelconque

Les polynômes d'approximation précédents ont été calculés au voisinage de 0. On peut en déduire facilement des polynômes d'approximation au voisinage de toute valeur x_0 par le simple changement de variable $X = x - x_0$. En effet, chercher un polynôme d'approximation de $f(x)$ au voisinage de $x = x_0$ revient à chercher un polynôme d'approximation de $g(X) = f(x) = f(X + x_0)$ au voisinage de $X = 0$. On obtient ainsi :

$$P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)\, f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2}\, f''(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}\, f^{(n)}(x_0) \qquad (4.2)$$

Définition $P_n(x)$ est appelé **polynôme de Taylor de degré n de f au voisinage de x_0**.

Remarque Le cas particulier $n = 1$, qui correspond à approcher f localement par une droite, fournit exactement l'approximation affine tangente vue au §3.2.3.

4.1.4 Ecriture suivant les puissances croissantes

Alors qu'on écrit en général un polynôme sous la forme $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, on peut remarquer que les polynômes de Mac Laurin (4.1) et de Taylor (4.2) sont écrits dans l'ordre inverse, c'est-à-dire selon les puissances croissantes. En effet, lorsque x est proche de 0, on a la relation $x \gg x^2 \gg x^3 \gg \ldots$. Et de même $(x - x_0) \gg (x - x_0)^2 \gg (x - x_0)^3 \gg \ldots$ lorsque x est proche de x_0. Les puissances de plus en plus élevées correspondent donc a priori à des termes de plus en plus petits. Cette convention d'écriture suivant les puissances croissantes est donc une façon de mettre en évidence l'ordre d'importance des différents termes.

On a déjà vu ce phénomène dans les exemples du §4.1.2 : monter en ordre, c'est-à-dire rajouter un terme dans le polynôme, entraine une correction de plus en plus petite de l'approximation.

4.2 Comparaison locale de fonctions : notations o et O

4.2.1 Définitions

Définition On dit qu'une fonction u est "o d'une fonction v", noté $u = o(v)$, au voisinage d'un point x_0 si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{u(x)}{v(x)} = 0$. (la notation o est lue "petit o")
On peut aussi écrire de façon équivalente : $u(x) = v(x)\,\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.
En langage courant : u est négligeable devant v au voisinage de x_0.

Définition On dit qu'une fonction u est "O d'une fonction v", noté $u = O(v)$, au voisinage d'un point x_0 si et seulement si il existe un voisinage de x_0 et deux constantes $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$ telles que $c_1\,|v(x)| \leq |u(x)| \leq c_2\,|v(x)|$ pour tout x dans ce voisinage. (la notation O est lue "grand O")
En langage courant : u et v sont du même ordre de grandeur au voisinage de x_0.

Ce sont les **notations de Landau**, d'après le mathématicien allemand E. Landau (1877-1938).

Exemples

- $\sin(2x) = O(x)$ *au voisinage de 0. En effet, on sait que* $\lim\limits_{X \to 0} \dfrac{\sin X}{X} = 1$. *Donc, en posant* $X = 2x$, *on en déduit que* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{x} = 2$. *Cette fonction étant continue, il existe donc un intervalle* V *contenant 0 tel que l'on a par exemple* $\forall x \in V,\ 1 \leq \dfrac{\sin 2x}{x} \leq 3$. *C'est donc bien la définition de* $\sin(2x) = O(x)$ *au voisinage de 0.*
- *Au voisinage de 0,* $f(x) = 3x^2 \sin(x) = o(x^2)$ *puisque* $f(x) = x^2\,\varepsilon(x)$ *avec* $\varepsilon(x) = 3\ \sin x \longrightarrow 0$ *quand* $x \longrightarrow 0$.
- *Au voisinage de 0,* $x^{n+1} = o(x^n)\quad \forall n \in \mathbb{N}$. *Et de façon plus générale,* $x^p = o(x^q)$ *pour tous entiers* p *et* q *tels que* $p > q$. *C'est simplement la traduction du fait qu'au voisinage de 0,* $x \gg x^2 \gg x^3 \gg \ldots \gg x^n$, *contrairement à ce qui se passe quand* x *est grand.*
- *Au voisinage de* x_0, *on a donc de la même façon :*

  $$(x - x_0) \gg (x - x_0)^2 \gg (x - x_0)^3 \gg \ldots \gg (x - x_0)^n$$

  D'où par exemple $3(x - x_0)^5 = o\left((x - x_0)^2\right)$ *puisque le rapport des deux expressions, qui vaut* $3(x - x_0)^3$, *tend vers 0 quand* x *tend vers* x_0.
- *Par contre, au voisinage de* $+\infty$, *c'est* $\dfrac{1}{x} \gg \dfrac{1}{x^2} \gg \dfrac{1}{x^3} \gg \ldots \gg \dfrac{1}{x^n}$. *Et donc par exemple* $2/x^3 = o\left(1/x\right)$ *puisque le rapport des deux expressions, qui vaut* $2/x^2$, *tend vers 0 quand* x *tend vers l'infini.*

Remarque Pour deux entiers naturels $n > p$, dire qu'une fonction $u(x)$ est $O(x^n)$ au voisinage de 0 est une information plus précise que de dire simplement qu'elle est $o(x^p)$. En effet, l'information $O(x^n)$ indique précisément l'ordre de grandeur de $u(x)$, tandis que l'information $o(x^p)$ indique seulement que $u(x)$ est négligeable devant x^p au voisinage de 0, mais sans que l'on sache si $u(x)$ se comporte comme x^{p+1}, x^{2p}, $\sqrt{|x|}\, x^p$ ou encore tout autre chose.

4.2.2 Règles de calcul

En manipulant les développements limités, qui seront introduits au §4.3, on sera amené à réaliser des opérations simples entre notations de Landau : addition, soustraction, multiplication par un réel, par un monôme x^n, ou par un autre petit o ou grand O. Ces opérations sont très simples si on les réalise en revenant aux définitions de petit o et grand O. Toutefois, faire cela est un peu long. Il est donc utile pour être plus efficace de prendre l'habitude de ces notations, et des règles de calcul auxquelles elles mènent. Celles-ci peuvent paraître assez particulières, mais elles relèvent en fait du simple bon sens. On les expose ci-dessous, en se plaçant systématiquement au voisinage de 0 : ce sera évidemment identique au voisinage d'un point x_0 quelconque en remplaçant x par $x - x_0$, et au voisinage de l'infini en remplaçant x par $1/x$. Les démonstrations étant assez simples, on ne les indique pas toutes.

Multiplication par un réel non nul Soit λ un réel non nul et p un entier naturel. On a alors les règles de calcul :

$$\lambda\, o(x^p) = o(x^p) \qquad \text{et} \qquad \lambda\, O(x^p) = O(x^p)$$

Démonstration *Une telle écriture peut sembler un peu déroutante à première vue. En effet, avec des règles de calcul usuelles, dire que $2\,o(x^p) = o(x^p)$ impliquerait immédiatement par différence que $o(x^p) = 0$. Or ce n'est pas le cas ici. Cette apparente contradiction vient du fait que l'égalité $\lambda\, o(x^p) = o(x^p)$ est simplement une notation symbolique (un raccourci) pour exprimer le résultat suivant :* "si la fonction $u(x)$ est petit o de x^p au voisinage de 0, alors la fonction $\lambda\, u(x)$ est aussi petit o de x^p au voisinage de 0."

La démonstration est très simple. Soit $u(x)$ une fonction qui est $o(x^p)$ au voisinage de 0. On a donc : $u(x) = x^p\, \varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. D'où $\lambda\, u(x) = \lambda\, x^p\, \varepsilon(x) = x^p\, \lambda\, \varepsilon(x) = x^p\, \varepsilon_2(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$ en posant $\varepsilon_2(x) = \lambda\, \varepsilon(x)$. Donc $\lambda\, u(x)$ est $o(x^p)$ au voisinage de 0.

La démonstration est similaire pour la seconde relation. Soit $u(x)$ une fonction qui est $O(x^p)$ au voisinage de 0. Il existe donc un voisinage V de 0 et deux constantes $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$ telles que : $c_1|x^p| \leq |u(x)| \leq c_2|x^p|$ pour tout $x \in V$. On en déduit que $\forall x \in V, \underbrace{|\lambda|\, c_1}_{c_1'} |x^p| \leq |\lambda\, u(x)| \leq \underbrace{|\lambda|\, c_2}_{c_2'} |x^p|$.

Donc $\lambda\, u(x)$ est $O(x^p)$ au voisinage de 0. □

Ces résultats sont en fait très logiques si l'on traduit les notations petit o et grand O en langage courant. En effet, une quantité négligeable devant x^p multipliée par un réel fini est encore une quantité négligeable devant x^p, et une quantité du même ordre de grandeur que x^p multipliée par un réel fini non nul est encore une quantité du même ordre de grandeur que x^p.

Enfin, notons que le cas particulier $\lambda = -1$ mène à : $-o(x^p) = o(x^p)$ et $-O(x^p) = O(x^p)$, ce qui a pour conséquence que la soustraction entre deux notations de Landau est en fait ramenée à une addition.

Addition / soustraction Soient p et n deux entiers naturels, avec $p < n$. On a les règles suivantes :

$$o(x^p) \pm o(x^n) = o(x^p) \quad O(x^p) \pm O(x^n) = O(x^p) \quad o(x^p) \pm O(x^n) = o(x^p) \quad O(x^p) \pm o(x^n) = O(x^p)$$

Démonstration *Là encore, il faut bien comprendre que ces relations sont des écritures purement symboliques. La première d'entre elle par exemple correspond en fait à l'assertion :* "si la fonction $u(x)$

est petit o de x^p au voisinage de 0, et si la fonction $v(x)$ est petit o de x^n au voisinage de 0, avec $p \leq n$, alors la fonction $u(x) \pm v(x)$ est petit o de x^p au voisinage de 0".
La démonstration est immédiate en revenant à la définition de chaque notion. $u(x)$ est petit o de x^p signifie que $u(x) = x^p\,\varepsilon_1(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$. $v(x)$ est petit o de x^n signifie que $v(x) = x^n\,\varepsilon_2(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$. Donc

$$u(x) \pm v(x) = x^p\,\varepsilon_1(x) \pm x^n\,\varepsilon_2(x) = x^p\,\underbrace{\left(\varepsilon_1(x) \pm x^{n-p}\,\varepsilon_2(x)\right)}_{\varepsilon(x)}$$

et $\varepsilon(x) \longrightarrow 0$ quand $x \longrightarrow 0$ car $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = \lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$, et car $\lim\limits_{x\to 0} x^{n-p} = 0$ pour $n - p > 0$.

Les démonstrations des autres règles sont tout aussi immédiates. □

Comme précédemment, ces règles sont très logiques si l'on traduit les notations petit o et grand O en langage courant, en utilisant le fait que, au voisinage de 0, $x^n \ll x^p$ si $p < n$. Par exemple, la règle $o(x^p) \pm O(x^n) = o(x^p)$ traduit simplement le fait qu'ajouter une quantité de l'ordre de x^n, donc négligeable devant x^p car $n > p$, à une autre quantité négligeable devant x^p aboutit à une quantité encore négligeable devant x^p.

Produit / division par un monôme Soient n et p deux entiers naturels. On a alors :

$$x^n\,o(x^p) = o(x^{n+p}) \qquad x^n\,O(x^p) = O(x^{n+p}) \qquad \frac{o(x^p)}{x^n} = o(x^{p-n}) \qquad \frac{O(x^p)}{x^n} = O(x^{p-n})$$

Démonstration *Il suffit à nouveau de revenir aux définitions de petit o et grand O. Si $u(x)$ est petit o de x^p, alors $u(x) = x^p\,\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. Donc $x^n\,u(x) = x^{n+p}\,\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. Donc $x^n\,u(x) = o(x^{n+p})$.*
De même, si une fonction $u(x)$ est $O(x^p)$ au voisinage de 0, il existe un voisinage V de 0 et deux constantes $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$ telles que $c_1|x^p| \leq |u(x)| \leq c_2|x^p|$ pour tout $x \in V$. On peut ré-écrire l'encadrement sous la forme $c_1|x^{n+p}| < |x^n\,u(x)| < c_2|x^{n+p}|$. Donc $x^n\,u(x)$ est $O(x^{n+p})$ au voisinage de 0.
Les démonstrations pour les divisions sont identiques (il suffit même en fait de considérer n entier relatif pour tout démontrer à la fois). □

Produit Soient n et p deux entiers naturels. On a alors :

$$o(x^n)\,o(x^p) = o(x^{n+p}) \qquad o(x^n)\,O(x^p) = o(x^{n+p}) \qquad O(x^n)\,O(x^p) = O(x^{n+p})$$

Démonstration *Si $u(x)$ est petit o de x^p et $v(x)$ est petit o de x^n, alors $u(x) = x^p\,\varepsilon_1(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$ et $v(x) = x^n\,\varepsilon_2(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$. Donc $u(x)\,v(x) = x^{n+p}\,\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) = \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x) \longrightarrow 0$ quand $x \longrightarrow 0$. Donc $u(x)\,v(x) = o(x^{n+p})$.*

De même, si $u(x)$ est $O(x^p)$ au voisinage de 0, il existe un voisinage V de 0 et deux constantes $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$ telles que $c_1|x^p| \leq |u(x)| \leq c_2|x^p|$ pour tout $x \in V$. Si $v(x)$ est $O(x^n)$ au voisinage de 0, il existe un voisinage V' de 0 et deux constantes $c'_1 > 0$ et $c'_2 > 0$ telles que $c'_1|x^n| \leq |v(x)| \leq c'_2|x^n|$ pour tout $x \in V'$. En posant $W = V \cap V'$, on a donc $c_1\,c'_1|x^{n+p}| \leq |u(x)\,v(x)| \leq c_2\,c'_2|x^{n+p}|$ pour tout $x \in W$. Donc $u(x)\,v(x) = O(x^{n+p})$. □

En résumé Soient n et p deux entiers naturels. On a, au voisinage de 0 :

$\forall\lambda \in \mathbb{R}^*$,	$\lambda\, o(x^p) = o(x^p)$	$\lambda\, O(x^p) = O(x^p)$	$o(x^p) + O(x^p) = O(x^p)$
Pour $p < n$	$o(x^p) \pm o(x^n) = o(x^p)$ $o(x^p) \pm O(x^n) = o(x^p)$	$O(x^p) \pm O(x^n) = O(x^p)$ $O(x^p) \pm o(x^n) = O(x^p)$	
	$x^n\, o(x^p) = o(x^{n+p})$ $\dfrac{o(x^p)}{x^n} = o(x^{p-n})$	$x^n\, O(x^p) = O(x^{n+p})$ $\dfrac{O(x^p)}{x^n} = O(x^{p-n})$	
	$o(x^n)\, o(x^p) = o(x^{n+p})$	$o(x^n)\, O(x^p) = o(x^{n+p})$	$O(x^n)\, O(x^p) = O(x^{n+p})$

4.3 Développements limités - Formule de Taylor-Young

4.3.1 Définition et unicité du développement limité

Définition Soit une fonction f à valeurs réelles, définie dans un voisinage de x_0. f admet un **développement limité (DL) à l'ordre n au voisinage de x_0** si et seulement si il existe des réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tels que

$$f(x) = a_0 + a_1\,(x - x_0) + a_2\,(x - x_0)^2 + \cdots + a_n\,(x - x_0)^n + o\left((x - x_0)^n\right)$$

dans un voisinage de x_0.
La partie polynomiale du DL est appelée **partie régulière** du DL.
L'écart entre f et la partie régulière $f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k\,(x - x_0)^k = o\left((x - x_0)^n\right)$ est appelé **erreur d'approximation à l'ordre n**, ou encore **reste du DL à l'ordre n**.

Exemple *On sait (somme des termes d'une suite géométrique) que* $1 + x + x^2 = \dfrac{1 - x^3}{1 - x}$*. D'où :*

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{1-x} \\ &= 1 + x + x^2 + x^2\,\frac{x}{1-x} \\ &= 1 + x + x^2 + o(x^2) \quad \text{au voisinage de 0, car } \lim_{x\to 0} \frac{x}{1-x} = 0 \end{aligned}$$

On vient donc d'obtenir un développement limité de $\dfrac{1}{1-x}$ *à l'ordre 2 au voisinage de 0.*

Théorème Si f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0, alors il est unique.

Démonstration On va démontrer cette propriété pour $x_0 = 0$. On en déduit ensuite le résultat général par un simple changement de variable $X = x - x_0$.

Raisonnons par l'absurde, en supposant que f admet deux DL d'ordre n au voisinage de 0. On a donc :

$$\begin{aligned} f(x) &= P_1(x) + x^n\,\varepsilon_1(x) && \text{avec } P_1 \text{ polynôme de degré } \leq n \text{ et } \lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0 \\ &= P_2(x) + x^n\,\varepsilon_2(x) && \text{avec } P_2 \text{ polynôme de degré } \leq n \text{ et } \lim_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0 \end{aligned}$$

$P_1 - P_2$ étant un polynôme de degré $\leq n$, $\dfrac{P_1(x) - P_2(x)}{x^n}$ est donc de la forme $c_0 + \dfrac{c_1}{x} + \ldots + \dfrac{c_n}{x^n}$.
Or $\dfrac{P_1(x) - P_2(x)}{x^n} = \varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)$, et tend donc vers 0 quand x tend vers 0. La seule possibilité pour cela est donc que $c_0 = c_1 = \ldots = c_n = 0$. Donc $P_1 = P_2$. Et donc $\varepsilon_1(x) = \varepsilon_2(x) \quad \forall x$.
Les deux DL sont égaux. □

4.3.2 Formule de Taylor-Young

Théorème Soit f une application définie sur un intervalle ouvert I, et $x_0 \in I$. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur I et que $f^{(n)}(x_0)$ existe. Alors, pour tout $x \in I$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + (x - x_0)\, f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2}\, f''(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!}\, f^{(n)}(x_0) + o\left((x - x_0)^n\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(x - x_0)^k}{k!}\, f^{(k)}(x_0) + o\left((x - x_0)^n\right) \end{aligned}$$

Il s'agit de la **formule de Taylor-Young à l'ordre n en x_0**. Elle établit donc que, sous les hypothèses du théorème, la partie régulière du DL est égale au polynôme de Taylor vu au §4.1.

Remarque Il ne s'agit pas d'une équivalence : pour $n \geq 2$, une fonction peut admettre un DL à l'ordre n en x_0 sans que $f^{(n)}(x_0)$ existe.

Exemple *On considère la fonction* $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

On a $f(x) = x^2 \underbrace{x \sin \frac{1}{x}}_{\varepsilon(x)}$ *avec* $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$. *Donc* $f(x) = o(x^2)$, *ce qui est son DL à l'ordre 2 au voisinage de 0.*
La dérivée de f, pour $x \neq 0$, est $f'(x) = 3x^2 \sin \dfrac{1}{x} - x \cos \dfrac{1}{x}$. *Elle peut être prolongée par continuité en $x = 0$ en posant $f'(0) = 0$. Donc f est bien dérivable au voisinage de 0. Tentons maintenant de calculer $f''(0)$. On a :* $\dfrac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \dfrac{3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = 3x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}$. *Ce taux d'accroissement n'a pas de limite quand x tend vers 0 (à cause du terme en $\cos$), donc $f''(0)$ n'existe pas.*
On a donc une fonction qui admet un DL à l'ordre 2 au voisinage de 0 sans que $f''(0)$ existe.

4.3.3 Parité et développement limité

Théorème Le DL d'une fonction paire ne comporte que des puissances paires. Le DL d'une fonction impaire ne comporte que des puissances impaires.

