Logiques diagrammatiques et effets de bord

Dominique Duval, avec
Jean-Claude Reynaud, Christian Lair, Jean-Guillaume Dumas

Groupe de Travail “Sémantique et Réalisabilité” de l’équipe PPS
Paris, 17 juin 2008

Outline

Produit séquentiel

Logiques diagrammatiques

Effets de bord

Une fonction est dite **à effet de bord** si elle modifie un état, en plus de retourner (éventuellement) un résultat.

Pour une fonction à effet de bord avec plusieurs arguments, si l'ordre d'évaluation des arguments n'est pas spécifié, le résultat est imprévisible.

Exemple. En C : `a[i]=++i;`

Question. Trouver un formalisme pour

imposer un ordre d'évaluation

Le problème

- **Sans** effet de bord :

  $$f_1 \times f_2 : (a_1, a_2) \mapsto (f_1(a_1), f_2(a_2))$$

  peut être décomposé en :

  $$f_1 \times f_2 = (\mathrm{id} \times f_2) \circ (f_1 \times \mathrm{id}) :$$
  $$(a_1, a_2) \mapsto (f_1(a_1), a_2) \mapsto (f_1(a_1), f_2(a_2))$$

- **Avec** effets de bord, $f_1 \times f_2$ est ambigü,
  mais $(\mathrm{id} \times f_2) \circ (f_1 \times \mathrm{id})$ ne l'est pas :
  "calculer d'abord $f_1(a_1)$, puis $f_2(a_2)$"

Question. Formaliser *"calculer $f(a_1)$ et conserver a_2"* :

$$\boxed{f \times \mathrm{id} : (a_1, a_2) \mapsto (f(a_1), a_2)}$$

Monades

Étant donnée une monade $(M : C \to C, \mu, \eta)$,
sa catégorie de Kleisli K est définie par :

- un X dans K pour tout X dans C
- un $f : X \to Y$ dans K pour tout $f : X \to M(Y)$ dans C
- composition dans K : grâce à la multiplication μ
- identités dans K : grâce à l'unité η,

d'où un foncteur $F : C \to K$, qui est l'identité sur les objets.

Exemples. Erreur : $M(X) = X + 1$. État : $M(X) = (S \times X)^S$.

[Moggi 1991], Haskell :
une monade traduit une forme d'"effet de bord"
elle fournit deux sortes de fonctions :

- calculs $\boxed{X \to Y}$ dans K, peut-être avec effet,
- valeurs $\boxed{X \rightsquigarrow Y}$ dans C, sans effet

et toute valeur peut être vue comme un calcul

Catégories de Freyd

[Power-Robinson 1997] : une **catégorie de Freyd** est

- une catégorie C à produits finis $v_1 \times v_2$,
- une catégorie prémonoïdale symétrique K,
  avec deux **semi-produits** $f \times v$ et $v \times f$
- et un foncteur $F : C \to K$ qui est l'identité sur les objets
  et qui préserve la structure (donc $v_1 \times v_2$ non ambigü)

Il y a deux sortes de fonctions :

- fonctions (générales) $\boxed{X \to Y}$ dans K, peut-être avec effet
- fonctions pures $\boxed{X \rightsquigarrow Y}$ dans C, sans effet

et toute fonction pure peut être vue comme une fonction

[Hughes 2000], indépendamment : **"arrows"**
pour généraliser les monades en Haskell. En fait les "arrows" correspondent aux catégories de Freyd

Produit séquentiel

Dans une catégorie de Freyd, on peut définir
un **produit séquentiel** pour *"calculer $f_1(a_1)$ puis $f_2(a_2)$"* :

$$\boxed{f_1 \ltimes f_2 = (\mathrm{id}_{Y_1} \times f_2) \circ (f_1 \times \mathrm{id}_{X_2})}$$

