IUP-GSI 2$^{\text{ème}}$ année Novembre 2005

TP de Mathématiques n^{0}1

Interpolation de Lagrange

Interpolation à une variable

On se donne une fonction f définie sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ ainsi qu'un vecteur $t = (t_1, \cdots, t_n)$ d'abscisses tel que $t_1 = a$, $t_n = b$ et $t_k < t_{k+1}$ $k = 1, \cdots, n-1$.
On définit le vecteur $y = (y_1, \cdots, y_n)$ par $y_k = f(t_k)$ pour $k = 1, \cdots, n$.
On se propose de chercher l'unique polynôme P de degré inférieur ou égal à $n-1$ tel que $P(t_k) = y_k$ pour $k = 1, \cdots, n$.
Une manière de le faire consiste à exprimer ce polynôme à l'aide des polynômes de Lagrange basés sur les abscisses d'interpolation t_i $i = 1, \cdots, n$.
Le i^{eme} polynôme de Lagrange s'écrit :

$$L_i(t) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{j=n} \frac{t - t_j}{t_i - t_j}$$

On remarque que $L_i(t_i) = 1$ $i = 1, \cdots, n$ et que $L_i(t_j) = 0$ si $i \neq j$.

Notre solution s'écrit alors :

$$\sum_{i=1}^{i=n} y_i \, L_i(t)$$

Le fichier que vous avez récupéré contient une fonction nommée Lagrange qui demande la saisie de quatre paramètres.

Exemple sous MatLab : Lagrange(0,1,3,30)

Cet appel permet de travailler sur l'intervalle $[0, 1]$ (les deux premiers paramètres) en demandant trois abscisses d'interpolation équi-réparties (3$^{\text{ème}}$ paramètre) et en représentant graphiquement les résultats à l'aide de 30 valeurs (dernier paramètre).

Une fois cette commande exécutée vous allez voir apparaître le graphe de la fonction f accompagné de celui du polynôme d'interpolation P et le graphe de la fonction d'erreur $|f - P|$.

La fonction f que l'on cherche à interpoler est définie “en dur” dans le programme. Par défaut, il s'agit de la fonction *sinus*. Pour la changer, il vous faudra modifier les deux lignes pertinentes du programme fourni.

Questions

0. Effectuer l'interpolation de la fonction $f(x) = \sin(x)$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ en 5 points, et avec le dernier paramètre de la fonction *Lagrange* égal à 5. Comment expliquer ce résultat ? Dorénavant on prendra ce dernier paramètre suffisamment grand par rapport au nombre de points d'interpolations.

1. Effectuer l'interpolation de la fonction $f(x) = \sin(x)$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ avec un polynôme de degré variant entre 1 et 15 (ou plus) et observer ce qui se passe.

2. Numériquement, peut-on dire que les polynômes d'interpolation convergent vers la fonction lorsque que leur degré augmente ?

3. On considère maintenant la fonction $f(x) = |x|$ sur l'intervalle $[-1, 1]$. Interpoler cette fonction avec des polynômes de degré compris entre 1 et 20 et noter le comportement observé. Vaut-il mieux interpoler $|x|$ en un nombre pair ou impair de points ? Le polynôme est-il de degré pair ou impair dans ce cas ?

4. Peut-on conclure à la convergence numérique des polynômes interpolateurs vers $|x|$? Proposer un explication quant à la différence de comportement par rapport à la question 2.

5. Refaire l'étude précédente avec la fonction $x \to \frac{1}{1+8x^2}$ sur $[-1, 1]$. Quel est le comportement des polynômes interpolateurs dans ce cas ? Pouvez-vous l'expliquer ?

Interpolation à deux variables

On se donne une fonction f définie sur un domaine fermé borné $[a, b] \times [c, d]$. Soit $x = (x_1, \cdots, x_n)$ un vecteur tel que $x_1 = a$, $x_n = b$ et $x_k < x_{k+1}$ $k = 1, \cdots, n-1$. Soit $y = (y_1, \cdots, y_m)$ un vecteur tel que $y_1 = c$, $y_m = d$ et $y_k < y_{k+1}$ $k = 1, \cdots, m-1$. On définit la matrice $Z = (z_{i,j})_{i=1..n; j=1..m}$ par $z_{i,j} = f(x_i, y_j)$ pour $i = 1, \cdots, n$ et $j = 1, \cdots, m$.
On se propose de chercher un polynôme P de degré en x inférieur ou égal à $n-1$ et de degré en y inférieur ou égal à $m-1$ tel que $P(x_i, y_j) = z_{i,j}$ pour $i = 1, \cdots, n$ et $j = 1, \cdots, m$.
Conformément au cours, notre solution s'écrit alors :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} z_{i,j} \, L_i^n(x) L_j^m(y)$$

où les L_i^n sont les polynômes de Lagrange basés sur les x_i et les L_j^m les polynômes de Lagrange basés sur les y_j.

Une autre fonction MatLab est disponible dans le fichier que vous avez chargé.

Exemple sous MatLab : `Lag2D(0,1,-1,1,3,4,30,20)`

Cet appel permet de travailler sur le domaine $[0, 1] \times [-1, 1]$ (les quatre premiers paramètres) en demandant trois abscisses d'interpolation équi-réparties sur la première variable et quatre sur la deuxième ($5^{\text{ème}}$ et $6^{\text{ème}}$ paramètres) et en représentant graphiquement les résultats à l'aide de 30 valeurs dans la première direction et 20 valeurs dans la deuxième (deux derniers paramètres).

Questions

6. Retrouver les mêmes comportements qu'en dimension 1, en expérimentant l'interpolation 2D sur une fonction pour laquelle la convergence numérique semble se produire, et sur une fonction pour laquelle elle semble échouer.