Démonstration Remarquons pour commencer que, par dérivation d'une fonction composée, on a $(f(-x))' = -f'(-x)$. Si f est paire, alors $f(-x) = f(x)\ \forall x \in \mathcal{D}_f$, et donc $(f(-x))' = (f(x))' = f'(x)$. En combinant les deux relations, on en déduit que $-f'(-x) = f'(x)$, c'est-à-dire $f'(-x) = -f'(x)$: f' est donc impaire. Et on démontre de même que si f est impaire, alors f' est paire.
Pour une fonction paire, sa dérivée première, et par récurrence toutes ses dérivées d'ordre impair, sont donc des fonctions impaires. Pour une fonction impaire, la fonction elle-même, et par récurrence toutes

ses dérivées d'ordre pair, sont donc des fonctions impaires.
Or une fonction impaire définie en $x = 0$ y vaut 0 (car $f(0) = -f(-0) = -f(0)$). Donc le DL d'une fonction paire ne comporte que des termes d'ordre pair (car tous les $f^{2n+1}(0)$ sont nuls), et le DL d'une fonction impaire ne comporte que des termes d'ordre impair (car tous les $f^{2n}(0)$ sont nuls). □

4.4 Développements limités usuels

Les développements limités qui suivent sont obtenus en appliquant la formule de Taylor-Young à des fonctions usuelles. Ils sont écrits au voisinage de 0. Pour les obtenir au voisinage d'un point x_0 quelconque, il suffit de réaliser le changement de variable $x \longrightarrow x - x_0$.
De plus, les fonctions considérées ici étant de classe $\mathcal{C}^\infty$, elles possèdent un DL à n'importe quel ordre. On connait donc en fait parfaitement l'ordre de grandeur du reste, et on peut ainsi si on le souhaite écrire ce reste non pas comme un petit o, mais comme un grand O, ce qui est une information plus précise (voir la remarque à ce sujet au §4.2.1).

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \qquad (\text{ou } O(x^{n+1})\ )$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \qquad (\text{ou } O(x^{2n+2})\ )$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \qquad (\text{ou } O(x^{2n+3})\ )$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \qquad (\text{ou } O(x^{2n+2})\ )$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \qquad (\text{ou } O(x^{2n+3})\ )$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5) \qquad (\text{ou } O(x^7)\ )$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!} + \cdots + \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!} + o(x^n) \qquad (\text{ou } O(x^{n+1})\ )$$

d'où :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2) \qquad (\text{ou } O(x^3)\ )$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) \qquad (\text{ou } O(x^{n+1})\ )$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) \qquad (\text{ou } O(x^{n+1})\ )$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) \qquad (\text{ou } O(x^{n+1})\ )$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n) \qquad (\text{ou } O(x^{n+1})\ )$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}) \qquad (\text{ou } O(x^{2n+3})\ )$$

Les développements limités précédents sont fondamentaux. En effet, en pratique, le DL d'une fonction f sera obtenu à partir de ces DL de fonctions usuelles, et non pas en calculant les dérivées successives de f et en utilisant la formule de Taylor-Young. C'est ce que nous allons voir dans les §4.5 et 4.6.

4.5 Opérations sur les développements limités

Linéarité Si les fonctions f et g admettent chacune un DL à l'ordre n au voisinage de x_0, alors toute combinaison linéaire de f et g admet un DL à l'ordre n au voisinage de x_0, et celui-ci est égal à la combinaison linéaire des DL de f et g.

Autrement dit, de façon symbolique : $\mathrm{DL}(\alpha f + \beta g) = \alpha\,\mathrm{DL}(f) + \beta\,\mathrm{DL}(g)$

Exemple *On souhaite étudier de façon assez précise le comportement au voisinage de 0 de la fonction* $f(x) = e^x - 1 - \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\tan x$. *On va pour cela calculer un développement limité de f au voisinage de 0.*

En remplaçant les fonctions exponentielle, sinus et tangente par leurs DL à l'ordre 3, on a donc :

$$f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)$$

f se comporte donc, au voisinage immédiat de 0, comme la parabole $x^2/2$, ou si l'on veut être plus précis, comme la fonction $x^2/2 + x^3/12$.

Produit Si les fonctions f et g admettent chacune un DL à l'ordre n au voisinage de x_0, alors le produit $f\,g$ admet un DL à l'ordre n au voisinage de x_0, et sa partie régulière est égale au produit tronqué à l'ordre n des parties régulières de f et g.

Exemple *On considère la fonction $f(x) = \cos x \,\ln(1+x)$ au voisinage de 0, et on va chercher son DL par exemple à l'ordre 3.*

Pour cela, on utilise le DL à l'ordre 3 de chaque terme du produit. D'où :

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - \frac{x^3}{2} + o(x^3) \\ &= x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \end{aligned}$$

Il n'est pas nécessaire d'écrire les termes de degré supérieur à l'ordre choisi au départ, car ils seront de toute façon négligés à la fin. Ainsi par exemple, si l'on reprenait le calcul précédent en écrivant tous les termes, on obtiendrait :

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{6} + o(x^5) \; + o(x^4) + o(x^5) + o(x^6) + o(x^6) \\ &= x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \end{aligned}$$

ce qui complique l'écriture et fait perdre du temps, mais ne change pas le résultat final.

Composition Si les fonctions f et g admettent chacune un DL à l'ordre n au voisinage de 0 et si $f(0) = 0$, alors $g \circ f$ admet un DL à l'ordre n au voisinage de 0, obtenu en écrivant le DL de g, en y substituant la variable x par le DL de $f(x)$, et en tronquant l'expression obtenue à l'ordre n.

Exemple *On cherche le DL à l'ordre 4 de $z(x) = \ln(\cos x)$ au voisinage de 0.*

On peut écrire $z(x) = \ln(1 + (\cos x - 1))$. On a ainsi $z = g \circ f$, avec $f(x) = cos(x) - 1$ (qui satisfait bien la condition $f(0) = 0$) et $g(X) = \ln(1+X)$. On écrit a priori le DL de g à l'ordre 4 au voisinage de 0 : $\ln(1 + X) = X - \dfrac{X^2}{2} + \dfrac{X^3}{3} - \dfrac{X^4}{4} + o(X^4)$, et on remplace X par le DL à l'ordre 4 au voisinage de 0 de $\cos x - 1 = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^4)$. En tronquant tous les termes au-delà de l'ordre 4, il reste :

$$\ln(\cos x) = \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 + o(x^4) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$$

L'hypothèse $f(0) = 0$ est absolument fondamentale. Une erreur fréquente consiste à l'oublier, et on peut alors écrire n'importe quoi. Considérons par exemple $h(x) = \ln(2 + x)$. Son DL à l'ordre 1 en 0 peut être obtenu en écrivant :

$$h(x) = \ln(2 + x) = \ln\left(2\left(1 + \frac{x}{2}\right)\right) = \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right) = \ln 2 + \frac{x}{2} + o(x)$$

Si par contre on écrit $\ln(2 + x) = \ln(1 + (1 + x))$ et qu'on utilise le DL $\ln(1 + u) = u + o(u)$ au voisinage de 0 en oubliant que, quand x est au voisinage de 0, $u = 1+x$ <u>ne l'est pas</u>, on obtient alors : $\ln(2 + x) = (1 + x) + o(1 + x)$. En toute rigueur $o(1 + x) = o(1)$ et donc il faut tronquer à l'ordre 0 : $\ln(2 + x) = 1 + o(1)$ qui est visiblement totalement faux, puisque l'on ne retrouve même pas la bonne valeur $\ln 2$ en $x = 0$.

Quotient Si les fonctions f et g admettent chacune un DL à l'ordre n au voisinage de x_0, et si $g(x_0) \neq 0$, alors le quotient f/g admet un DL à l'ordre n au voisinage de x_0.

Ce DL peut être obtenu par une technique (un peu laborieuse) appelée "division suivant les puissances croissantes" que l'on ne va pas expliciter ici, ou (c'est souvent plus simple) en calculant le DL de $1/g$ (grâce au DL de $1/(1 - x)$) et en le multipliant par le DL de f.

Exemple *Cherchons le DL à l'ordre 3 de $\tan x$ au voisinage de 0 à partir du quotient $\sin x/\cos x$. On a : $\dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{1}{1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)} = 1 + \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)$. D'où :*

$$\tan x = \sin x \times \frac{1}{\cos x} = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{2} + o(x^3) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

On retrouve bien le DL déjà connu.

Si $g(x_0) = 0$, f/g peut également peut-être admettre un DL (d'ordre à préciser), mais c'est plus délicat. Prenons deux exemples :

- Etudions le comportement au voisinage de 0 de la fonction $f(x) = \dfrac{\sin x}{\ln(1+x)}$. En écrivant les DL des numérateur et dénominateur, on a :

$$f(x) = \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)} = \frac{x}{x}\,\frac{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)}$$

On est donc ramené à un calcul de quotient "standard", aboutissant à : $f(x) = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{4} + o(x^2)$.

- On cherche à étudier le comportement de $\operatorname{cotan} x = \cos x / \sin x$ au voisinage de 0. On peut pour cela partir des DL du numérateur et du dénominateur, comme précédemment. Pour $\dfrac{1}{\sin x}$, on va à nouveau mettre le premier terme en facteur :

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)} = \frac{1}{x}\,\frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)} = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)$$

D'où : $\dfrac{\cos x}{\sin x} = \left(1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\dfrac{1}{x}\left(1 + \dfrac{x^2}{6} + o(x^2)\right) = \dfrac{1}{x}\left(1 - \dfrac{x^2}{3} + o(x^2)\right)$

Soit finalement $\operatorname{cotan} x = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{3} + o(x)$. Il ne s'agit pas à proprement parler d'un DL (car la partie régulière n'est pas un polynôme), mais d'un **développement généralisé**. La non-existence d'un DL standard était bien sûr prévisible dans ce cas, puisque la fonction cotangente n'est pas définie en $x = 0$ mais tend vers l'infini.

Primitives Soit une fonction f admettant un DL à l'ordre n au voisinage de x_0 :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o\left((x - x_0)^n\right).$$

Soit F une primitive de f définie dans un voisinage de x_0. Alors F admet un DL à l'ordre $n+1$ au voisinage de x_0, donné par :

$$F(x) = F(x_0) + a_0(x - x_0) + a_1\frac{(x - x_0)^2}{2} + a_2\frac{(x - x_0)^3}{3} + \cdots + a_n\frac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1} + o\left((x - x_0)^{n+1}\right)$$

Pour $x_0 = 0$: $$F(x) = F(0) + a_0 x + a_1\frac{x^2}{2} + a_2\frac{x^3}{3} + \cdots + a_n\frac{x^{n+1}}{n+1} + o\left(x^{n+1}\right)$$

Exemple *Ce théorème est très utile pour obtenir le DL d'une fonction dont la dérivée a une expression plus simple. C'est ainsi par exemple qu'on a obtenu les DL de* $\ln(1+x)$ *et de* $\arctan x$ *dans le formulaire au* §4.4*, en intégrant les DL de leurs dérivées :*

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) \quad \textit{d'où} \ \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n+1}) \quad \textit{d'où} \ \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

Dérivées Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur un intervalle ouvert I, et $x_0 \in I$. On suppose de plus que $f^{(n)}(x_0)$ existe. Alors f' admet un DL à l'ordre $(n-1)$ au voisinage de x_0, dont la partie régulière est la dérivée de celle de f.

Exemple *Reprenons la fonction $z(x) = \ln(\cos x)$ rencontrée dans l'exemple sur la composition de DL. $z(x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, et vérifie donc les hypothèses du théorème précédent au voisinage de $x_0 = 0$. On a vu auparavant que son DL à l'ordre 4 au voisinage de 0 est : $z(x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$. La dérivée de z est $z'(x) = -\tan x$. D'après le formulaire §4.4, son DL à l'ordre 3 au voisinage de 0 est $-\tan x = -x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, dont la partie régulière est bien en effet la dérivée de celle de $z(x)$.*

Les hypothèses de ce théorème sont plus restrictives que celles du théorème sur les primitives d'un DL. On ne s'est pas contenté cette fois de supposer que f admet un DL à l'ordre n, mais on a émis des hypothèses supplémentaires sur l'existence des dérivées successives de f. Ces hypothèses, qui sont en fait les mêmes que celles permettant d'établir la formule de Taylor-Young (§4.3.2), sont bien sûr nécessaires.

Exemple *Reprenons l'exemple du §4.3.2 :* $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

On a vu que cette fonction admet le DL à l'ordre 2 en 0 : $f(x) = o(x^2)$, mais que $f''(0)$ n'existe pas. Si le théorème de dérivation précédent s'appliquait, on devrait avoir $f'(x) = o(x)$ au voisinage de 0. Or ce n'est pas le cas : $f'(x) = x\,\eta(x)$ avec $\eta(x) = 3x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$, et l'on voit que $\eta(x)$ ne tend pas vers 0 quand x tend vers 0, car le terme en $\cos$ n'a pas de limite.

4.6 Extension en $\pm\infty$: développement asymptotique

4.6.1 Principe général

On a vu que la connaissance des DL au voisinage de 0 permet de calculer un DL au voisinage de x_0 quelconque par le simple changement de variable $X = x - x_0$. De même, si l'on cherche à approcher une fonction $f(x)$ quand $x \to \pm\infty$, le changement de variable $X = 1/x$ permet de se ramener au cas $X = 0$. On parle alors de **développement asymptotique**.

Exemple *Intéressons-nous au comportement de la fonction $f(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$ quand x devient très grand. En factorisant numérateur et dénominateur par leur terme de plus haut degré, on fait apparaître la quantité infiniment petite $1/x$:*

$$\frac{x+2}{x^2-1} = \frac{x}{x^2}\,\frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x}\,\frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x^2}} = X\,\frac{1+2X}{1-X^2} \qquad \text{en posant } X = \frac{1}{x}$$

X étant au voisinage de 0, on peut faire le DL (ici par exemple à l'ordre 5) de cette expression :

$$\begin{aligned} X\,\frac{1+2X}{1-X^2} &= X\,(1+2X)\left(1+X^2+X^4+o(X^4)\right) \\ &= X\left(1+X^2+X^4+2X+2X^3+o(X^4)\right) \\ &= X+2X^2+X^3+2X^4+X^5+o(X^5) \end{aligned}$$

D'où finalement le DL asymptotique de f en $\pm\infty$:

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^4} + \frac{1}{x^5} + o\left(\frac{1}{x^5}\right)$$

4.6.2 Exemple : un calcul de limite en $+\infty$

On recherche $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x} - x$. Il s'agit a priori d'une forme indéterminée, du type $+\infty - \infty$.

On a : $\sqrt{x^2+x} = \sqrt{x^2\,(1+1/x)} = x\sqrt{1+1/x}$. x étant au voisinage de $+\infty$, $1/x$ est au voisinage de 0. On peut donc poser $X = 1/x$ et réaliser un DL en fonction de X :

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\frac{1}{x}} = \sqrt{1+X} \quad &= 1 + \frac{X}{2} - \frac{X^2}{8} + o(X^2)\\ &= 1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\end{aligned}$$

D'où $\sqrt{x^2+x} - x = x\sqrt{1+\dfrac{1}{x}} - x = x\left(1 + \dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{8x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right) - x = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{8x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
On en déduit que $\sqrt{x^2+x} - x$ tend vers $1/2$ par valeurs inférieures quand x tend vers $+\infty$.

4.6.3 Exemple : un calcul d'asymptote

On s'intéresse ici au comportement à l'infini de la fonction $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$.

On a : $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}} = \sqrt{\dfrac{x^2}{1-1/x}} = \dfrac{|x|}{\sqrt{1-1/x}}$. x étant au voisinage de l'infini, $1/x$ est au voisinage de 0. On peut donc poser $X = 1/x$ et réaliser un DL en fonction de X :

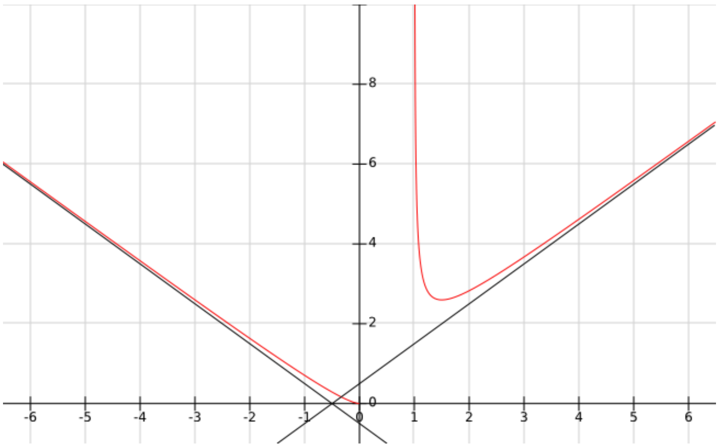
$$\frac{1}{\sqrt{1-1/x}} = \frac{1}{\sqrt{1-X}} = (1-X)^{-1/2} = 1 + \frac{X}{2} + \frac{3}{8}X^2 + o(X^2) = 1 + \frac{1}{2x} + \frac{3}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

D'où :

$$f(x) = \frac{|x|}{\sqrt{1-1/x}} = |x|\left(1 + \frac{1}{2x} + \frac{3}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = \begin{cases} x + \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{8x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{en } +\infty \\ -x - \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{8x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{en } -\infty \end{cases}$$

La courbe représentative de f admet donc :

- une asymptote d'équation $y = x + \dfrac{1}{2}$ en $+\infty$, la courbe de f étant située au-dessus de l'asymptote (car le terme principal, quand on fait la différence entre l'équation de f et l'équation de l'asymptote, vaut $3/8x$ et est donc positif en $+\infty$).
- une asymptote d'équation $y = -x - \dfrac{1}{2}$ en $-\infty$, la courbe de f étant située au-dessus de l'asymptote (car le terme principal, quand on fait la différence entre l'équation de f et l'équation de l'asymptote, vaut $-3/8x$ et est donc positif en $-\infty$).



Cette façon de calculer les asymptotes est en général beaucoup plus efficace que la méthodologie usuelle que vous connaissiez jusqu'à présent, rappelée au §F.2.1.

4.7 Formule de Taylor-Lagrange

La formule de Taylor-Young (§4.3.2) indique que le reste du DL est $o\left((x-x_0)^n\right)$, sans plus de précision. L'idée maintenant est de tenter d'obtenir une expression plus précise de ce reste, au prix bien sûr d'hypothèses un peu plus fortes sur la fonction.

Théorème *Formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n*

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle ouvert I, telle que $f^{(n+1)}$ existe sur I, et soit $x_0 \in I$. Alors, pour tout $x \in I$, il existe $c_x \in]x_0, x[$ tel que

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + (x-x_0)\, f'(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}\, f^{(n)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(c_x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!}\, f^{(k)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(c_x) \end{aligned}$$

Quelques remarques :

- Comme annoncé, cette formule de Taylor-Lagrange nécessite des hypothèses un peu plus fortes que celle de Taylor-Young (comparez avec §4.3.2)
- Le reste obtenu ici, $\dfrac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(c_x)$, est bien $o\left((x-x_0)^n\right)$, comme dans la formule de Taylor-Young : “qui peut le plus peut le moins”.
- Ce reste est en fait $O\left((x-x_0)^{n+1}\right)$, ce qui est une caractérisation plus précise que $o\left((x-x_0)^n\right)$.
- La formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 0 est en fait le théorème des accroissements finis (§3.3)

Cette formule de Taylor-Lagrange peut être démontrée par récurrence.

Conséquences pour les polynômes Tout polynôme est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On peut donc lui appliquer la formule de Taylor-Lagrange en tout point x_0 et à tout ordre. De plus, si on note n le degré d'un polynôme P, on a $P^{(n+1)} = 0$, ce qui signifie que l'erreur d'approximation dans la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n est nulle : la formule de Taylor-Lagrange est donc exacte. Elle fournit donc une expression alternative de P.

Soit P un polynôme de degré n et x_0 un nombre réel. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = P(x_0) + P'(x_0)\,(x-x_0) + \frac{P''(x_0)}{2}\,(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x-x_0)^n$$

En algèbre linéaire, ce résultat démontre que, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, la famille $\{1, (x-x_0), \dots, (x-x_0)^n\}$ engendre l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

4.8 Majoration de l'erreur d'approximation

On va chercher dans ce paragraphe à quantifier assez précisément l'erreur d'approximation pour garantir qu'un polynôme de Taylor fournit une estimation fiable de la fonction f. Par rapport à la formule de Taylor-Lagrange, on a besoin pour cela de supposer non pas seulement que $f^{(n+1)}$ existe sur I, mais aussi que $f^{(n+1)}$ est continue sur I ; autrement dit, on doit supposer que f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I.