- D'où un ("vrai") produit $\times$ sur C
- et un produit séquentiel $\ltimes$ sur K, prolongeant $\times$

$$\begin{tikzcd}
X_i \arrow[r, squiggly, "v_i"] & Y_i \\
X_1 \times X_2 \arrow[u, squiggly] \arrow[r, squiggly, "v_1 \times v_2"] \arrow[ur, phantom, "="] & Y_1 \times Y_2 \arrow[u, squiggly]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X_i \arrow[r, "f_i"] & Y_i \\
X_1 \times X_2 \arrow[u, squiggly] \arrow[r, "f_1 \ltimes f_2"] \arrow[ur, phantom, "\text{(RIEN)}"] & Y_1 \times Y_2 \arrow[u, squiggly]
\end{tikzcd}$$

Notre remarque. Pour les fonctions à effet de bord,
le produit tensoriel vérifie "quelque chose",
qui n'est pas pris en compte par les catégories de Freyd

Catégories à effets

Comme dans les autres formalismes, nous distinguons deux catégories $C \subseteq K$ avec les mêmes objets, et donc :

- des fonctions (générales) $\boxed{\longrightarrow}$ dans K, peut-être avec effet
- et des fonctions pures $\boxed{\rightsquigarrow}$ dans C, sans effet

De plus, nous distinguons deux sortes d'équations :

- les égalités $\boxed{=}$
- et des semi-équations $\boxed{\lesssim}$ ("égalité faible") telles que
  - $\lesssim$ est un **préordre**
  - sur les fonctions pures, $\lesssim$ est l'égalité
  - **substitution** :
    si $g_1 \lesssim g_2$ alors $g_1 \circ f \lesssim g_2 \circ f$
  - **remplacement pur** (très restrictif) :
    si $g_1 \lesssim g_2$ et v pure alors $v \circ g_1 \lesssim v \circ g_2$

Catégories cartésiennes à effets

Une **catégorie cartésienne à effets** est une catégorie à effets $(C \subseteq K, \lesssim)$, avec des produits purs et des **semi-produits** :

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, squiggly, "v_1"] & Y_1 \\
X_1 \times X_2 \arrow[u, squiggly] \arrow[r, squiggly, "v_1 \times v_2"] \arrow[d, squiggly] \arrow[ur, phantom, "="] & Y_1 \times Y_2 \arrow[u, squiggly] \arrow[d, squiggly] \\
X_2 \arrow[r, squiggly, "v_2"] \arrow[ur, phantom, "="] & Y_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "f_1"] & Y_1 \\
X_1 \times X_2 \arrow[u, squiggly] \arrow[r, "f_1 \times v_2"] \arrow[d, squiggly] \arrow[ur, phantom, "="] & Y_1 \times Y_2 \arrow[u, squiggly] \arrow[d, squiggly] \\
X_2 \arrow[r, squiggly, "v_2"] \arrow[ur, phantom, "\gtrsim"] & Y_2
\end{tikzcd}$$

Autrement dit :
une **catégorie cartésienne à effets** est une catégorie de Freyd avec une structure de 2-catégorie fournie par un préordre qui est l'égalité sur les fonctions pures
et qui vérifie la substitution et le remplacement pur

Exemple : “erreur”

- les fonctions $X \to Y$ peuvent être partielles
- les fonctions pures $X \rightsquigarrow Y$ sont les fonctions totales
- $\lesssim$ est la **relation d’ordre** sur les fonctions partielles : soient $f, g : X \to Y$, alors $f \lesssim g \iff$ $\mathcal{D}(f) \subseteq \mathcal{D}(g)$ et $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}(f)$

$$
\begin{tikzcd}
x_1 \arrow[r, mapsto, "f"] \arrow[d, squiggly, leftrightarrow] \arrow[dr, phantom, "="] & f(x_1) \text{ ou } \bot \arrow[d, squiggly, leftrightarrow] \\
(x_1, x_2) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, squiggly, leftrightarrow] \arrow[dr, phantom, "\gtrsim"] & (f(x_1), x_2) \text{ ou } \bot \arrow[d, squiggly, leftrightarrow] \\
x_2 \arrow[r, mapsto, squiggly, "\mathrm{id}"] & x_2 \text{ Vs. } x_2 \text{ ou } \bot
\end{tikzcd}
$$