Théorème Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle ouvert I, et soit $x_0 \in I$. L'erreur d'approximation du DL à l'ordre n au voisinage de x_0 est encadrée par

$$\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \min_{[x_0,x]} \left|f^{(n+1)}\right| \leq \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) \right| \leq \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \max_{[x_0,x]} \left|f^{(n+1)}\right|$$

Exemple *On souhaite déterminer une approximation polynomiale de la fonction e^x sur $[-1,1]$ correcte à 10^{-3} près. L'application de la formule de Taylor-Lagrange indique que*

$$\forall x \in [-1,1], \exists c_x \in]0,x[\text{ tel que } e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{c_x}$$

Si $x \in [-1,1]$, c_x également, et donc $e^{c_x} \leq e$. Donc $\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{c_x} \right| \leq \frac{e}{(n+1)!}$.
On veut contraindre l'erreur d'approximation à l'ordre n à demeurer inférieure à 10^{-3}.
Donc il suffit d'imposer $\frac{e}{(n+1)!} < 10^{-3}$, c'est-à-dire $(n+1)! > 10^3\, e = 2\,718,28...$
$n = 6$ convient ($7\,! = 5\,040$ et $6\,! = 720$). Et on a donc finalement l'assurance que :

$$\forall x \in [-1,1], \left| e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^6}{6!}\right) \right| \leq \frac{e}{7!} \simeq 5.4\ 10^{-4}$$

Remarque Pour terminer, indiquons qu'on peut même avoir l'expression analytique exacte de l'erreur d'approximation à l'ordre n dans le cas où f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$:

Théorème *Formule de Taylor avec reste intégral*

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle ouvert I, et soit $x_0 \in I$. Alors, pour tout $x \in I$:

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)\, f'(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$$

Cette formule peut permettre dans certains cas d'obtenir une majoration plus fine de l'erreur d'approximation que par le reste de Taylor-Lagrange. Pour le cas $n = 0$, cette formule se ramène juste à $f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\, dt$, ce qui est une banalité.

Chapitre 5

Généralités sur les équations différentielles

Définition Une **équation différentielle** est une équation reliant une fonction et ses dérivées successives. **L'inconnue est donc une fonction**. On peut l'écrire de façon très générale sous la forme $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, où $y(x)$ est la fonction inconnue.

Exemples *Voici des équations différentielles :*

- *la fonction $f(x)$ est l'inconnue :* $f'(x) + 2\,(f(x))^2 = -1$
- *la fonction $y(t)$ est l'inconnue :* $y''(t) + 2y'(t) + \sin(y(t)) = e^t$
- *la fonction $u(z)$ est l'inconnue :* $\left(u'(z)\right)^2 - \dfrac{1}{u'(z)} + 2\,u(z)\,e^{u(z)} = \cos z$

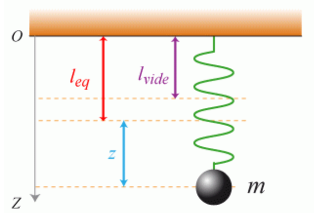
5.1 Quelques exemples

L'application des lois de la physique conduit très souvent à des équations différentielles, qu'il s'agisse de problèmes simples comme le mouvement d'un ressort ou l'intensité d'un courant électrique, ou de problèmes beaucoup plus complexes comme la modélisation de cellules vivantes ou du climat.

5.1.1 Exemple 1 : le ressort

On considère un ressort vertical, à l'extrémité duquel on place une masse m. On note :

- $z(t)$ l'*allongement* du ressort à l'instant t par rapport à sa position d'équilibre statique
- k la *constante de raideur* du ressort ($k > 0$)



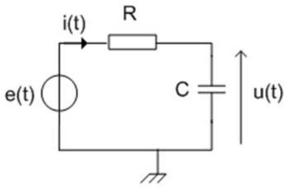
Les deux forces en présence sont la gravité et la force de rappel du ressort, qui est proportionnelle à l'allongement $z(t)$.

L'équation fondamentale de la dynamique s'écrit donc alors : $m\,z''(t) + kz(t) = 0$.
C'est une équation différentielle du deuxième ordre (car elle contient une dérivée seconde) à coefficients constants. On verra plus loin que ses solutions sont de la forme $z(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ avec $\omega = \sqrt{k/m}$, et où A et B sont des constantes.

Si l'on tient compte d'un éventuel frottement du ressort (proportionnel à sa vitesse), il faut ajouter un terme d'amortissement à l'équation, qui devient alors : $m\,z''(t) + \alpha\,z'(t) + kz(t) = 0$

5.1.2 Exemple 2 : un circuit électrique

On considère un circuit électrique de type RC (résistance et condensateur). On note :



- $i(t)$ l'intensité électrique à l'instant t
- $q(t)$ la quantité de charge, liée à l'intensité par la relation $i(t) = q'(t)$
- R et C les valeurs de la résistance et de la capacité

Le bilan des tensions aux bornes des composants dans le circuit s'écrit $e(t) = u_R(t) + u_C(t)$. Or $u_R(t) = Ri(t)$ et $u_C(t) = q(t)/C$. Le bilan s'écrit donc finalement sous forme d'une équation différentielle du premier ordre (car elle ne fait intervenir que la dérivée première) : $R\,q'(t) + \dfrac{q(t)}{C} = e(t)$

Si l'on ajoute une bobine d'inductance L dans le circuit, la tension à ses bornes est $u_L = L\,i'(t)$, et le bilan des tensions devient une équation différentielle d'ordre 2 : $L\,q''(t) + R\,q'(t) + \dfrac{q(t)}{C} = e(t)$

5.1.3 Exemple 3 : radioactivité

Le 26 avril 1986, le réacteur n°4 de la centrale nucléaire de Tchernobyl en Ukraine explose. Une très grande quantité d'éléments radioactifs, tel que l'iode 131, est alors libérée dans l'atmosphère. Si l'on note $N(t)$ le nombre de noyaux d'iode 131 présents au jour t, le principe physique de la radioactivité est que la dérivée $N'(t)$ est proportionnelle à la quantité de matière radioactive $N(t)$, soit l'équation :

$$N'(t) = -\lambda\,N(t) \qquad \text{avec } \lambda = 8,5\ 10^{-2}\ \text{jour}^{-1} \text{ pour l'iode 131}$$

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1, dont les solutions sont $N(t) = C\,e^{-\lambda t}$ où $C \in \mathbb{R}$.

A Tchernobyl, au temps $t = 0$ de l'explosion, il y a eu de l'ordre de $2\ 10^{20}$ particules d'iode 131 dispersées. On sait donc que $N(0) = 2\ 10^{20}$; or $N(0) = C$ et donc $N(t) = 2\ 10^{20}\ e^{-8,5\,10^{-2}t}$ est l'unique solution de l'équation différentielle avec la condition initiale $N(0)$ donnée.

La demi-vie de l'iode 131 est définie comme le temps nécessaire pour la désintégration de la moitié des particules émises au temps $t = 0$. Vous pouvez vérifier qu'il a fallu environ 8 jours pour que la moitié des particules se désintègrent. A titre de comparaison la demi-vie du plutonium (présent aussi lors de l'explosion de la centrale) est lui de $24\,110$ ans.

5.2 Les notions de base

5.2.1 Plusieurs écritures d'une même équation différentielle

Comme on l'a vu dans les exemples ci-dessus, les symboles utilisés pour la fonction inconnue et pour la variable dont elle dépend peuvent varier. Une même équation différentielle peut donc être écrite de plusieurs façons, comme c'est le cas ci-dessous :

$$\begin{aligned}
&f''(x) + (x^2-1)(f(x)^2-1) = \sin(2x+1)\\
&f'' + (x^2-1)(f^2-1) = \sin(2x+1)\\
&f^{(2)}(t) + (t^2-1)(f(t)^2-1) = \sin(2t+1)\\
&y^{(2)} + (x^2-1)(y^2-1) = \sin(2x+1)
\end{aligned}$$

Même si l'écriture d'une équation différentielle ne comporte que des inconnues en f ou en y comme par exemple dans l'équation $y' + 3y = 0$, l'inconnue y est bien une fonction, et dépend donc d'une variable.

5.2.2 Le vocabulaire pour classifier les équations différentielles

Le vocabulaire qui suit va permettre de distinguer différents types d'équations différentielles. Il est indispensable de le maîtriser, car **la méthode de résolution va dépendre du type d'équation**.

Les éléments indispensables à reconnaître sur une équation différentielle sont les suivants :

- trouver son **ordre**
- déterminer si elle est **linéaire** ou pas
- déterminer si elle est **homogène** ou non, et donc identifier le **second membre**
- si l'équation n'est pas homogène, formuler son **équation homogène associée**
- voir si elle comporte des conditions initiales ou aux limites

Définition L'**ordre** d'une équation différentielle est le plus haut degré de dérivation présent dans l'équation.

Exemples https://www.youtube.com/watch?v=dcFRgoZefaI

- *l'équation différentielle* $y^{(3)}(t) - 2y^2(t)\,y'(t) + y(t) = \cos t$ *est d'ordre 3.*
  Rappel : $y^{(3)}$ *désigne la dérivée troisième de la fonction* $y(t)$*, alors que* y^3 *désigne sa puissance troisième.*
- *l'équation différentielle* $y^2(t)\,y'(t) + t\,y(t) = e^t$ *est d'ordre 1 (et non pas d'ordre 2 : c'est l'ordre de dérivation qui compte, pas le terme* y^2*).*

Définition Soit (E) une équation différentielle. On appelle **second membre de (E)** l'ensemble des termes de (E) dans lesquels la fonction inconnue ne figure pas. On les place en général du côté droit de l'égalité, d'où l'appellation "second membre".

Exemples https://www.youtube.com/watch?v=gAJ1LJYxSQM

L'équation $y'(t)\,y^2(t) - 2t\,e^t + y''(t)\,(y(t) - 1) + 1/t = 0$ *peut être réécrite comme* $y'(t)\,y^2(t) + y''(t)\,(y(t) - 1) = 2t\,e^t - 1/t$ *et le second membre de l'équation est donc* $2t\,e^t - 1/t$.

De même, l'équation $f''(t) + (t^2 - 1)(f^2(t) - 1) = 0$*, contrairement à ce qu'on pourrait penser en allant un peu vite, a un second membre. En effet, en développant le produit, on voit qu'un terme ne dépend pas de* f*. Ce qui donne finalement :* $f''(t) + (t^2 - 1)f^2(t) = t^2 - 1$

Définition Soit (E) une équation différentielle. Si son second membre est égal à zéro, alors on dit que cette équation est **homogène**.

Définition Soit (E) une équation différentielle non homogène. On appelle **équation homogène associée à (E)** l'équation différentielle notée (E_0) obtenue en remplaçant le second membre de (E) par 0.

On peut remarquer que la fonction nulle ($y(t) = 0$ pour tout t) en est forcément une solution.

Exemples https://www.youtube.com/watch?v=XCIRUyo2dDo

- *L'équation* $y^{(3)}(t) - 2y^2(t)\,y'(t) + y(t) = \cos t$ *n'est pas homogène, son équation homogène associée est* $y_0^{(3)}(t) - 2y_0^2(t)\,y_0'(t) + y_0(t) = 0$
- *L'équation* $y^2(t)\,y'(t) + t\,y(t) = e^t$ *n'est pas homogène, son équation homogène associée est* $y_0^2(t)\,y_0'(t) + t\,y_0(t) = 0$

Définition Soit (E) une équation différentielle et (E_0) son équation homogène associée. (E) est **linéaire** si et seulement si les solutions de (E_0) sont stables par combinaison linéaire. Autrement dit, si y_0 et z_0 sont deux solutions de (E_0), alors $\lambda\, y_0 + \mu\, z_0$ est également solution de (E_0), $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Sinon (E) est dite **non linéaire**.

Cette définition revient à dire que l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène (E_0) est stable par combinaison linéaire. Cet ensemble de solutions forme donc un espace vectoriel : on y reviendra plus loin.

Une caractérisation est la suivante : une équation différentielle (E) de la fonction y est linéaire si et seulement si (E_0) est une combinaison linéaire de y_0 et de ses dérivées.
Autrement dit : (E) est de la forme $c_n(t)y^{(n)}(t) + \ldots + c_1(t)y'(t) + c_0(t)y(t) = d(t)$ où les fonctions $c_n(t), \ldots, c_0(t), d(t)$ ne dépendent pas de y.

Exemples `https://www.youtube.com/watch?v=mBjD3P9auhQ`

- $y''(t) - 3t^2\, y'(t) + \sqrt{t}\ \ y(t) \ = \ \sin t$ *Son équation homogène associée est* (E_0) $y_0''(t) - 3t^2\, y_0'(t) + \sqrt{t}\ y_0(t) = 0$. (E_0) *est une combinaison linéaire de* y_0, y_0' *et* y_0'', *donc l'équation est linéaire.*
- $y'(t) + y^2(t) = t$ *Son équation homogène associée est* (E_0) $y_0'(t) + y_0^2(t) = 0$. (E_0) *n'est pas une combinaison linéaire de* y_0 *et* y_0' *(mais de* y_0^2 *et* y_0'*). L'équation est donc non linéaire, et l'on voit que cette propriété provient du terme en* $y^2(t)$.

Théorème Les équations différentielles linéaires d'ordre 1 sont les équations de la forme
$a(t)\, y'(t) + b(t)\, y(t) = c(t)$ où $a(t), b(t), c(t)$ sont des fonctions quelconques (n'impliquant pas y).

Conditions initiales ou aux limites En général, une équation différentielle admet une infinité de solutions, qui font intervenir des constantes arbitraires. Dans certains cas, le problème est précisé en indiquant la valeur de la fonction recherchée en un (ou plusieurs) point(s) connu(s). Si la fonction dépend du temps t et que l'on précise une ou plusieurs conditions à l'instant initial $t = 0$, on parle alors de **problème aux conditions initiales**. Si la fonction dépend d'une variable d'espace x et que l'on précise une ou plusieurs conditions sur l'une (ou les deux) extrémité(s) de l'intervalle de définition, on parle alors de **problème aux conditions aux limites**.

Exemples

- $\left\{ \begin{array}{ll} y'(t) = 3\, y(t) & t > 0 \\ y(0) = 2 & \end{array} \right.$ *est un problème aux conditions initiales.*
- $\left\{ \begin{array}{ll} y''(x) + y(x) = 0 & x \in]0, \pi/2[\\ y(0) = 2 \text{ et } y(\pi/2) = 3 & \end{array} \right.$ *est un problème aux conditions aux limites.*

5.2.3 A ne pas oublier : l'étape de vérification

Vous allez résoudre des équations différentielles. A la fin de votre calcul, vous aurez trouvé toutes les solutions. N'oubliez pas l'étape de vérification ! Pour cela, il suffit de vérifier que l'expression que vous avez trouvée est bien solution de l'équation de départ.

Exemple *On verra que l'équation* $y'(x) - 3y(x) = 0$ *admet pour solution* $y(x) = Ke^{3x}$ *où* K *est un réel quelconque. Pour le vérifier, il suffit de calculer* y' : $y'(x) = 3Ke^{3x}$ *et de remplacer* y *et* y' *par leurs expressions dans l'équation. On obtient :* $y'(x) - 3y(x) = 3Ke^{3x} - 3(Ke^{3x}) = 0$. y *est bien solution.*

Chapitre 6

Equations différentielles linéaires d'ordre 1

Les équations différentielles linéaires d'ordre 1 sont les équations de la forme

$$a(x)\,y'(x) + b(x)\,y(x) = c(x) \qquad (E)$$

où $a(x), b(x), c(x)$ sont des fonctions quelconques (n'impliquant pas y). On va voir dans ce chapitre que l'ensemble des solutions d'une telle équation a une structure bien particulière, et comment obtenir l'expression de ces solutions.

6.1 Principe de superposition

On considère l'équation (E) ci-dessus sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ sur lequel la fonction $a(x)$ ne s'annule pas, et $a(x)$, $b(x)$ et $c(x)$ sont continues. En divisant par $a(x)$, on a une autre expression de l'équation :

$$y'(x) + \alpha(x)\,y(x) = \beta(x) \qquad (E) \qquad \text{avec } \alpha(x) = \frac{b(x)}{a(x)} \text{ et } \beta(x) = \frac{c(x)}{a(x)}$$

L'équation homogène associée à (E) est : $\quad y_0'(x) + \alpha(x)\,y_0(x) = 0 \qquad (E_0)$

Théorème *(principe de superposition)* Soit $y_p(x)$ une solution particulière de (E). Les solutions de (E) sont les fonctions $y(x) = y_p(x) + y_0(x)$, où y_0 désigne toutes les solutions de (E_0).

Autrement dit, l'ensemble des solutions de (E) sur l'intervalle I est $\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_0$, où $\mathcal{S}_0$ désigne l'ensemble des solutions de (E_0).

Démonstration :
$\Rightarrow$: Soit $y(t)$ une solution quelconque de (E). Alors $y(t) - p(t)$ est solution de (E_0). On la note y_0, et on a bien $y(t) = p(t) + y_0(t)$ où y_0 est solution de (E_0)
$\Leftarrow$: Soit $y_0(t)$ une solution quelconque de (E_0). Alors $p(t) + y_0(t)$ vérifie :

$$(p(t) + y_0(t))' + \alpha(t)\,(p(t) + y_0(t)) = p'(t) + \alpha(t)\,p(t) + y_0'(t) + \alpha(t)\,y_0(t) = 0 + \beta(t) = \beta(t)$$

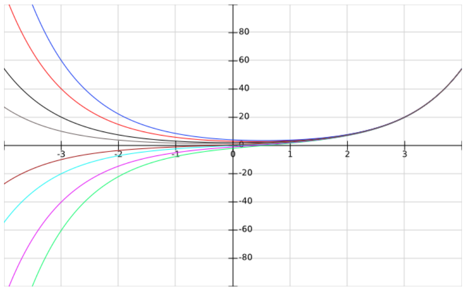
Donc $p(t) + y_0(t)$ est bien solution de (E).

Conséquence pratique : méthode de résolution La conséquence pratique du principe de superposition est que la résolution de l'équation différentielle (E) se fera en 3 temps :

1. on résout l'équation homogène associée (E_0) ;
2. on trouve une solution particulière $y_p(t)$ de (E) (on verra comment au §6.3) ;
3. avec le principe de superposition, on en déduit toutes les solutions de (E).

Exemple https://www.youtube.com/watch?v=V8MuiXgswQ4

On considère l'équation (E) : $y'(t) + y(t) = 2e^t$.



1. *L'équation homogène associée est* (E_0) : $y_0'(t) + y_0(t) = 0$. *En utilisant la méthode décrite à la section 6.2, on trouve* $y_0(t) = K\,e^{-t}$ *où* $K \in \mathbb{R}$.
2. *Une solution particulière assez évidente est* $y_p(t) = e^t$.
3. *D'après le principe de superposition, les solutions de* (E) *sont donc les fonctions* $y(t) = e^t + K\,e^{-t}$, *où* $K \in \mathbb{R}$.
   Des exemples ci-contre pour différentes valeurs de K.

Remarque Ce principe de superposition est valide en fait dès lors qu'on a une équation différentielle linéaire, quel que soit son ordre. On peut s'en convaincre aisément en reprenant la démonstration pour une équation d'ordre n quelconque.

6.2 Etape 1 : résolution de l'équation homogène associée

Nous allons nous concentrer ici sur la première étape de la résolution de (E), c'est-à-dire la résolution, sur un intervalle I, de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 :

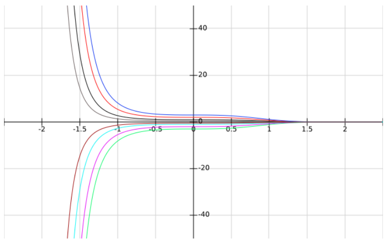
$$y_0'(x) + \alpha(x)\,y_0(x) = 0 \qquad (E_0)$$

On peut remarquer tout de suite que si y_0 est solution de (E_0), alors la fonction $\lambda\,y_0$ est bien également solution pour tout réel λ (comme annoncé par la définition d'une équation différentielle linéaire). En particulier, en prenant $\lambda = 0$, on constate que la fonction nulle ($y_0(x) = 0 \quad \forall x \in I$) est bien sûr une solution.

Théorème Les solutions de (E_0) sur I sont les fonctions $y_0(x) = K\,e^{-A(x)}$, $K \in \mathbb{R}$, où $A(x)$ est une primitive de $\alpha(x)$.

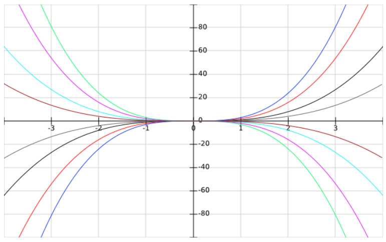
Démonstration : Soit $A(x)$ une primitive de $\alpha(x)$. En multipliant (E_0) par $e^{A(x)}$, on obtient :
$e^{A(x)}\,y_0'(x) + \alpha(x)\,e^{A(x)}\,y_0(x) = 0$, soit $e^{A(x)}\,y_0'(x) + \left(e^{A(x)}\right)'\,y_0(x) = 0$, soit $\left(e^{A(x)}\,y_0(x)\right)' = 0$.
Ce qui est équivalent à $e^{A(x)}\,y_0(x) = K$, $K \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire $y_0(x) = K\,e^{-A(x)}$, $K \in \mathbb{R}$. □

Exemples



- $y_0' + 3x^2\,y_0 = 0$ *On a ici* $\alpha(x) = 3x^2$. *D'où les solutions* $y_0(x) = K\,e^{-x^3}$, $K \in \mathbb{R}$.
  Des exemples ci-contre pour différentes valeurs de K.

- $x\,y_0' - 3\,y_0 = 0$ On résout cette équation sur un intervalle I ne contenant pas $x = 0$: $I =]-\infty; 0[$ ou $I =]0; +\infty[$. On transforme alors l'équation en : $y_0' - \dfrac{3}{x} y_0 = 0$, d'où $\alpha(x) = -3/x$, dont une primitive est $A(x) = -3 \ln|x| = -\ln|x|^3$. D'où finalement les solutions $y_0(x) = K\,|x|^3$, $K \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire $y_0(x) = K\,x^3$, $K \in \mathbb{R}$ puisque K balaie $\mathbb{R}$ et que $I =]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$.
  On a trouvé ici des solutions sur $]-\infty, 0[$ et des solutions sur $]0, +\infty[$: on reviendra au §6.4 sur la question de l'existence éventuelle de solutions sur $\mathbb{R}$.
  Des exemples ci-contre pour différentes valeurs de K.



Remarque Si $\alpha(x)$ est constant, une primitive est $A(x) = \alpha\,x$, et les solutions de $y_0'(x) + \alpha\,y_0(x) = 0$ sont les fonctions $y_0(x) = K e^{-\alpha\,x}$, $K \in \mathbb{R}$. On retrouve un résultat que vous connaissiez déjà.

Remarque L'ensemble des solutions de (E_0) sur l'intervalle I est $\mathcal{S}_0 = \left\{ K e^{-A(x)}, K \in \mathbb{R} \right\}$. D'un point de vue algébrique, il s'agit d'un espace vectoriel de dimension 1 (une droite vectorielle), engendré par la fonction $e^{-A(x)}$.

6.3 Etape 2 : détermination d'une solution particulière

On revient maintenant à l'équation avec second membre :

$$y'(x) + \alpha(x)\,y(x) = \beta(x) \qquad (E)$$

sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On a vu au § précédent comment obtenir les solutions de l'équation homogène associée (E_0). D'après le principe de superposition vu au §6.1, il suffit donc de déterminer une solution particulière y_p de (E) pour en trouver toutes les solutions. Deux techniques sont possibles pour cela.

6.3.1 Méthode par analogie

C'est la méthode la plus simple. Elle ne fonctionne pas systématiquement, mais cela vaut en général la peine de la tenter, dans la mesure où elle est très simple.

> Si le second membre $\beta(x)$ est un polynôme, ou une combinaison linéaire d'exponentielles, ou une combinaison linéaire de sinus et cosinus, et si $\alpha(x)$ est constant ou de même nature que $\beta(x)$, alors on peut chercher une solution particulière $y_p(x)$ sous une forme analogue à celle de $\beta(x)$.

Exemples https://www.youtube.com/watch?v=cjLLGAiiGI

- $y'(t) + 2\,y(t) = 2t^2 + 2t + 2$ *Le second membre est ici un polynôme de degré 2, et la fonction $\alpha(t)$ est une constante. On peut rechercher une solution particulière sous une forme analogue, c'est-à-dire $y_p(t) = at^2 + bt + c$. En insérant cette expression dans (E), on obtient $y_p' + 2y_p = 2at^2 + (2b + 2a)t + b + 2c$. En identifiant avec le second membre, on obtient $a = 1, b = 0, c = 1$. $y_p(t) = t^2 + 1$ est une solution particulière.*
- $y'(t) + t\,y(t) = 2t^2 - t + 2$ *On va cette fois rechercher une solution particulière sous forme d'un polynôme de degré 1, à cause du coefficient t devant $y(t)$. En insérant l'expression $y_p(t) = at + b$ dans (E), on obtient $y_p' + ty_p = at^2 + bt + a$. D'où $a = 2, b = -1$. $y_p(t) = 2t - 1$ est une solution particulière. Par contre, on voit aussi que si le coefficient de t^2 avait été différent du coefficient*

constant dans le second membre de l'équation, la méthode par analogie n'aurait pas permis de trouver une solution particulière.

- $y'(t) - 5y(t) = 3e^{2t} + 4e^{t}$ *Le second membre est une combinaison linéaire d'exponentielles et le coefficient $\alpha(t)$ est constant. On va donc rechercher une solution particulière sous la forme $y_p(t) = a\,e^{2t} + b\,e^{t}$. En injectant cette expression dans (E), on obtient $y_p' - 5y_p = -3a\,e^{2t} - 4b\,e^{t}$. D'où par identification $a = b = -1$. $y_p(t) = -e^{2t} - e^{t}$ est une solution particulière.*
- $y'(t) + 3y(t) = 7\cos t + \sin t$ *Le second membre est une combinaison linéaire de sinus et cosinus et le coefficient $\alpha(t)$ est constant. On va donc rechercher une solution particulière sous la forme $y_p(t) = a\cos t + b\sin t$. En injectant cette expression dans (E), on obtient $y_p' + 3y_p = (b+3a)\cos t + (3b-a)\sin t$. D'où par identification $a = 2, b = 1$. $y_p(t) = 2\cos t + \sin t$ est une solution particulière.*

6.3.2 Méthode de variation de la constante

Alors que la méthode par analogie est simple mais n'aboutit pas toujours à une solution particulière de l'équation différentielle étudiée, la **méthode de variation de la constante** permet d'en trouver une dans tous les cas. Elle est par contre plus complexe. Son principe est le suivant :

- On cherche a priori $y_p(x)$ sous la même forme que les solutions de l'équation homogène, mais en remplaçant la constante K par une fonction de x (d'où le nom de *variation de la constante*). Donc, avec les mêmes notations qu'au §6.2, on pose $y_p(x) = K(x)\,e^{-A(x)}$ où $A(x)$ est une primitive de $\alpha(x)$. Notre nouvelle fonction inconnue devient $K(x)$.
- La dérivée de y_p est alors
$$y_p'(x) = K'(x)\,e^{-A(x)} - A'(x)K(x)\,e^{-A(x)} = (K'(x) - \alpha(x)K(x))\,e^{-A(x)}$$
(car $A(x)$ est une primitive de $\alpha(x)$, autrement dit $A'(x) = \alpha(x)$). En remplaçant y_p et y_p' par leurs expressions dans (E), on obtient alors :
$$y_p'(x) + \alpha(x)\,y_p(x) = (K'(x) - \alpha(x)K(x))\,e^{-A(x)} + \alpha(x)\,K(x)\,e^{-A(x)} = \beta(x)$$
Les $\alpha(x)\,K(x)\,e^{-A(x)}$ se simplifient (si ce n'est pas le cas, c'est qu'il y a une erreur dans votre calcul), et il ne reste finalement que :
$$K'(x)\,e^{-A(x)} = \beta(x), \quad \text{soit} \quad K'(x) = \beta(x)\,e^{A(x)}.$$
- On en déduit donc $K(x)$ en intégrant $\beta(x)\,e^{A(x)}$, d'où la solution particulière $y_p(x) = K(x)\,e^{-A(x)}$.

Exemples https://www.youtube.com/watch?v=FHOJ9v1T5sc

- *On considère l'équation (E) : $y'(t) - \dfrac{3}{t}\,y(t) = t$ sur un intervalle I ne contenant pas 0.*

Les solutions de l'équation homogène associée (E_0) : $y_0'(t) - \dfrac{3}{t}\,y_0(t) = 0$ sont (voir l'exemple du §6.2) les fonctions $y_0(t) = K\,t^3$ avec $K \in \mathbb{R}$. On cherche maintenant une solution particulière de (E) par méthode de variation de la constante. On pose $y_p(t) = K(t)\,t^3$ et on insère cette expression dans (E). On obtient :
$$y_p'(t) - \frac{3}{t}\,y_p(t) = K'(t)\,t^3 = t \quad \Longrightarrow K'(t) = \frac{1}{t^2} \quad \Longrightarrow K(t) = -\frac{1}{t}$$
(inutile de se préoccuper de la constante d'intégration lorsqu'on intègre $K'(t)$, car on cherche juste une solution particulière). On a donc $y_p(t) = K(t)\,t^3 = -t^2$. Finalement, les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $y(t) = -t^2 + K\,t^3$ avec $K \in \mathbb{R}$

- *Soit l'équation* $(E): \quad t\,y'(t) + y(t) = \dfrac{4}{1+2t}$ *sur un intervalle* I *ne contenant pas 0. Son équation homogène associée est* $(E_0): \quad t\,y_0'(t) + y_0(t) = 0$, *dont les solutions sont* $y_0(t) = \dfrac{K}{t}$ *avec* $K \in \mathbb{R}$. *On cherche maintenant une solution particulière de* (E) *par méthode de variation de la constante. On pose* $y_p(t) = K(t)\,\dfrac{1}{t}$ *et on insère cette expression dans* (E). *On obtient :*

$$t\,y_p'(t) + y_p(t) = t\,K'(t)\,\frac{1}{t} = \frac{4}{1+2t} \quad \Longrightarrow K'(t) = \frac{4}{1+2t} \quad \Longrightarrow K(t) = 2\,\ln|1+2t|$$

D'où $y_p(t) = \dfrac{2}{t}\,\ln|1+2t|$. *Les solutions de* (E) *sont les fonctions* $y(t) = \dfrac{2}{t}\,\ln|1+2t| + \dfrac{K}{t}$ *avec* $K \in \mathbb{R}$.

Remarque L'ensemble des solutions de (E) sur I est $\mathcal{S} = \left\{\, y_p + Ke^{-A(x)}\,,\ K \in \mathbb{R}\right\}$. D'un point de vue algébrique, il s'agit d'un espace affine de dimension 1 (une droite affine).

6.4 Raccord de solutions

On a vu précédemment qu'on peut être amené à résoudre une équation différentielle non pas sur $\mathbb{R}$ mais sur différents intervalles. Ainsi on a résolu l'équation

$$a(x)\,y'(x) + b(x)\,y(x) = c(x) \qquad (E)$$

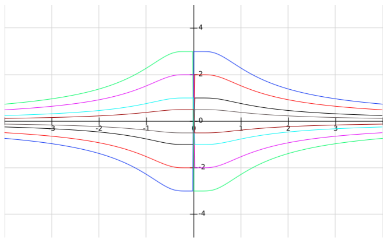
sur des intervalles sur chacun desquels la fonction $a(x)$ ne s'annule pas. Au-delà de ces résultats, il est légitime de se demander s'il existe aussi des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ tout entier, c'est-à-dire des **fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ satisfaisant (E) en tout point $x \in \mathbb{R}$**.

Si une telle solution globale existe, elle coïncidera sur chaque intervalle étudié avec une des solutions déjà trouvées sur cet intervalle. Le seul problème est donc en fait le comportement de la solution globale aux points de raccord entre les intervalles. En un tel point, il faut se demander si l'on peut raccorder de façon continue et dérivable au moins l'une des solutions de l'intervalle de gauche avec au moins l'une des solutions de l'intervalle de droite.

Exemples

- $(E) \quad x^2\sinh(2/x)y' + 2y = 0$ *Le coefficient devant* y' *n'étant pas défini en* $x = 0$, *on résout cette équation sur* $]-\infty, 0[$ *et sur* $]0, +\infty[$. *On obtient après calcul les solutions* $y(x) = K\,\tanh(1/x) \quad K \in \mathbb{R}$, *dont quelques-unes sont dessinées ci-dessous. Chercher une solution globale sur* $\mathbb{R}$ *tout entier revient donc à se demander si l'on peut raccorder de façon continue et dérivable en* $x = 0$ *une des solutions sur* $]-\infty, 0[$ *avec une des solutions sur* $]0, +\infty[$.

Autrement dit, existe-t-il des réels K_1 *et* K_2 *tels que la fonction*



$$y(x) = \begin{cases} K_1\,\tanh(1/x) & \text{si } x < 0 \\ K_2\,\tanh(1/x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

soit prolongeable de façon continue et dérivable en $x = 0$ *?*

On a : $\lim\limits_{x\to 0^-} y(x) = -K_1$ *et* $\lim\limits_{x\to 0^+} y(x) = K_2$. *Donc la continuité en* $x = 0$ *sera assurée si l'on choisit* $K_1 = -K_2$. *Par ailleurs, on a* $\lim\limits_{x\to 0^-} y'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} y'(x) = 0 \qquad \forall K_1, K_2$. *Donc le* *raccord de la dérivée est assuré dans tous les cas. En résumé, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions :*

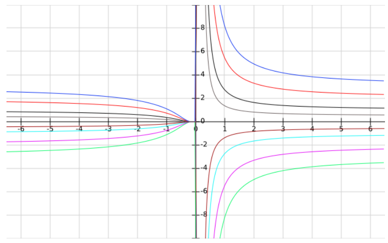
$$y(x) = \begin{cases} K\,\tanh(1/x) & \text{si } x < 0 \\ -K\,\tanh(1/x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \qquad \forall K \in \mathbb{R}$$

- $(E) \quad x^2y' + y = 0$ *Le coefficient devant y' s'annulant en $x = 0$, on résout cette équation sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. On obtient après calcul des solutions de la forme $y(x) = K\,e^{1/x} \quad K \in \mathbb{R}$, dont quelques-unes sont dessinées ci-dessous. Comme dans l'exemple précédent, se demander s'il existe une solution globale sur $\mathbb{R}$ revient à chercher à raccorder de façon continue et dérivable en $x = 0$ une des solutions sur $]-\infty, 0[$ avec une des solutions sur $]0, +\infty[$.*

Autrement dit, existent-ils des réels K_1 et K_2 tels que la fonction

$$y(x) = \begin{cases} K_1\,e^{1/x} & \text{si } x < 0 \\ K_2\,e^{1/x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

soit prolongeable de façon continue et dérivable en $x = 0$?



Au vu de la figure, la réponse semble assez claire : n'importe quelle solution sur $]-\infty, 0[$ semble ne pouvoir se raccorder de façon continue et dérivable qu'avec la solution nulle sur $]0, +\infty[$. Voyons si cette conjecture est confirmée par le calcul. On montre aisément que :

$$\lim_{x \to 0^-} y(x) = 0 \quad \forall K_1 \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0^+} y(x) = \begin{cases} -\infty & \text{si } K_2 < 0 \\ 0 & \text{si } K_2 = 0 \\ +\infty & \text{si } K_2 > 0 \end{cases}$$

Donc y ne peut être continue sur $\mathbb{R}$ qu'en posant $y(0) = 0$ et en choisissant $K_2 = 0$ (c'est-à-dire y constamment nulle sur $]0, +\infty[$). Reste à voir si y ainsi prolongée est dérivable en $x = 0$, ou s'il faut fixer une condition supplémentaire sur K_1 pour cela. Pour $x < 0$, $y'(x) = \dfrac{-K_1}{x^2}\,e^{1/x}$. Donc $\lim\limits_{x \to 0^-} y'(x) = 0 \quad \forall K_1 \in \mathbb{R}$, qui se raccorde donc naturellement avec la dérivée de y sur $]0, +\infty[$, puisqu'il s'agit de la fonction nulle. En conclusion, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions :

$$y(x) = \begin{cases} K_1\,e^{1/x} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \qquad K_1 \in \mathbb{R}$$

De façon générale, comme on vient de le voir dans les exemples précédents, la démarche est donc la suivante en chaque point de raccord $r \in \mathbb{R}$:

- Calculer $\lim\limits_{x \to r^-} y(x)$ et $\lim\limits_{x \to r^+} y(x)$, et voir s'il est possible d'imposer que ces deux limites soient égales (au prix souvent d'une condition sur les constantes qui interviennent dans l'expression des solutions de part et d'autre de r).
- Si l'étape précédente (continuité en r) a été couronnée de succès, on peut alors calculer $\lim\limits_{x \to r^-} y'(x)$ et $\lim\limits_{x \to r^+} y'(x)$, et voir s'il est possible d'imposer que ces deux limites soient égales. Cela revient souvent à nouveau à imposer une condition supplémentaire sur les constantes qui interviennent dans l'expression des solutions de part et d'autre de r.
- Faire la synthèse.

Chapitre 7

Quelques compléments sur les équations différentielles d'ordre 1

7.1 Equations différentielles non-linéaires d'ordre 1 à variables séparées

Il n'y a pas de méthode générale pour résoudre les équations différentielles non-linéaires, ni même affirmer l'existence de solutions. Dans le cas de l'ordre 1 toutefois, on sait systématiquement mener à bien la résolution si l'équation est **à variables séparées**, c'est-à-dire si on peut l'écrire (soit directement, soit après un changement de fonction inconnue) sous la forme $y'(t) = g(y(t))\, f(t)$. La résolution se ramène alors à déterminer des primitives.

Exemples

- *$y'(t) = t^2\, y(t)$ est une équation à variables séparées, avec $f(t) = t^2$ et $g(y(t)) = y(t)$.*
- *$y'(t)y^2(t) = e^t$ est une équation à variables séparées, avec $f(t) = e^t$ et $g(y(t)) = 1/y^2(t)$.*
- *$y'(t) + y(t) - t^2 = 0$ n'est pas à variables séparées.*

La méthode générale de résolution est la suivante :

$$\frac{y'(t)}{g(y(t))} = f(t) \qquad \text{(en supposant } g(y(t)) \neq 0\text{)}$$

$$\text{d'où} \quad \int \frac{y'(t)}{g(y(t))}\, dt = \int f(t)\, dt \quad \text{en intégrant}$$

$$\text{soit} \quad \int \frac{du}{g(u)} = \int f(t)\, dt \quad \text{avec le changement de variable } u = y(t) \quad \text{(d'où } du = y'(t)\, dt\text{)}$$

$$\text{d'où} \quad H(u) = F(t) + C \quad \text{où } F \text{ et } H \text{ sont des primitives de } f \text{ et } 1/g \text{ et } C \text{ une constante}$$

$$\text{d'où} \quad y(t) = u = H^{-1}(F(t) + C) \text{ où } H^{-1} \text{ est la fonction réciproque de } H$$

Exemples

- *On considère l'équation* $(E): \quad y'(t) = e^t\, y^2(t)$. *On a :*

$$\frac{y'(t)}{y^2(t)} = e^t \quad \Longrightarrow \int \frac{y'(t)}{y^2(t)}\, dt = \int e^t\, dt \quad \Longrightarrow \int \frac{du}{u^2} = \int e^t\, dt \quad \Longrightarrow \frac{-1}{u} = e^t + C$$

D'où $y(t) = u = \dfrac{-1}{e^t + C}$ *avec* $C \in \mathbb{R}$. *On remarque donc que le domaine de définition de* y *est* $\mathbb{R}$ *pour les valeurs de* $C \geq 0$, *et* $\mathbb{R} \setminus \{\ln(-C)\}$ *si* $C < 0$.