Exemple : “état”

- les fonctions $X \to Y$ peuvent utiliser et modifier l’état
- les fonctions pures $X \rightsquigarrow Y$ n’utilisent ni ne modifient l’état
- $\lesssim$ (ou $\simeq$) est la **relation d’équivalence** “même résultat” :
  soient $f, g : X \to Y$, alors $f \simeq g \iff$
  pour tout argument (dans X),
  f et g renvoient le même résultat (dans Y),
  mais peuvent modifier l’état de façon différente

$$
\begin{tikzcd}
(s, x_1) \arrow[r, mapsto, "f"] \arrow[d, leftrightsquigarrow] \arrow[dr, phantom, "="] & f(s, x_1) = (s', y_1) \arrow[d, leftrightsquigarrow] \\
(s, x_1, x_2) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, leftrightsquigarrow] \arrow[dr, phantom, "\simeq"] & (s', y_1, x_2) \arrow[d, leftrightsquigarrow] \\
(s, x_2) \arrow[r, mapsto, rightsquigarrow, "\mathrm{id}"] & (s, x_2) \text{ Vs. } (s', x_2)
\end{tikzcd}
$$

Un produit “faible”

Théorème. Un produit séquentiel est un produit “faible” : pour tous $f_1 : X_1 \to Y_1$, $f_2 : X_2 \to Y_2$, $x_1 : U \rightsquigarrow X_1$, $x_2 : U \rightsquigarrow X_2$:

$$\begin{array}{rcl} q_1 \circ (f_1 \ltimes f_2) \circ \langle x_1, x_2 \rangle & \lesssim & f_1 \circ x_1 \\ q_2 \circ (f_1 \ltimes f_2) \circ \langle x_1, x_2 \rangle & = & f_2 \circ x_2 \circ \langle\,\rangle \circ f_1 \circ x_1 \end{array}$$

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, squiggly, "x_1"] \arrow[d, equal] & X_1 \arrow[r, "f_1"] & Y_1 \\
U \arrow[r, squiggly, "\langle x_1, x_2 \rangle"] \arrow[d, equal] & X_1 \times X_2 \arrow[r, "f_1 \ltimes f_2"] \arrow[u, phantom, "\gtrsim"] & Y_1 \times Y_2 \arrow[u, squiggly, "q_1"'] \arrow[d, squiggly, "q_2"] \\
U \arrow[r, squiggly, "x_1"] & X_1 \arrow[r, "f_1"] & Y_1 \arrow[d, squiggly, "\langle\,\rangle"'] \arrow[u, phantom, "="] \\
 & & U \arrow[r, squiggly, "x_2"] & X_2 \arrow[r, "f_2"] & Y_2
\end{tikzcd}$$

Une preuve “décorée”

Schéma de la preuve du théorème.

1. Oublier les décorations :

$$
\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "x_1"] \arrow[d, equal] & X_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[dr, phantom, "="] & Y_1 \\
U \arrow[r, "\langle x_1, x_2 \rangle"] \arrow[d, equal] & X_1 \times X_2 \arrow[r, "f_1 \ltimes f_2"] & Y_1 \times Y_2 \arrow[u, "q_1"'] \arrow[dd, "q_2"] \\
U \arrow[r, "x_1"] & X_1 \arrow[r, "f_1"] & Y_1 \arrow[d, "\langle\,\rangle"'] \arrow[dr, phantom, "="] & & \\
 & & U \arrow[r, "x_2"] & X_2 \arrow[r, "f_2"] & Y_2
\end{tikzcd}
$$

2. Écrire une preuve du théorème sans décorations.
3. Décorer cette preuve.

Outline

Produit séquentiel

Logiques diagrammatiques

Pourquoi ?

- Pourquoi les catégories de Freyd ?
- Pourquoi deux types de fonctions et pas trois ?
- Pourquoi deux types de fonctions et pas deux types d'objets ?

Ce qui me semble vraiment intéressant :

- Comment construire des "sortes de catégories de Freyd" avec de "bons" modèles
  et un "bon" système de déduction ?
- et comment relier ces constructions entre elles ?