- *On rencontre en biologie ou en chimie (modèles de croissance) des équations du type* (E) : $y'(t) = (y(t) - a)(y(t) - b)$ *(éq. logistique, éq. de Riccati à coefficients constants).*
On utilise la décomposition : $\dfrac{1}{(X-a)(X-b)} = \dfrac{1}{b-a}\left(\dfrac{1}{X-b} - \dfrac{1}{X-a}\right)$.

$$\text{D'où} \quad \frac{y'(t)}{(y(t)-a)(y(t)-b)} = 1 \quad \Longrightarrow \frac{y'(t)}{y(t)-b} - \frac{y'(t)}{y(t)-a} = b - a$$

$$\Longrightarrow \int \frac{y'(t)\, dt}{y(t)-b} - \int \frac{y'(t)\, dt}{y(t)-a} = (b-a)t + C$$

$$\Longrightarrow \ln|y(t) - b| - \ln|y(t) - a| = (b-a)t + C$$

D'où $\dfrac{y-b}{y-a} = K\, e^{(b-a)t}$. *D'où* $y(t) = \dfrac{b - aK\, e^{(b-a)t}}{1 - K\, e^{(b-a)t}}$ $, K \in \mathbb{R}$.

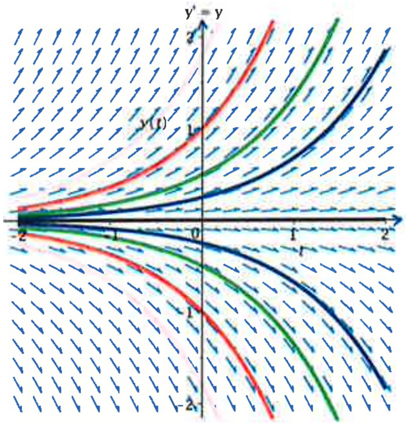
Remarque Comme indiqué au début de cette section, on n'a pas de résultat général permettant de résoudre, ni même d'affirmer l'existence de solutions, pour une équation différentielle quelconque. Un résultat théorique important toutefois est le **théorème de Cauchy-Lipschitz**, qui concerne les équations différentielles d'ordre 1, mais dépasse le cadre de ce cours. Son énoncé est le suivant :
Soit F *une fonction de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $I \times U$, *où* I *est un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$ *et* U *un ouvert de* $\mathbb{R}$. *Quel que soit* $(t_0, u_0) \in I \times \mathbb{R}$, *il existe* $\tau > 0$ *et une unique fonction* $u \in \mathcal{C}^1([t_0 - \tau; t_0 + \tau])$ *à valeurs dans* U *solution de l'équation différentielle*

$$(E) \qquad \begin{cases} u'(t) = F(t, u(t)) & \text{pour tout } t \in [t_0 - \tau; t_0 + \tau] \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

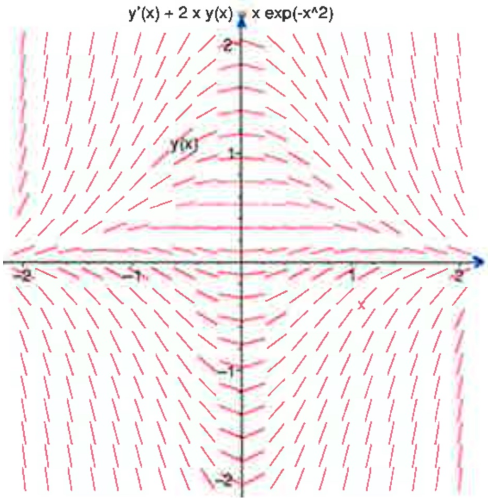
7.2 Une méthode graphique pour les EDO d'ordre 1 : les courbes intégrales

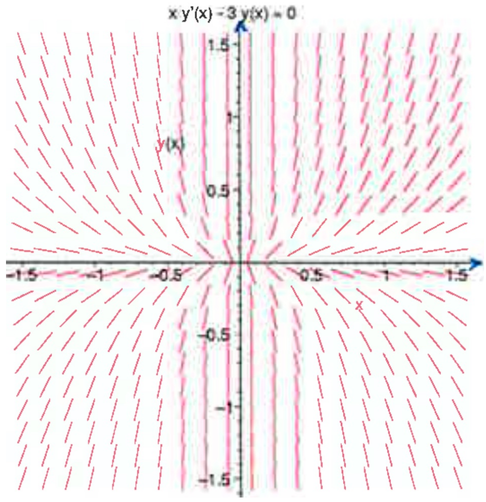
Pour une équation différentielle (E) d'ordre 1, on peut représenter graphiquement l'ensemble des solutions, sans pour autant les calculer explicitement. Il s'agit de la méthode des **courbes intégrales**. L'idée est très simple : on écrit (E) sous la forme $y'(x) = F(y(x), x)$, puis en chaque point (x, y) d'un quadrillage du plan, on dessine une flèche de pente $F(y, x)$. Cette flèche correspond à la tangente à la courbe représentative d'une fonction $y(x)$ solution de (E).
On se donne ainsi visuellement, sans calcul, une idée générale de la forme des solutions de (E).

Exemples *Considérons l'équation différentielle $y' - y = 0$. On a donc $y' = y$. Dans le plan (Oxy), plaçons en chaque point (x, y) d'un quadrillage une flèche de pente y. On obtient alors le dessin ci-contre, qui nous donne bien une idée visuelle de l'ensemble des solutions, à savoir les fonctions $y(x) = K\,e^x,\ K \in \mathbb{R}$.*



On donne ci-dessous deux autres exemples, pour les équations différentielles $y'(x) + 2x\,y(x) = x\,e^{-x^2}$ (à gauche) et $x\,y'(x) - 3y(x) = 0$ (à droite).





7.3 Approximation numérique de la solution d'une équation différentielle d'ordre 1 par méthode d'Euler

On considère l'équation différentielle d'ordre 1 : $(E) \quad y'(t) = F(t, y(t))$ avec la condition initiale $y(0) = \alpha$ (on suppose que la variable t représente le temps). Supposons que cette équation est compliquée et que l'on ne sait pas en trouver la solution exacte. On peut alors en chercher une approximation par une méthode numérique simple, appelée **méthode d'Euler**.
Le principe est le suivant : on va choisir un **pas de temps** noté Δt, et chercher une approximation de $y(t)$ à chaque instant $t_i = i\Delta t$ $(i = 1, 2 \ldots)$. En faisant une approximation de la dérivée $y'(t_i)$ par un taux d'accroissement, on a :

$$\frac{y(t_i + \Delta t) - y(t_i)}{\Delta t} \simeq F(t_i, y(t_i))$$

c'est-à-dire

$$y(t_{i+1}) \simeq y(t_i) + \Delta t\,F(t_i, y(t_i))$$

Connaissant $y(t_0) = y(0) = \alpha$, on a donc ainsi une relation de récurrence permettant de construire une approximation de y entre $t = 0$ et un instant final $t = T$.

Une question pratique importante est celle du choix de Δt. Sa valeur est un compromis :

- si elle est trop grande, l'approximation à la base de la méthode sera trop imprécise, et donc les valeurs obtenues seront éloignées de celles de la vraie fonction $y(t)$;
- si elle est trop petite, le nombre de pas de temps nécessaire pour aller jusqu'à l'instant final T sera très grand, et il faudra donc faire beaucoup de calculs.

Exemple *On considère l'équation (E) : $y'(t) - e^{-\sqrt{y(t)}} = 0$, avec la condition initiale $y(0) = 1$.*

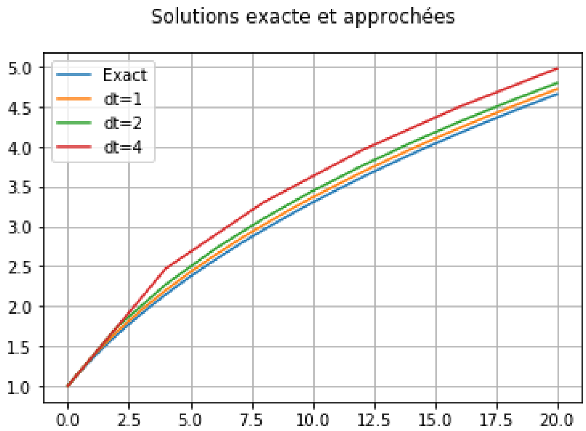
Il s'agit d'une équation non-linéaire, que l'on peut en fait résoudre, mais dont l'expression analytique de la solution est très compliquée. On peut en trouver une solution approchée par la méthode d'Euler. Choisissons un pas de temps Δt. On a alors :

$$\frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} \simeq e^{-\sqrt{y(t)}}$$

On peut alors calculer la suite de valeurs approchées :

$$\begin{cases} \widetilde{y}_0 = 1 \\ \widetilde{y}_{i+1} = \widetilde{y}_i + \Delta t \, e^{-\sqrt{\widetilde{y}_i}} \qquad i = 0, 1, 2 \dots \end{cases}$$

Plus Δt est petit, plus l'approximation de la vraie solution sera bonne, mais plus le volume de calcul sera important. Ci-dessous 3 solutions approchées pour 3 valeurs différentes de Δt.



7.4 Résolution d'un système d'équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients constants

De nombreux problèmes font intervenir simultanément l'évolution de plusieurs quantités : intensité électrique en différents points d'un circuit complexe, concentration en différents produits chimiques réagissant entre eux, diffusion dans les organes d'une substance présente dans le sang, modèle de propagation d'une épidémie, modèle proie-prédateur en écologie... On a alors plusieurs équations différentielles couplées. Si chacune de ces équations est linéaire par rapport à chaque variable, on dit qu'on a un système linéaire d'équations différentielles. Celui-ci peut s'écrire avec une notation matricielle $\mathbf{X}' + \mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{S}$ où $\mathbf{A}$ est une matrice, $\mathbf{S}$ un vecteur (second membre), et où le vecteur $\mathbf{X}$ contient les différentes fonctions inconnues.

Exemple *La population d'un pays est formée de ruraux et d'urbains, qu'on note respectivement $R(t)$ et $U(t)$, où t désigne le temps (en années). On désigne par a le taux annuel d'exode rural (les gens qui quittent la campagne pour habiter en ville) et par b le taux annuel d'exode urbain (les gens qui quittent la ville pour habiter la campagne). De plus, les villes reçoivent un flux migratoire en provenance de l'étranger : le nombre de migrants sur une période Δt est noté $c(t)\,\Delta t$. Les équations qui traduisent l'évolution de $R(t)$ et $U(t)$ sont donc :*

$$\left\{\begin{array}{ll} R'(t) = -a\,R(t) + b\,U(t) & (1) \\ U'(t) = a\,R(t) - b\,U(t) + c(t) & (2) \end{array}\right.$$

qui peut aussi être écrit sous forme matricielle

$$\mathbf{X}'(t) = \mathbf{M}\mathbf{X}(t) + \mathbf{S}(t)$$

$$\text{où}\ \ \mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} R(t) \\ U(t) \end{pmatrix},\quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} -a & b \\ a & -b \end{pmatrix}\ \text{ et }\ \mathbf{S}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}.$$

La résolution de ces équations est alors réalisée en recombinant les équations pour les rendre indépendantes les unes des autres. La technique pour réaliser cela de façon systématique s'appelle la "diagonalisation", qui est hors programme.

Exemple *Dans l'exemple précédent, si l'on additionne les équations (1) et (2) et que l'on définit la nouvelle fonction $Z = R+U$, on obtient l'équation $Z'(t) = c(t)$. Sa résolution permet donc de déterminer $Z = R+U$. Et de même, si l'on forme a (1)–b (2) et que l'on définit la nouvelle fonction $W = aR-bU$, on obtient l'équation $W'(t) = -(a+b)\,W(t) - b\,c(t)$, qui permet de déterminer $W = aR - bU$. On en déduit finalement $R = (bZ+W)/(a+1)$ et $U = (aZ-W)/(a+b)$.*

En prenant par exemple $a = 0.2$ an^{-1}, $b = 0.1$ an^{-1} et $c(t) = c_0$, on a ainsi :

- *$Z'(t) = c_0$, d'où $Z(t) = c_0\,t + \alpha$.*
- *$W'(t) = -0.3\,W(t) - 0.1c_0\,t$. D'où $W(t) = c_0\,\frac{10-3t}{9} + \beta\,e^{-0.3t}$.*
- *On obtient finalement R et U en recombinant Z et W par*

$$R(t) = \frac{Z(t)+10W(t)}{3} \qquad \text{et} \qquad U(t) = \frac{2Z(t)-10W(t)}{3}$$

Chapitre 8

Equations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

On va considérer dans ce chapitre les équations différentielles de la forme

$$(E) \qquad a\,y''(t) + b\,y'(t) + c\,y(t) = f(t) \qquad \text{avec } a, b, c \in \mathbb{R}$$

On supposera bien sûr $a \neq 0$, car sinon l'équation différentielle est d'ordre 1.
Nous allons déterminer les solutions de ces équations. Il n'y a pas par contre de méthode simple pour généraliser cela au cas avec coefficients a, b, c non constants.

8.1 Méthode de résolution

Comme énoncé au §6.1, le principe de superposition est valable pour toute équation différentielle linéaire, quel que soit son ordre. On va donc procéder ici comme pour les équations différentielles linéaires d'ordre 1 :

- rechercher les solutions y_0 de l'équation homogène associée $(E_0) \quad a\,y_0''(t) + b\,y_0'(t) + c\,y_0(t) = 0$ (cf §8.2)
- rechercher une solution particulière y_p de l'équation complète (E), par analogie ou par variation de la constante (cf §8.3)

Les solutions de (E) seront alors les fonctions de la forme $y = y_0 + y_p$.

Remarque : cas particulier $c = 0$ Si $c = 0$, on pourra bien sûr utiliser la démarche qu'on vient de décrire, mais une autre possibilité consiste à poser $z(t) = y'(t)$. On se ramène alors à la résolution successive de deux équations différentielles d'ordre 1 : tout d'abord $a\,z'(t) + b\,z(t) = f(t)$, puis $y'(t) = z(t)$.

Un récapitulatif est donné ici : https://www.youtube.com/watch?v=N0GLEsJ3Lfg

8.2 Résolution de l'équation homogène

8.2.1 Deux cas particuliers pour commencer à comprendre

L'équation $y''(t)+\omega^2 y(t)=0$ modélise par exemple les petits déplacements sur un axe vertical d'un ressort auquel est accroché une masse m (la constante ω vaut alors $\sqrt{k/m}$ où k est la raideur du ressort). On voit facilement que les fonctions $y(t)=\cos\omega t$ et $y(t)=\sin\omega t$, ainsi que leurs combinaisons linéaires $y(t)=\lambda\cos\omega t+\mu\sin\omega t$ sont solutions de cette équation. En effet, remplaçons $y(t)=\cos(\omega t)$ dans l'équation. Sa dérivée première vaut $y'(t)=-\omega\sin(\omega t)$. Si on dérive une deuxième fois, on trouve $y''(t)=-\omega^2\cos(\omega t)$. On observe donc $y''(t)=-\omega^2 y(t)$, ce qui donne exactement l'équation $y''(t)+\omega^2 y(t)=0$. Et pareil pour $y(t)=\sin(\omega t)$.

Considérons maintenant l'équation $y''(t)-\omega^2 y(t)=0$.
Ses solutions sont de la forme $y(t)=\lambda e^{-\omega t}+\mu e^{\omega t}$. Comme plus haut, on peut vérifier que c'est bien une solution en dérivant cette fonction deux fois : $y'(t)=-\omega\lambda e^{-\omega t}+\omega\mu e^{\omega t}$, puis $y''(t)=\omega^2\lambda e^{-\omega t}+\omega^2\mu e^{\omega t}$, ce qui donne bien $y''(t)=\omega^2 y(t)$ et donc $y''(t)-\omega^2 y(t)=0$.

En fait les expressions correspondant à ces 2 exemples sont de la même forme si on accepte de travailler avec des nombres complexes. En effet on peut écrire

$$\cos\omega t=\frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\omega t=\frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2i}$$

si bien que dans les 2 cas les solutions sont combinaisons de fonctions exponentielles.
On remarque aussi que les coefficients intervenant dans ces exponentielles, $i\omega$ dans le premier cas et ω dans le second, sont respectivement racines des polynômes $X^2+\omega^2$ et $X^2-\omega^2$, c'est-à-dire les polynômes du second degré obtenus à partir de l'équation différentielle en “remplaçant” l'ordre de dérivation par une puissance de X.
Le paragraphe qui suit va permettre de généraliser cette observation et de construire de manière systématique les solutions pour toutes les équations linéaires homogènes.

8.2.2 Le cas général

On considère l'équation différentielle homogène (E_0) associée à (E) :

$$a\,y_0''(t)+b\,y_0'(t)+c\,y_0(t)=0 \quad \text{où } a,b,c\in\mathbb{R}, \text{ et } a\neq 0$$

Définition On appelle **équation caractéristique (ou polynôme caractéristique) associé.e à (E_0)** l'équation du second degré $aX^2+bX+c=0$.

Théorème On note $\Delta=b^2-4ac$ le discriminant du polynôme caractéristique. Les solutions de (E_0) sont alors :

- Si $\Delta>0$: $y_0(t)=A\,e^{r_1 t}+B\,e^{r_2 t}$ avec r_1,r_2 les 2 racines du polynôme caractéristique, et A,B des réels quelconques.
- Si $\Delta=0$: $y_0(t)=(At+B)\,e^{rt}$ avec r la racine du polynôme caractéristique, et A,B des réels quelconques.

- Si $\Delta < 0$: $y_0(t) = [A\cos\beta t + B\sin\beta t]\, e^{\alpha t}$ avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et A, B des réels quelconques.
  Autre formulation : α et β sont les nombres réels tels que $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont les deux racines du polynôme caractéristique.

La preuve de ces résultats est donnée dans la section 8.4.

Exemples `https://www.youtube.com/watch?v=_-kI4YpwBvQ`

- (E_0) $\quad y_0''(t) - 3y_0'(t) + 2y_0(t) = 0$
  Le polynôme caractéristique est $X^2 - 3X + 2$. Il admet deux racines réelles $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$. Les solutions sont $y_0(t) = A\,e^{t} + B\,e^{2t}$, avec A, B réels.

- (E_0) $\quad 4y_0''(t) + 12y_0'(t) + 9y_0(t) = 0$
  Le polynôme caractéristique est $4X^2 + 12X + 9$. Il admet une seule racine réelle $r = -3/2$. Les solutions sont $y_0(t) = (At + B)\,e^{-3t/2}$, avec A, B réels.

- (E_0) $\quad y_0''(t) + y_0'(t) + y_0(t) = 0$
  Le polynôme caractéristique est $X^2 + X + 1$. Il admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = (-1 + i\sqrt{3})/2$ et $r_2 = (-1 - i\sqrt{3})/2$. Donc $\alpha = -1/2$ et $\beta = \sqrt{3}/2$.
  Les solutions sont $y_0(t) = \left[A\cos\dfrac{\sqrt{3}t}{2} + B\sin\dfrac{\sqrt{3}t}{2}\right] e^{-t/2}$, avec A, B réels.

Remarque On voit que les solutions de (E_0) sont les combinaisons linéaires de deux fonctions. D'un point de vue algébrique, l'ensemble des solutions de (E_0) est donc un espace vectoriel de dimension 2.

Remarque : ajout de conditions initiales ou aux limites Si l'équation (E_0) est complétée par des données de la solution (ou de sa dérivée) pour une ou des valeurs de t, il faut ajuster les constantes A et B pour satisfaire ces conditions.

Exemple *cf vidéo précédente, vers 8'30"*
Dans le dernier cas traité au-dessus, si on cherche y_0 satisfaisant $y_0(0) = 0$ et $y_0'(0) = 1$, les constantes A et B doivent satisfaire $A = 0$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}B - \frac{A}{2} = 1$. Il y a donc finalement une seule solution $\quad y_0(t) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\dfrac{\sqrt{3}t}{2}e^{-t/2}$.

8.3 Trouver une solution particulière

On rappelle que cette étape sert uniquement dans le cas où l'équation n'est pas homogène mais qu'elle admet un second membre :

$$(E) \qquad a\,y''(t) + b\,y'(t) + c\,y(t) = f(t) \qquad \text{avec } a, b, c \in \mathbb{R}, c \neq 0$$

Ayant calculé la solution de l'équation homogène au paragraphe précédent, il reste à trouver une solution particulière de l'équation complète (E) pour déterminer toutes ses solutions. Comme au §6.3 pour les équations différentielles linéaires d'ordre 1, il existe deux possibilités : méthode par analogie et méthode de variation de la constante.

8.3.1 Méthode par analogie

Si $f(t)$ est un polynôme de degré n :

- Si $c \neq 0$ alors il existe une solution particulière polynômiale $Q(t)$ de degré n.
- Si $c = 0$ et $b \neq 0$ alors il existe une solution particulière polynômiale $Q(t)$ de degré $n+1$.
- Si $c = 0$ et $b = 0$ alors il existe une solution particulière polynômiale $Q(t)$ de degré $n+2$.

Si $f(t) = Ce^{kt}$:

- Si k n'est pas racine de l'équation caractéristique alors il existe une solution particulière de la forme $D\,e^{kt}$.
- Si k est l'une des deux racines de l'équation caractéristique alors il existe une solution particulière de la forme $D\,t\,e^{kt}$.
- Enfin si k est la racine double de l'équation caractéristique alors il existe une solution particulière de la forme $D\,t^2\,e^{kt}$.

Ce raisonnement est évidemment généralisable si $f(t)$ est une combinaison linéaire d'exponentielles : il suffit de faire la même combinaison linéaire avec les solutions particulières pour chaque exponentielle.

Si $f(t) = C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t)$:

- Dans le cas où on a à la fois $b = 0$ et $c = a\omega^2$, il existe une solution particulière de la forme $t\,(E\cos(\omega t) + F\sin(\omega t))$
- Dans tous les autres cas, il existe une solution particulière de la forme $E\cos(\omega t) + F\sin(\omega t)$

Exemples

- *Soit l'équation (E) :*
$$3y''(t) + 4y'(t) + y(t) = -t^3 - 8t^2 + 1$$
Le second membre étant un polynôme de degré 3 et $b \neq 0, c \neq 0$, on va chercher une solution particulière sous la même forme d'un polynôme de degré 3 : $y_p(t) = a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0$. En reportant cette expression dans (E), on obtient :
$$3(6a_3t + 2a_2) + 4(3a_3t^2 + 2a_2t + a_1) + (a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0) = -t^3 - 8t^2 + 1$$
soit $a_3t^3 + (12a_3 + a_2)\,t^2 + (18a_3 + 8a_2 + a_1)\,t + 6a_2 + 4a_1 + a_0 = -t^3 - 8t^2 + 1.$
Par identification des termes, on obtient $a_3 = -1$, $a_2 = 4$, $a_1 = -14$ et $a_0 = 33$. D'où $y_p(t) = -t^3 + 4t^2 - 14t + 33$.

- *Soit l'équation (E) :*
$$y''(t) - 2y'(t) + y(t) = e^{3t} + 2e^{-t}$$
Le second membre étant une combinaison linéaire d'exponentielles et le polynôme caractéristique admettant une unique racine en 1, on va chercher une solution particulière sous la forme $p(t) = ae^{3t} + be^{-t}$. En reportant cette expression dans (E), on obtient :
$$\left(9a\,e^{3t} + b\,e^{-t}\right) - 2\,\left(3a\,e^{3t} - b\,e^{-t}\right) + \left(ae^{3t} + be^{-t}\right) = e^{3t} + 2e^{-t}$$
soit $4a\,e^{3t} + 4b\,e^{-t} = e^{3t} + 2e^{-t}$, d'où $a = 1/4$ et $b = 1/2$. Finalement $y_p(t) = \dfrac{1}{4}\,e^{3t} + \dfrac{1}{2}e^{-t}$.

- *Voir aussi les 2 premiers exemples de* https://www.youtube.com/watch?v=5BOIp4bR0EY

8.3.2 Méthode par variation de la constante

Lorsque le second membre de l'équation ne se prête pas à une méthode par analogie, on peut utiliser une méthode de variation de la constante. Comme pour les équations d'ordre 1, c'est une méthode plus lourde, mais qui fonctionne dans tous les cas.

Le principe est le suivant : Les solutions de (E_0) dépendant ici de deux constantes A et B, on va en fixer une à 0 (par exemple A) et faire varier l'autre. On va donc chercher une solution particulière sous la forme $y_p(t) = B(t)\, z_0(t)$ où z_0 est une solution très simple[1] de (E_0). On a alors : $y_p'(t) = B'(t)z_0(t)+B(t)z_0'(t)$ et $y_p''(t) = B''(t)z_0(t) + 2B'(t)z_0'(t) + B(t)z_0''(t)$. En reportant dans (E), on obtient

$$ay_p''(t) + by_p'(t) + cy_p(t) = a\, z_0(t)B''(t) + \left[2a\, z_0'(t) + b\, z_0(t)\right] B'(t) + \underbrace{\left[a\, z_0''(t) + b\, z_0'(t) + c\, z_0(t)\right]}_{=0} B(t)$$

(E) devient donc $a\, z_0(t)B''(t) + [2a\, z_0'(t) + b\, z_0(t)]\, B'(t) = f(t)$. On est alors ramené aux résolutions successives de deux équations différentielles linéaires du premier ordre :

1. Poser $C(t) = B'(t)$ et résoudre $a\, z_0(t)C'(t) + [2a\, z_0'(t) + b\, z_0(t)]\, C(t) = f(t)$ (on pourra choisir la constante d'intégration égale à 0 car on ne cherche qu'une solution particulière).
2. Puis résoudre $B'(t) = C(t)$, c'est-à-dire trouver une primitive de $C(t)$ (là encore on pourra choisir la constante d'intégration égale à 0).
3. En déduire la solution particulière de (E) : $y_p(t) = B(t)\, z_0(t)$.

Exemples

- *Considérons l'équation* $(E) \quad y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = (6t-5)\, e^{-t}$
  On a vu au §8.2.2 *que les solutions de son équation homogène associée sont les fonctions* $y_0(t) = A\, e^t + B\, e^{2t}$*, avec* A, B *réels. En suivant la démarche expliquée ci-dessus, on va donc chercher une solution particulière de* (E) *sous la forme* $y_p(t) = B(t)\, e^{2t}$*. En injectant cette expression dans* (E)*, on obtient :* $e^{2t}\, \left[B''(t) + B'(t)\right] = (6t-5)\, e^{-t}$*. On pose alors* $C(t) = B'(t)$*. L'équation précédente devient* $e^{2t}\, \left[C'(t) + C(t)\right] = (6t-5)\, e^{-t}$*, c'est-à-dire* $C'(t) + C(t) = (6t-5)\, e^{-3t}$*. Après calcul, une solution de cette équation linéaire d'ordre 1 est* $C(t) = (1-3t)\, e^{-3t}$*. D'où par intégration* $B(t) = t\, e^{-3t}$*. D'où la solution particulière* $y_p(t) = B(t)\, e^{2t} = te^{-t}$*.*

  Finalement, les solutions de (E) *sont donc les fonctions* $y(t) = te^{-t} + A\, e^t + B\, e^{2t},\ A, B \in \mathbb{R}$*.*
- *Voir aussi l'exemple 3 de* `https://www.youtube.com/watch?v=5BOIp4bR0EY`

8.4 Détails sur la résolution de l'équation homogène

Pour les lecteurs intéressés, on explique ici comment sont obtenus les résultats énoncés au §8.2.2.

8.4.1 Rappel sur les trinômes du second degré

Soit le trinôme du second degré $aX^2 + bX + c = 0$ avec a, b, c réels. On rappelle que ses solutions sont obtenues en calculant le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$, et sont les suivantes :

- Si $\Delta > 0$, il y a 2 racines réelles distinctes $r_1, r_2 = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

1. Avec les notations du §8.2.2, on aurait ici $z_0(t) = e^{r_2 t}$ si $\Delta > 0$, ou $z_0(t) = e^{rt}$ si $\Delta = 0$, ou $z_0(t) = \sin(\beta t)e^{\alpha t}$ si $\Delta < 0$

- Si $\Delta = 0$, il y a 1 racine (dite *racine double*) $r = \frac{-b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$, il y a 2 racines complexes conjuguées $r_1, r_2 = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

8.4.2 Solutions exponentielles

Considérons les deux fonctions $v_r(t) = e^{rt}$ et $w_r(t) = t\, e^{rt}$ avec $r \in \mathbb{C}$.

- Les dérivées de v_r sont $v_r'(t) = r\, e^{rt}$ et $v_r''(t) = r^2\, e^{rt}$. Donc $v_r(t)$ vérifie :
$$a\, v_r''(t) + b\, v_r'(t) + c\, v_r(t) = (ar^2 + br + c)\, e^{rt}$$
- Les dérivées de w_r sont $w_r'(t) = (1 + rt)\, e^{rt}$ et $w_r''(t) = (r^2 t + 2r)\, e^{rt}$. Donc $w_r(t)$ vérifie :
$$a\, w_r''(t) + b\, w_r'(t) + c\, w_r(t) = (ar^2 + br + c)\, t\, e^{rt} + (2ar + b)\, e^{rt}$$

8.4.3 Résolution de l'équation homogène

En utilisant les résultats des §8.4.1 et §8.4.2, on obtient :

Si $\boldsymbol{\Delta} > \mathbf{0}$: l'équation caractéristique a 2 racines distinctes r_1 et r_2, et les fonctions $v_{r_1}(t) = e^{r_1 t}$ et $v_{r_2}(t) = e^{r_2 t}$ sont solutions de (E_0). L'ensemble des solutions est alors donné par combinaison linéaire de v_{r_1} et v_{r_2} :
$$y_0(t) = A\, e^{r_1 t} + B\, e^{r_2 t} \qquad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}$$

Si $\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{0}$: l'équation caractéristique a une seule racine $r = -\frac{b}{2a}$. D'après §8.4.2, $v_r(t) = e^{rt}$ et $w_r(t) = t\, e^{rt}$ sont solutions de (E_0). L'ensemble des solutions est alors donné par combinaison linéaire de v_r et w_r :
$$y_0(t) = (At + B)\, e^{rt} \qquad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}$$

Si $\boldsymbol{\Delta} < \mathbf{0}$: comme dans le cas $\Delta > 0$, le polynôme caractéristique a deux racines, et l'ensemble des solutions est donc à nouveau l'ensemble des fonctions de la forme
$$y_0(t) = C\, e^{r_1 t} + D\, e^{r_2 t}$$
mais cette fois les constantes C et D doivent être considérées comme des nombres complexes puisque r_1 et r_2 le sont. Si l'on pose $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$, on a alors $r_1 = \alpha - i\beta$ et $r_2 = \alpha + i\beta$, et les solutions se réécrivent
$$\begin{aligned} y_0(t) &= C\, e^{\alpha t}\, e^{-i\beta t} + D\, e^{\alpha t}\, e^{i\beta t} \\ &= [C\, (\cos\beta t - i \sin\beta t) + D\, (\cos\beta t + i \sin\beta t)]\; e^{\alpha t} \\ &= [(C + D)\, \cos\beta t + i(D - C) \sin\beta t]\; e^{\alpha t} \end{aligned}$$
On cherche ici les solutions réelles, donc on va considérer celles pour lesquelles $C + D$ et $i(D - C)$ sont des réels. Autrement dit, l'ensemble des solutions de (E_0) est
$$y_0(t) = [A\, \cos\beta t + B\, \sin\beta t]\; e^{\alpha t} \qquad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}$$

Chapitre 9

Introduction aux séries numériques et aux intégrales généralisées

Le but de ce chapitre est de fournir une introduction simple à des notions qui seront revues et approfondies en deuxième année.

9.1 Introduction aux séries numériques

9.1.1 Définitions

Soit $(u_k)_k$ une suite de réels.

Définition On appelle **somme partielle d'ordre n** associée à la suite $(u_k)_k$ la quantité

$$S_n = u_0 + \ldots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Définition Le couple de suites $((u_n)_n, (S_n)_n)$ est appelée **série numérique de terme général u_n**. Elle est notée $\sum u_n$.

Définition On dit que **la série $\sum u_n$ converge** si et seulement si $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ existe et a une valeur finie. Sinon **la série diverge**.

Cette valeur limite est appelée **somme de la série, notée $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$**

Remarque $S_n - S_{n-1} = u_n$. Donc $(S_n \longrightarrow \ell) \implies (u_n \longrightarrow 0)$. Une condition nécessaire de convergence de la série numérique est donc que $u_n \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

Ce n'est pas une condition suffisante, comme on le verra sur plusieurs exemples dans la suite.

9.1.2 Exemples

9.1.2.1 Série associée à une suite arithmétique

On considère la suite arithmétique définie par u_0 et la relation $u_{n+1} = u_n + r$.
On a alors $u_n = u_0 + nr \quad \forall n \geq 0$. D'où $u_n \longrightarrow +\infty$, et donc $S_n \longrightarrow +\infty$.

La série numérique $\sum u_n$ diverge.

9.1.2.2 Série associée à une suite géométrique

On considère la suite géométrique définie par u_0 et la relation $u_{n+1} = q\, u_n$.
On a alors $u_n = q^n\, u_0 \quad \forall n \geq 0$, et $S_n = u_0 + q\, u_0 + \ldots + q^n\, u_0 = u_0 \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ si $q \neq 1$.
Donc :

- Si $|q| < 1$, $q^n \longrightarrow 0$ et la série $\sum u_n$ converge. Sa somme vaut $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{u_0}{1 - q}$.
- Si $|q| > 1$, $|q|^n \longrightarrow +\infty$, et donc la série $\sum u_n$ diverge.
- Si $q = 1$, $S_n = (n+1)u_0 \longrightarrow +\infty$, et donc la série $\sum u_n$ diverge.
- Si $q = -1$, $S_n = u_0$ si n est pair et $S_n = 0$ si n est impair. S_n n'a donc pas de limite, et donc la série $\sum u_n$ diverge.

9.1.2.3 Série harmonique

La série harmonique est définie par $u_n = \dfrac{1}{n} \quad n \geq 1$. Comme on le verra plus loin, elle a un rôle très important, en tant que cas "charnière" entre convergence et divergence, et du fait de son lien avec la fonction logarithme.

Théorème La série harmonique $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge.

Démonstration Raisonnons par l'absurde. Si $S_n \to \ell$ quand $n \to +\infty$, alors on a aussi $S_{2n} \longrightarrow \ell$. Donc $S_{2n} - S_n \to 0$ quand $n \to +\infty$. Or

$$S_{2n} - S_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq n\,\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

On a une contradiction. Donc $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge. □

Remarque On montre que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1 + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n = \gamma \simeq 0,577\ldots$. Cette constante γ est appelée **constante d'Euler**.

9.1.2.4 Séries de Riemann

Définition On appelle **série de Riemann** une série numérique de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$ où α est un nombre réel.

La série harmonique est donc un cas particulier de série de Riemann, correspondant à $\alpha = 1$.

Théorème La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

9.1.3 Compléments

Définition On appelle **série alternée** une série numérique associée à une suite $(u_n)_n$ dont le signe change à chaque terme. On peut donc écrire $u_n = (-1)^n \, a_n$ avec $(a_n)_n$ de signe constant.

Théorème Si $(a_n)_n$ est une suite décroissant vers 0, alors la série alternée de terme général $(-1)^n a_n$ est convergente.

Définition La série de terme général u_n est dite **absolument convergente** si et seulement si $\sum |u_n|$ converge.

Théorème Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, alors elle est également convergente (on dit aussi : simplement convergente).

Démonstration Cette propriété découle directement de l'inégalité :

$$0 \le |S_n| = |u_0 + \ldots u_n| \ \le |u_0| + \ldots + |u_n| \qquad \square$$

9.2 Sommes de Riemann

9.2.1 Intégrabilité au sens de Riemann d'une fonction bornée sur un intervalle $[a, b]$

Soit $[a, b]$ un intervalle et f une fonction à valeurs réelles, définie et bornée sur $[a, b]$.

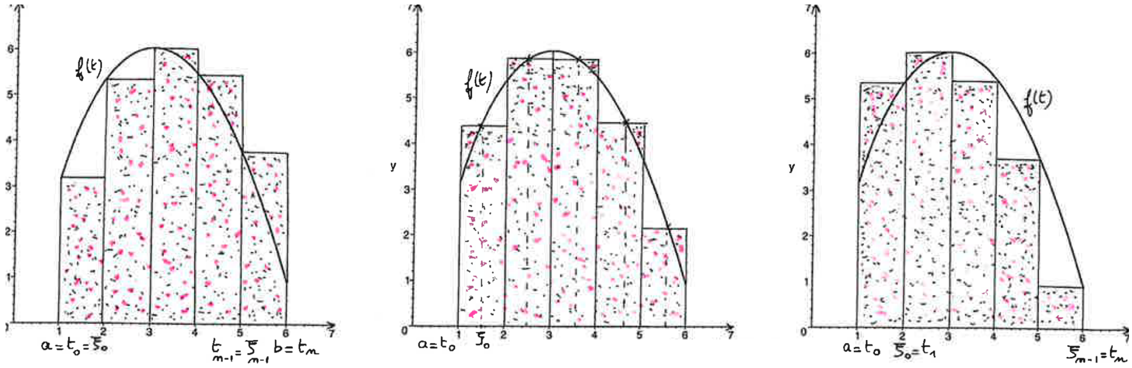
Définition On appelle **subdivision σ de $[a, b]$** tout ensemble fini de points $t_0, t_1, \ldots, t_n$ tel que $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$. La valeur $\delta(\sigma) = \max\limits_{k=0,\ldots,n-1} (t_{k+1} - t_k)$ est appelée le **pas de la subdivision**.

Définition On appelle **Somme de Riemann de f associée à la subdivision σ** toute expression de la forme

$$S(f; \sigma; \zeta) = \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k)\, f(\zeta_k)$$

où chaque $\zeta_k \in [t_k, t_{k+1}]$.

Géométriquement, il s'agit de la somme des surfaces des rectangles de base $[t_k, t_{k+1}]$ et de hauteur $f(\zeta_k)$.



3 exemples de sommes de Riemann, pour la même subdivision et 3 choix différents des points ζ_k : $\zeta_k = t_k$ (à gauche), $\zeta_k = (t_k + t_{k+1})/2$ (au centre), $\zeta_k = t_{k+1}$ (à droite).

Définition Une fonction f bornée sur $[a, b]$ est dite **Riemann-intégrable (ou intégrable au sens de Riemann) sur $[a, b]$** si et seulement si $S(f; \sigma; \zeta)$ admet une limite finie lorsque le pas de subdivision $\delta(\sigma)$ tend vers 0.

Cette limite, appelée **intégrale de Riemann de f entre a et b**, est notée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$.

On définit donc ainsi géométriquement une intégrale comme la surface sous une courbe.

Théorème Les fonctions continues par morceaux sont Riemann-intégrables. Les fonctions monotones sont Riemann-intégrables.

9.2.2 Des propriétés de l'intégrale qui en découlent directement

On conserve les mêmes notations qu'au paragraphe précédent.

Linéarité Pour toutes fonctions f et g et tous réels λ et μ, on a $\displaystyle\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$

Démonstration

$$\sum_{k=0}^{n-1} (t_{k-1} - t_k)\,(\lambda f + \mu g)(\zeta_k) = \lambda \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k-1} - t_k)\,f(\zeta_k) + \mu \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k-1} - t_k)\,g(\zeta_k)$$

D'où le résultat en passant à la limite quand $\delta(\sigma) \to 0$. □

Positivité Si f est à valeurs positives sur $[a, b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \geq 0.$

Démonstration Si f est à valeurs positives sur $[a, b]$, alors chaque somme de Riemann est positive. D'où le résultat en passant à la limite quand $\delta(\sigma) \to 0$. □

Valeur absolue $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt$

Démonstration $\displaystyle\left|\sum_{k=0}^{n-1} (t_{k-1} - t_k)\,f(\zeta_k)\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k-1} - t_k)\,|f(\zeta_k)|$. D'où le résultat en passant à la limite quand $\delta(\sigma) \to 0$. □

Relation de Chasles $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt$

Démonstration en mettant bout à bout une subdivision de $[a, b]$ et une subdivision de $[b, c]$. □

9.2.3 Lien avec les séries numériques

On considère une fonction f sur $[0, 1]$, et une subdivision régulière de $[0, 1]$: $t_k = \dfrac{k}{n}$, $k = 0, \ldots, n$.

La somme de Riemann vaut alors $S(f; \sigma; \zeta) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k)\, f(\zeta_k) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)$.

Si on fait le choix $\zeta_k = t_k$, on a donc :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)\,dt$$

Et de même si on fait le choix $\zeta_k = t_{k+1}$, on a donc :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)\,dt$$

La conséquence pratique de ces résultats est que l'on va pouvoir calculer la somme de certaines séries numériques en les identifiant à des sommes de Riemann. La méthode consiste alors à mettre $\dfrac{1}{n}$ en facteur dans la série numérique, et à identifier la fonction f telle que la somme partielle de la série soit sous la forme $\displaystyle\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Exemples

- $\displaystyle S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{n^2 + k^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + k^2/n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}$
- *On retrouve ainsi le fait que la série harmonique diverge. En effet :*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k/n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = -\lim_{\varepsilon\to 0} \ln \varepsilon = +\infty$$

Cette méthode ne suffit pas pour trouver la nature (et la somme éventuelle) de toute série numérique. Par exemple, si on considère la série de Riemann $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^\alpha}$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k/n)^\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha-1}} \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k/n)^\alpha}}_{\to \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}}$$

L'identification ne fonctionne pas. Pour $\alpha > 1$, le terme $1/n^{\alpha-1}$ tend vers 0 et $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ tend vers $+\infty$. On ne peut donc pas conclure sur la nature de la série numérique.

On verra au §9.3.3 qu'on peut également faire un lien naturel entre séries numériques et intégrales généralisées.

9.3 Intégrales généralisées

9.3.1 Définitions

Soit f une fonction définie sur $[a, +\infty[$.

Définition On dit que **l'intégrale généralisée** $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ existe (ou converge), si et seulement si $\lim\limits_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx$ existe et a une valeur finie.
Sinon on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ est divergente.

On procède de la même façon pour définir d'autres intégrales généralisées, dès lors que l'une au moins des bornes de l'intégrale est une extrémité ouverte du domaine de définition de f.
Par exemple : $\int_0^1 \frac{dx}{x}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\ldots$

Exemples

- $\int_0^b \frac{dt}{1+t^2} = \arctan b \underset{b\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$. *Donc* $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ *existe et vaut* $\frac{\pi}{2}$
- $\int_1^b \frac{dt}{t} = \ln b \underset{b\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. *Donc* $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ *diverge.*

9.3.2 Propriétés

- Si f est une fonction à valeurs positives sur $[a, +\infty[$ et si $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, alors $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$.
  Autrement dit, une condition nécessaire de convergence de l'intégrale généralisée en $+\infty$ est $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$.
- Si $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ et $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ convergent, alors $\int_a^{+\infty} (\lambda f + \mu g)(t)\,dt$ converge pour tous réels (λ, μ).

La réciproque est fausse. Par exemple, $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge mais $\int_1^{+\infty} \left(t + \frac{1}{t^2}\right) dt$ et $\int_1^{+\infty} (-t)\,dt$ divergent.

- Soient deux fonctions f et g telles que $0 \leq f(t) \leq g(t)$ $\forall t \in [a, +\infty[$.

  Si $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ converge, alors $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

  Si $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge, alors $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ diverge.
- Supposons que $f(t) \sim g(t)$ au voisinage de $+\infty$ (c.a.d. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$). Alors $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ et $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ sont de même nature, c'est-à-dire toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes.

- Si $\int_a^{+\infty} |f(t)|\,dt$ converge, alors $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, et $\left|\int_a^{+\infty} f(t)\,dt\right| \leq \int_a^{+\infty} |f(t)|\,dt$.

9.3.3 Lien avec les séries numériques

En considérant la subdivision régulière de $\mathbb{R}$ par les entiers naturels, on met en évidence un lien immédiat entre séries numériques et intégrales généralisées.

Ainsi par exemple pour les séries de Riemann :

Soit $\alpha > 0$. On a : $\quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [k, k+1], \quad \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \frac{1}{x^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$.

D'où
$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} = \int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)^\alpha}\,dx \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k^\alpha}\,dx = \frac{1}{k^\alpha}$$

d'où
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_1^{n+1} \frac{1}{x^\alpha} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$$

Or $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^\alpha} = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^\alpha} = -1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^\alpha}$. En posant $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$, on a donc :

$$\forall \alpha > 0, \quad -1 + S_{n+1} \leq \int_1^{n+1} \frac{1}{x^\alpha} \leq S_n$$

Donc :

- Si $\lim_{n\to+\infty} \int_1^{n+1} \frac{dx}{x^\alpha}$ est une valeur finie, alors la série numérique $\sum \frac{1}{k^\alpha}$ converge.
- Si $\lim_{n\to+\infty} \int_1^{n+1} \frac{dx}{x^\alpha} = +\infty$, alors la série numérique $\sum \frac{1}{k^\alpha}$ diverge.

Autrement dit : la série numérique $\sum \frac{1}{k^\alpha}$ et l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ sont de même nature.

Plus précisément, prenons par exemple le cas particulier $\alpha = 2$. On a $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \left[\frac{-1}{x}\right]_1^{+\infty} = 1$.

Le résultat précédent indique donc que la série $\sum \frac{1}{k^2}$ converge, et que $-1 + \sum_1^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq 1 \leq \sum_1^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Autrement dit : $1 \leq \sum_1^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq 2$.

Théorème Soit f une fonction à valeurs positives, définie et intégrable sur $[n_0, +\infty[$ (où $n_0 \in \mathbb{N}$), et décroissante vers 0.
Alors la série numérique $\sum f(n)$ et l'intégrale généralisée $\int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx$ sont de même nature.

Démonstration On a $\int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx = \sum_{k=n_0}^{+\infty} \int_k^{k+1} f(x)\,dx$. De plus, $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq f(k)$ car f est décroissante. D'où $\sum_{k=n_0+1}^{+\infty} f(k) \leq \int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{k=n_0}^{+\infty} f(k)$, et donc le résultat. $\square$

Si $\sum f(n)$ et $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx$ convergent, elles ne sont en général pas égales.

Ce théorème permet de démontrer la nature des séries de Riemann (§9.1.2.4), car on montre aisément que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Annexe A

Quelques rappels sur les polynômes

On ne va considérer ici que le cas de polynômes à coefficients réels.

A.1 Polynômes

- Un **polynôme** est une combinaison linéaire de puissances de x, c'est-à-dire une fonction de la forme $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.

$$P(x) = 3x^4 - x^2 + x - 4 \quad \text{est un polynôme}$$
$$f(x) = x^3 - x^2 + \frac{1}{x} \quad \text{n'est pas un polynôme}$$
$$Q(x) = \sqrt{5}\,x^3 + \frac{4}{3}x^2 - \pi \quad \text{est un polynôme}$$
$$g(x) = x^2 - \sqrt{x} \quad \text{n'est pas un polynôme.}$$

- Le **degré d'un polynôme** est la plus haute puissance apparaissant dans son expression.

$$P(x) = 3x^3 + x - 1 \quad \text{est un polynôme de degré 3.}$$
$$Q(x) = 3 \quad \text{est un polynôme de degré 0.}$$

- Les **racines d'un polynôme** $P(x)$ sont les valeurs de x telles que $P(x) = 0$.
- Si a est une racine du polynôme P, alors $P(x)$ est factorisable par $(x - a)$.
- Un polynôme de degré n a <u>au plus</u> n racines.

$P(x) = 3x^2 - 3x$ On constate facilement que $P(0) = 0$ et que $P(1) = 0$. Donc P est factorisable par x et par $(x - 1)$. Ce qui donne $P(x) = 3x(x - 1)$.

$Q(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3$ On a : $Q(x) = (x^2 - 1)(2x + 3) = (x - 1)(x + 1)(2x + 3)$. Les racines de Q sont donc $-\frac{3}{2}$, -1 et 1.

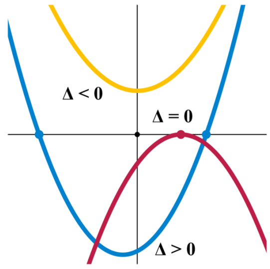
Un polynôme de degré n est factorisable par des polynômes de degré 1 (associés à chaque racine de P) et de degré 2 irréductibles (cf A.2), sous la forme

$$P(x) = a_n\,(x - x_1)^{m_1} \dots (x - x_r)^{m_r} (x^2 + b_1 x + c_1) \dots (x^2 + b_q x + c_q)$$

- Les réels distincts $x_1, \dots, x_r$ sont les racines de P. m_i est la **multiplicité** de la racine x_i.
- Si $m_i = 2$, x_i est une **racine double**. Si $m_i = 3$, x_i est une **racine triple**.
- Si x_i est une racine de multiplicité m_i, x_i est également racine de $P'(x), P''(x), \dots, P^{(m_i - 1)}(x)$.

A.2 Polynômes et équations du second degré

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un **polynôme du second degré** (donc $a \neq 0$). On dit aussi parfois un **trinôme du second degré**.



Sa courbe représentative est une **parabole**, orientée vers le haut si $a > 0$ et vers le bas si $a < 0$.
Elle peut donc couper l'axe des abscisses (c'est-à-dire valoir 0) pour 0, 1 ou 2 valeurs de x.

Une **équation du second degré** est une équation pouvant se ramener à la forme

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ avec } a, b, c \text{ des nombres réels et } a \neq 0$$

Théorème Soit l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$), et $\Delta = b^2 - 4ac$ (Δ est appelé le **discriminant** de l'équation).

- Si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution réelle.
- Si $\Delta = 0$, l'équation a une seule solution $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions : $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

Exemple

- $x^2 - 4x + 4 = 0$: *On a* $\Delta = 0$, *d'où* $x_0 = -\frac{-4}{2} = 2$ *est l'unique solution.*
- $-6x^2 - x + 1$: *On a* $\Delta = 25$, *d'où les deux solutions :* $x_1 = \frac{1+5}{-12} = -\frac{1}{2}$ *et* $x_2 = \frac{1-5}{-12} = \frac{1}{3}$.
- $5x^2 + 6x + 2 = 0$: *On a* $\Delta = -4$. *Il n'y a pas de solution réelle.*

Théorème Le trinôme $ax^2 + bx + c$ se factorise de la façon suivante :

Si $\Delta > 0$: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, où x_1 et x_2 sont les racines du trinôme.
Si $\Delta = 0$: $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$, où x_0 est la racine double du trinôme.
Si $\Delta < 0$, le trinôme n'est pas factorisable dans $\mathbb{R}$, il est dit **irréductible**.

Par identification, on voit que **la somme et le produit des racines** valent

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Par ailleurs, on voit également que le trinôme est de même signe que le coefficient a, sauf si x est situé entre les racines x_1 et x_2 (dans le cas $\Delta > 0$).

Exemple *Si l'on reprend l'exemple ci-dessus, on peut en déduire que :*

- $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$. *Il est toujours positif.*
- $-6x^2 - x + 1 = -6(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{3})$, *la somme des racines* $-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}$ *vaut bien* $-b/a$, *et le produit des racines* $-\frac{1}{2}\frac{1}{3} = -\frac{1}{6}$ *vaut bien* c/a. *Le trinôme est toujours négatif, sauf pour* $x \in]-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}[$.
- *le trinôme* $5x^2 + 6x + 2$ *est irréductible. Il est toujours positif.*

Annexe B

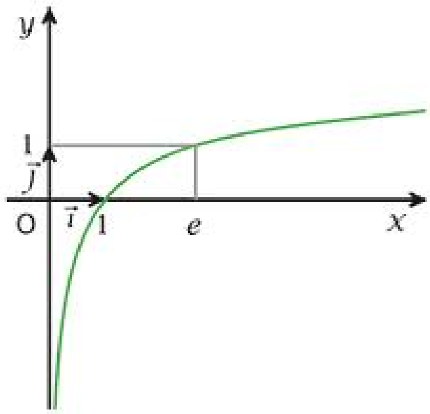
Fonctions logarithmes et exponentielles

B.1 Fonctions logarithmes

B.1.1 Logarithme népérien

Le **logarithme népérien** $\ln x$ est défini pour tout $x > 0$. On a :

- $\ln 1 = 0$
- $(\ln x)' = 1/x$ (d'où : $(\ln u(x))' = u'(x)/u(x)$)
- $\forall x, y > 0,\ \ln(xy) = \ln x + \ln y$
- $\forall x, y > 0,\ \ln(x/y) = \ln x - \ln y$
- $\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{Z},\ \ln(x^n) = n \ln x$
- $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$
- On note e le nombre tel que $\ln e = 1$. Sa valeur est environ $e \simeq 2,71828...$



On a aussi les limites remarquables suivantes : $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0.$

B.1.2 Logarithme décimal et logarithmes de base quelconque

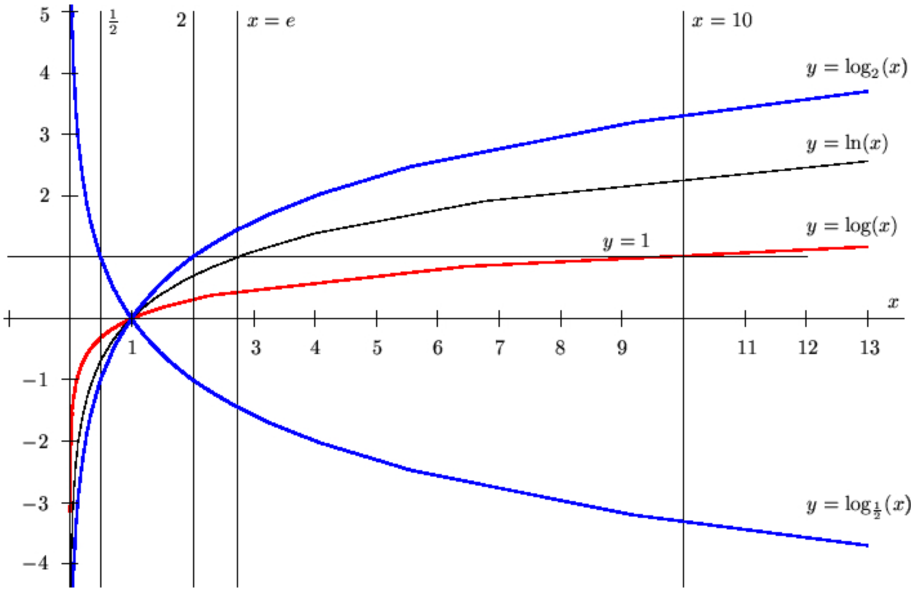
Définition On définit le **logarithme de base a**, pour tout réel a strictement positif et différent de 1, par

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Le logarithme népérien est donc aussi le logarithme de base e.
L'autre logarithme qui sert le plus souvent (notamment en physique et en chimie) est le **logarithme de base 10**, encore appelé **logarithme décimal**. En effet, il vérifie la propriété $\log_{10} 10^n = n$ et est utilisé couramment pour décrire des quantités pouvant varier sur de très grandes plages de valeurs.

Exemples

- *Pour caractériser l'acidité d'une solution aqueuse, on mesure sa concentration molaire en ions H_3O^+. Celle-ci varie typiquement entre 10^{-14} et 1. Mais on préfère plutôt utiliser la notion de pH, défini par $pH = -\log_{10}[H_3O^+]$, et qui varie donc entre 0 et 14.*
- *En sismologie, l'échelle de Richter, utilisée pour caractériser l'ampleur d'un séisme, est définie comme le logarithme décimal d'une amplitude. Par exemple, un séisme de magnitude 5 sur l'échelle de Richter est donc 10 fois plus puissant qu'un séisme de magnitude 4.*
- *En acoustique, le Bel est égal au logarithme décimal du rapport entre 2 puissances. Autrement dit, un son de 5 Bel, ou plus couramment 50 dB, est 10 fois plus puissant qu'un son de 4 Bel (ou 40 dB).*
- *Le logarithme décimal est utilisé pour les représentations graphiques dites "en échelle log". Dans ces représentations, la valeur est multipliée par 10 à chaque graduation.*



B.2 Fonctions exponentielles

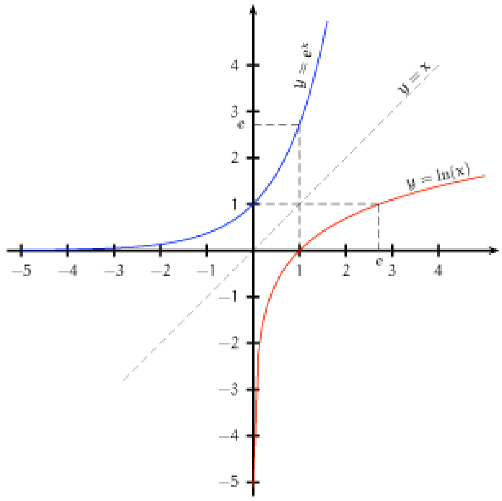
B.2.1 Exponentielle "naturelle"

Définition La fonction **exponentielle** (encore appelée **exponentielle naturelle** ou **exponentielle de base e**), notée $\exp(x)$ ou e^x, est la fonction réciproque du logarithme népérien. $\ln$ étant une fonction de $]0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$, $\exp$ est donc définie par :

$$\begin{aligned} \exp : \quad & \mathbb{R} \longrightarrow]0, +\infty[\\ & x \longrightarrow y = \exp(x) \text{ tel que } \ln y = x \end{aligned}$$

On déduit donc toutes les propriétés de la fonction exponentielle à partir des propriétés de la fonction $\ln$.

- $\exp(x)$ est défini sur $\mathbb{R}$.
- $\exp(0) = 1$ et $\exp(1) = e \simeq 2,71828...$
- $\exp'(x) = \exp(x)$
  (d'où : $[\exp(u(x))]' = u'(x)\exp(u(x))$)
- $\forall x, y,\ \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$
- $\forall x, y,\ \exp(x-y) = \exp(x)/\exp(y)$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$



On a aussi les limites remarquables suivantes : $\lim\limits_{x\to-\infty} x\exp(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\exp(x)}{x} = +\infty$

B.2.2 Exponentielles de base quelconque

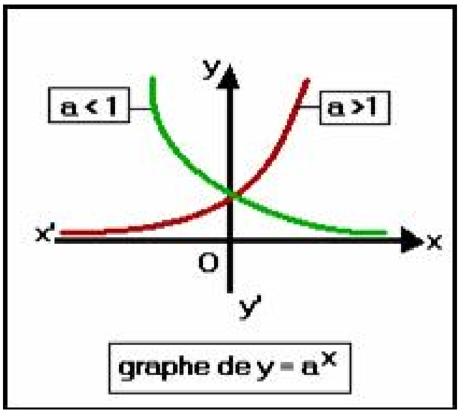
De la même façon qu'on a défini des logarithmes de base quelconque, on peut définir leurs fonctions réciproques, qui sont appelées **exponentielles de base quelconque**.
Ainsi, pour tout réel $a > 0$ différent de 1, on définit la fonction $\exp_a(x)$, également notée a^x par la relation : $(a^x = y) \Longleftrightarrow (x = \log_a y)$. Or $\log_a y = \ln y/\ln a$. D'où

$$a^x = \exp(x\,\ln a) = e^{x\ln a}$$

On en déduit que $(a^x)' = a^x\,\ln a$.

De plus, les fonctions exponentielles de base quelconque vérifient également la propriété de transformation d'une somme en produit : $a^{x+y} = a^x\,a^y$

Les deux valeurs de a les plus utilisées en pratique sont $a = 10$ (fonction 10^x, pour d'innombrables applications) et $a = 2$ (fonction 2^x, notamment dans le contexte de l'informatique).



Annexe C

Formulaire de trigonométrie

C.1 Cercle trigonométrique et angles remarquables

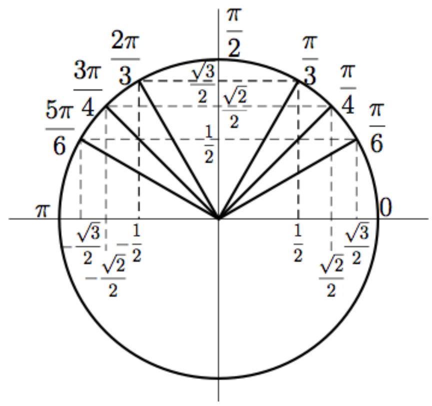
Soit un repère cartésien (O, Ox, Oy).

Définition Le **cercle trigonométrique** est le cercle de rayon 1 de centre O. Un point de ce cercle correspondant à un angle de x radians a pour coordonnées $(\cos x, \sin x)$.

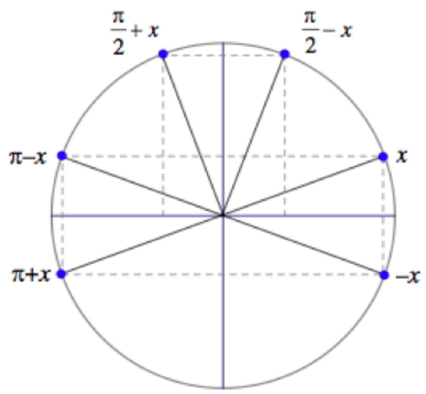
La tangente est définie par $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, pour $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Quelques angles remarquables :

x (en radians)	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
0	0	1	0
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
$\pi/2$	1	0	∞



On peut lire également sur le cercle trigonométrique les relations suivantes :



$$\begin{cases} \cos(-x) = \cos x \\ \sin(-x) = -\sin x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(\pi - x) = -\cos x \\ \sin(\pi - x) = \sin x \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos(\pi + x) = -\cos x \\ \sin(\pi + x) = -\sin x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(\dfrac{\pi}{2} - x) = \sin x \\ \\ \sin(\dfrac{\pi}{2} - x) = \cos x \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos(\dfrac{\pi}{2} + x) = -\sin x \\ \\ \sin(\dfrac{\pi}{2} + x) = \cos x \end{cases}$$

C.2 Formules de trigonométrie

Relation de Pythagore

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ (en divisant par $\cos^2 x$)

Formules d'addition

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

Angles doubles

$$\begin{aligned}\cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a \\ &= 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a\end{aligned}$$

$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

Linéarisation

$\cos^2 a = \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2a)$

$\sin^2 a = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2a)$

Transformation de produit en somme

$$\begin{aligned}\cos a \cos b &= \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)] \\ \sin a \sin b &= \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)] \\ \sin a \cos b &= \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]\end{aligned}$$

Transformation de somme en produit

$$\begin{aligned}\cos p + \cos q &= 2\, \cos \tfrac{p+q}{2} \cos \tfrac{p-q}{2} \\ \cos p - \cos q &= -2\, \sin \tfrac{p+q}{2} \sin \tfrac{p-q}{2} \\ \sin p + \sin q &= 2\, \sin \tfrac{p+q}{2} \cos \tfrac{p-q}{2} \\ \sin p - \sin q &= 2\, \cos \tfrac{p+q}{2} \sin \tfrac{p-q}{2}\end{aligned}$$

Transformation en fraction

Si l'on pose $t = \tan x/2$, on a :

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

En pratique Inutile de tout connaître par coeur : la connaissance de la relation de Pythagore $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ et des deux formules d'addition $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ et $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ permet de retrouver aisément toutes les autres formules.

Annexe D

Formulaires sur les dérivées

D.1 Opérations sur les dérivées

Soient u et v sont des fonctions dérivables. On a les relations :

$$\begin{array}{rcll}
(u+v)' & = & u'+v' & \\
(\lambda u)' & = & \lambda u' \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} & \\
(uv)' & = & u'v+uv' & \text{d'où par récurrence } (u^n)' = n\,u'\,u^{n-1} \\
\left(\dfrac{u}{v}\right)' & = & \dfrac{u'v-uv'}{v^2} & \text{donc en particulier } \left(\dfrac{1}{u}\right)' = \dfrac{-u'}{u^2} \\
(u\circ v)' & = & (u'\circ v)\times v' & \text{c'est-à-dire : } [u(v(x))]' = u'(v(x))\times v'(x) \\
\text{d'où } (u(x+a))' & = & u'(x+a) & \\
\text{et } (u(\alpha x))' & = & \alpha\, u'(\alpha x) &
\end{array}$$

D.2 Dérivée $n^{\text{ème}}$ d'un produit : formule de Leibniz

Soit n un entier naturel, et soient f et g deux fonctions définies et dérivables jusqu'à l'ordre n sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. La dérivée d'ordre n du produit fg est donnée par la formule de Leibniz :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}\, g^{(n-k)}$$

où $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ est le coefficient "binomial" (appelé ainsi car apparaissant dans la formule du binôme de Newton donnant l'expression de $(a+b)^n$), ou encore le nombre de combinaisons de k éléments parmi n.

Pour $n=0$, on a : $fg = fg$. Pour $n=1$, on retrouve : $(fg)' = f'g+fg'$. Et pour $n>1$, on a directement les expressions de la dérivée $n^{\text{ème}}$ du produit. Par exemple pour $n=2$: $(fg)'' = f''g+2f'g'+fg''$.

D.3 Dérivées des fonctions usuelles

	Fonction		**Dérivée**
	x^α	$(\alpha \in \mathbb{R}^*)$	$\alpha x^{\alpha-1}$
En particulier :	$\dfrac{1}{x}$		$-\dfrac{1}{x^2}$
et	$\sqrt{x}$		$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
	$\sin x$		$\cos x$
	$\cos x$		$-\sin x$
	$\tan x$		$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
	$\sinh x$		$\cosh x$
	$\cosh x$		$\sinh x$
	$\tanh x$		$\dfrac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$
	$\ln x$		$\dfrac{1}{x}$
	e^x		e^x
	$\arcsin x$		$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$\arccos x$		$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$\arctan x$		$\dfrac{1}{1+x^2}$

Annexe E

Rappels d'intégration

Pour les calculs de primitives et d'intégrales, on dispose de trois outils principaux : le formulaire des primitives usuelles, et les techniques d'intégration par parties et de changement de variable.

E.1 Formulaire de primitives usuelles

	Fonction		Primitives
	x^α	$(\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1)$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
et aussi	$(x-a)^\alpha$	$(\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1)$	$\dfrac{(x-a)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
	$\dfrac{1}{x}$		$\ln\lvert x\rvert + C$
et aussi	$\dfrac{1}{x-a}$		$\ln\lvert x-a\rvert + C$
	e^x		$e^x + C$
et aussi	$e^{\alpha x}$	$\alpha \neq 0$	$\frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} + C$
	$\cos x$		$\sin x + C$
et aussi	$\cos(\alpha x)$	$\alpha \neq 0$	$\dfrac{1}{\alpha}\sin(\alpha x) + C$
	$\sin x$		$-\cos x + C$
et aussi	$\sin(\alpha x)$	$\alpha \neq 0$	$\dfrac{-1}{\alpha}\cos(\alpha x) + C$
	$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$		$\tan x + C$
	$\dfrac{1}{1+x^2}$		$\arctan x + C$
et aussi	$\dfrac{1}{a^2+x^2}$	$a \neq 0$	$\dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a} + C$

	Fonction		Primitives
	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$		$\ln(x+\sqrt{x^2+1})+C$
et aussi	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$	$a \neq 0$	$\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$
	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$		$\ln\|x+\sqrt{x^2-1}\|+C$
et aussi	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$	$a \neq 0$	$\ln\|x+\sqrt{x^2-a^2}\|+C$
	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		$\arcsin x + C$
et aussi	$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$a \neq 0$	$\arcsin \dfrac{x}{a} + C$
	$\cosh x$		$\sinh x + C$
et aussi	$\cosh(\alpha x)$	$\alpha \neq 0$	$\dfrac{1}{\alpha}\sinh(\alpha x)+C$
	$\sinh x$		$\cosh x + C$
et aussi	$\sinh(\alpha x)$	$\alpha \neq 0$	$\dfrac{1}{\alpha}\cosh(\alpha x)+C$
	$\dfrac{1}{\cosh^2 x} = 1-\tanh^2 x$		$\tanh x + C$

NB Ce tableau permet de calculer un grand nombres de primitives si on le combine avec la formule de composition des dérivées :

$$[f(u(x))]' = u'(x) \times f'(u(x))$$

Exemples

- *fonction* $u'\,u^a$, $a \neq -1$ $\quad\longrightarrow\quad$ *primitives :* $\dfrac{u^{a+1}}{a+1}+C$
- *fonction* $u'e^u$ $\quad\longrightarrow\quad$ *primitives :* e^u+C
- *fonction* $\dfrac{u'}{u}$ $\quad\longrightarrow\quad$ *primitives :* $\ln|u|+C$

E.2 Intégration par parties

En intégrant la formule $(uv)' = uv' + u'v$, on a $\int_a^b (uv)' = [uv]_a^b = \int_a^b uv' + \int_a^b u'v$. D'où les **formules d'intégration par parties** :

$$\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v \qquad \text{et} \qquad \int u'v = uv - \int uv'$$

Exemples

- $\int \ln x \; dx$ — *En posant $u = x$ et $v = \ln x$:*

$$\int \ln x \; dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

- $\int e^x \cos x \; dx$ — *En posant $u = e^x$ et $v = \cos x$:*

$$\int e^x \cos x \; dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x \; dx \quad (1)$$

Puis en posant $u = e^x$ et $v = \sin x$:

$$(1) = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x \; dx$$

D'où $\displaystyle \int e^x \cos x \; dx = \frac{1}{2}(e^x \cos x + e^x \sin x) + C$

E.3 Changement de variable

Un changement de variable sert à transformer une intégrale pour se ramener à une intégrale plus simple à calculer :

$$I = \int_a^b f(x) \, dx$$

S'il apparait que $f(x)$ s'écrit sous la forme $h(g(x))g'(x)$, on pose $u = g(x)$. On a alors $du = g'(x) \, dx$ et donc :

$$I = \int_{g(a)}^{g(b)} h(u) \, du$$

Exemples

- $I = \int_a^b \frac{dx}{x \ln x}$ *avec $1 < a < b$* — *On pose $u = \ln x$. Alors $du = dx/x$, d'où :*

$$I = \int_{x=a}^{x=b} \frac{dx}{x \ln x} = \int_{u=\ln a}^{u=\ln b} \frac{du}{u} = [\ln |u|]_{\ln a}^{\ln b} = \ln |\ln b| - \ln |\ln a|$$

- $I = \int_a^b x e^{x^2} \, dx$ — *On pose $u = x^2$. Alors $du = 2x \; dx$, d'où :*

$$I = \int_{x=a}^{x=b} x e^{x^2} \, dx = \frac{1}{2} \int_{u=a^2}^{u=b^2} e^u \, du = \frac{1}{2} [e^u]_{a^2}^{b^2} = \frac{e^{b^2} - e^{a^2}}{2}$$

Ne pas oublier de faire le changement de variable sur les bornes.

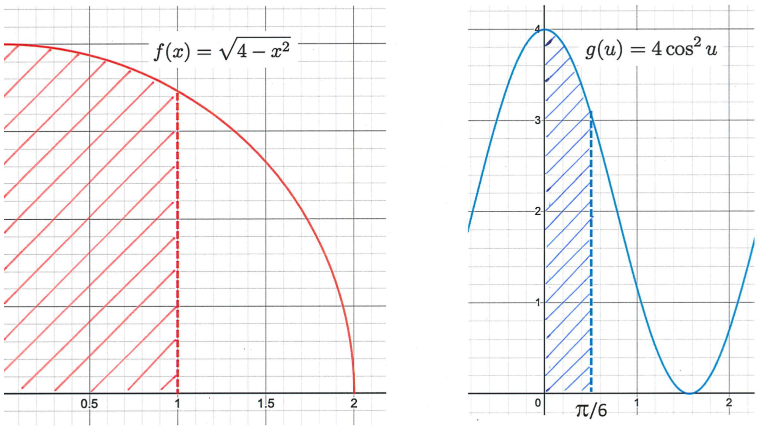
Des changements de variable classiques

- Pour un terme en $\sqrt{a^2-x^2}$, on peut penser au changement de variable $x = a\sin u$.

  Par exemple, pour calculer $I = \int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx$: on pose $x = 2\sin u$. D'où $dx = 2\cos u\,du$ et $u = \arcsin(x/2)$. De plus, si $x=0$ on a $u = \arcsin 0 = 0$, et si $x=1$ on a $u = \arcsin(1/2) = \pi/6$. On a donc :

$$I = \int_{x=0}^{x=1} \sqrt{4-x^2}\,dx = \int_{u=0}^{u=\pi/6} \sqrt{4-4\sin^2 u}\,(2\cos u)\,du = 4\int_{u=0}^{u=\pi/6} \cos^2 u\,du$$

$$= 4\int_{u=0}^{u=\pi/6} \frac{1+\cos 2u}{2}\,du = \left[\ 2u+\sin 2u\,\right]_{u=0}^{u=\pi/6} = \frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}-(0+\sin 0) = \frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$



Le changement de variable correspond à montrer que les 2 zones hachurées ont la même surface.

- Pour une fraction avec des fonctions $\sin x$ et $\cos x$, on peut poser $t = \tan\frac{x}{2}$.

  D'où $dt = \frac{1}{2}\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)dx$, c'est-à-dire $dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$.

  On a aussi, grâce aux formules de trigonométrie : $\sin x = \frac{2\,t}{1+t^2}$ et $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

  On va donc transformer la fonction initiale en une fraction rationnelle.

  Par exemple :

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}}\,\frac{2\,dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$$

Annexe F

Etude des branches infinies - asymptotes obliques

F.1 Définitions

Une asymptote à une fonction f est une droite dont la courbe représentative de f, notée $\mathcal{C}_f$, se rapproche infiniment près, en général sans jamais l'atteindre. On distingue deux types d'asymptotes : les asymptotes verticales et les asymptotes obliques (qui incluent le cas des asymptotes horizontales).

Définition Soit f une fonction et x_0 un point n'appartenant pas au domaine de définition de f. On dit que la droite d'équation $x = x_0$ est **asymptote verticale** à $\mathcal{C}_f$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$.

Définition Soit f une fonction. On dit que la droite d'équation $y = a\,x+b$ est **asymptote oblique** à $\mathcal{C}_f$ en $\pm\infty$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - (a\,x+b)] = 0$.

Une asymptote horizontale est donc un cas particulier des asymptotes obliques, correspondant à $a = 0$.

Définition Soit f une fonction. On dit que f, ou que $\mathcal{C}_f$, présente une **branche infinie** si et seulement si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

F.2 Recherche d'une asymptote oblique

Le cas des asymptotes horizontales est trivial : celles-ci sont identifiées dès lors qu'on calcule $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$. En effet, la droite $y = b$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $\pm\infty$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$.

On va donc considérer maintenant le cas où la fonction f présente une branche infinie. On cherche alors à savoir si cette branche infinie admet une asymptote oblique, et si oui, on cherche à déterminer la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à cette asymptote (au-dessus, en-dessous, ou oscillant autour de l'asymptote). Il y a deux approches pour déterminer ces informations, celle par développement asymptotique étant en général de loin la plus rapide.

F.2.1 Méthode 1 : approche "classique"

La démarche est la suivante (on prend ci-dessous l'exemple d'une recherche d'asymptote en $+\infty$, c'est évidemment similaire en $-\infty$) :

- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Si cette limite est infinie, il n'y a pas d'asymptote.
- Si cette limite est finie, on la note a. Il y a alors peut-être une asymptote, et on calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - a\,x)$.
  - Si cette limite est infinie, il n'y a pas d'asymptote, mais on dit qu'il y a tout de même une **direction asymptotique de pente** a.
  - Si cette limite est finie, on la note b. Il y a alors une asymptote d'équation $y = a\,x + b$.
- Enfin, s'il y a une asymptote oblique (d'équation $y = ax+b$), on étudie le signe de $f(x)-(ax+b)$ pour déterminer la position de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à cette asymptote.
  - Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (ax + b) = 0^+$ (c'est-à-dire si $f(x)-(ax+b) \geq 0$ pour tout x suffisamment grand), alors la courbe est au-dessus de l'asymptote.
  - Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (ax + b) = 0^-$ (c'est-à-dire si $f(x)-(ax+b) \leq 0$ pour tout x suffisamment grand), alors la courbe est en-dessous de l'asymptote.
  - Si le signe de $f(x)-(ax+b)$ ne se stabilise jamais quand x tend vers l'infini, alors la courbe oscille autour de l'asymptote.

Explication Supposons que f admette une asymptote oblique d'équation $y = a\,x + b$ en $+\infty$ (le raisonnement est identique en $-\infty$). Ceci signifie que $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (a\,x + b)] = 0$. En divisant par x, on en déduit que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{f(x)}{x} - a - \dfrac{b}{x}\right] = 0$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{b}{x} = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$. Cette égalité permet de trouver a. Et une fois a connu, on peut reformuler la définition de l'asymptote pour trouver b : $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - a\,x) = b$.

F.2.2 Méthode 2 : par développement asymptotique

On a vu au §4.6 qu'un développement asymptotique (c'est-à-dire l'approximation d'une fonction $f(x)$ quand $x \to \pm\infty$ grâce à un changement de variable $X = 1/x$ et à un développement limité en fonction de X au voisinage de 0) peut fournir en un seul calcul l'ensemble des informations utiles. Ainsi, si f admet une asymptote quand $x \to \pm\infty$, un tel développement aboutira dans la plupart des cas à une expression du type $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$. L'équation de l'asymptote sera donc $y = ax + b$, et la position de la courbe par rapport à l'asymptote sera donnée par le signe de c.

F.3 Exemples

Un premier exemple de calcul d'une asymptote oblique par l'approche "classique" est donné au §1.2.3, et un exemple par développement asymptotique au §4.6.3.

Voici un exemple supplémentaire.

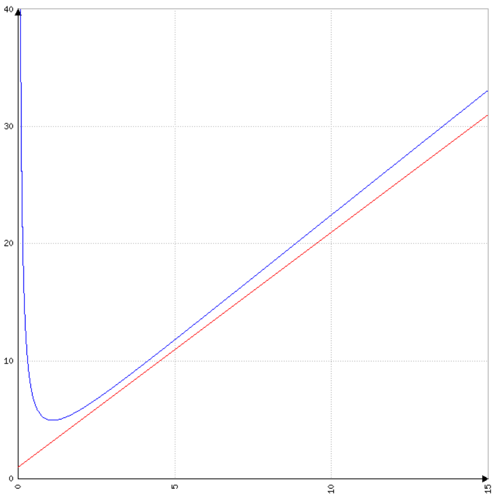
https://www.youtube.com/watch?v=ZHbyLGOUotQ

Considérons la fonction $f(x) = 2x + \sqrt{x} - 1 + 3/x$, définie sur $]0, +\infty[$.

On a $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$. Donc f admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 2x) = +\infty$. La fonction f admet donc une direction asymptotique de pente 2, mais pas d'asymptote en $+\infty$.

Ceci est illustré sur le dessin ci-contre, où l'on voit que la courbe s'écarte petit à petit d'une droite qui est pourtant de pente 2.



F.4 Asymptotes et tangentes

Tangentes et asymptotes sont deux notions différentes.

- Une asymptote est une droite dont la courbe $\mathcal{C}_f$ se rapproche infiniment près quand x tend vers une extrémité ouverte de son domaine de définition ($\pm\infty$ pour une asymptote oblique, une valeur $a \in \mathbb{R}$ borne du domaine de définition de f pour une asymptote verticale).
- Une tangente est une droite dont la valeur et la pente coïncident avec la valeur et la pente de $\mathcal{C}_f$ pour une abscisse donnée x_0.
  Son équation est : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

On parle donc de *tangente à la courbe en* x_0 mais pas d'*asymptote à la courbe en* x_0 (sauf asymptote verticale).

On parle donc d'*asymptote à la courbe en* $\pm\infty$ mais pas de *tangente à la courbe en* $\pm\infty$.