Une proposition :

- Les logiques diagrammatiques
- et leurs morphismes

Logique équationnelle

On peut parler de **produit** dans le cadre de
la logique équationnelle :

- théories : les catégories cartésiennes,
- spécifications : les esquisses à produits finis
- et donc modèles comme morphismes
- règles de déduction : substitution, remplacement. . .
- et donc preuves par application des règles

Logique équationnelle à effets

On peut parler de **produit séquentiel** dans le cadre de la “logique équationnelle à effets” :

- théories : les catégories à effets cartésiennes,
- spécifications : les “esquisses à effets avec semi-produits”
- et donc modèles comme morphismes
- règles de déduction : substitution, remplacement “pur”...
- et donc preuves par application des règles

Une catégorie de logiques

La catégorie des **logiques diagrammatiques** :

- objets : la logique équationnelle, la logique à effets,. . .
- morphismes : l'oubli des décorations, les expansions, . . .

Esquisses à limites

Exemple Une esquisse des graphes $\mathbf{E}_{Gr}$:

$$\begin{tikzcd} \mathtt{Point} & \mathtt{Fleche} \arrow[l, bend right, "\mathtt{source}"'] \arrow[l, bend left, "\mathtt{but}"] \end{tikzcd}$$

Catégorie des réalisations ensemblistes de $\mathbf{E}_{Gr}$:

$$\mathbf{Real}(\mathbf{E}_{Gr}) \cong \mathbf{Gr}$$

Définitions

- Une **esquisse à limites E** est un graphe avec des composées potentielles et des limites potentielles
- Une **réalisation** (ou modèle) ensembliste de **E** associe à tout point de **E** un ensemble,
  à toute flèche de **E** une fonction,
  et rend **réel** tout ce qui était potentiel

Syntaxe

Soit un morphisme d'esquisses à limites

$$\mathbf{E}_S \xrightarrow{\quad P \quad} \mathbf{E}_T$$

d'où une adjonction [Ehresmann 1968]

$$\begin{tikzcd} \mathbf{S} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{T} \arrow[l, bend left, "U"] \end{tikzcd}$$

où $\mathbf{S} = \mathbf{Real}(\mathbf{E}_S)$ et $\mathbf{T} = \mathbf{Real}(\mathbf{E}_T)$

On suppose de plus que U est plein et fidèle.

Définition

Une **logique diagrammatique** est
une classe d'équivalence de tels morphismes
(ou par abus : un tel morphisme)
(ou par abus : une telle adjonction)

D'où la **catégorie des logiques diagrammatiques**

Exemples

Contre-exemple

Graphes et catégories

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Gr} \arrow[r, bend left] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{Cat} \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

Exemples

Esquisses linéaires et catégories

$$\begin{tikzcd} \mathbf{LSk} \arrow[r, bend left] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{Cat} \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

Esquisses à produits finis et catégories cartésiennes
(pour la logique équationnelle)

$$\begin{tikzcd} \mathbf{FPSk} \arrow[r, bend left] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{CCat} \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

Construction de logiques

Théorème [Duval-Lair 2002]
Tout morphisme d'esquisses à limites $\mathbf{E}_0 \to \mathbf{E}_T$ est décomposable :

$$\mathbf{E}_0 \xrightarrow{\quad Q \quad} \mathbf{E}_S \xrightarrow{\quad P \quad} \mathbf{E}_T$$

avec F_Q et U_P pleins et fidèles, et Q "simple"

Exemple

$$\mathbf{E}_{Gr} \xrightarrow{\quad Q \quad} \mathbf{E}_{LSk} \xrightarrow{\quad P \quad} \mathbf{E}_{Cat}$$

"Preuve"

$$\boxed{\begin{array}{ll} X & Y \\ & \end{array}} \to \boxed{\begin{array}{ccc} X_1 & \longrightarrow & Y_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_0 & & Y_0 \end{array}} \to \boxed{\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ & & \end{array}}$$

Logiques et fractions

Théorème [cf. Gabriel-Zisman 1967]
Tout morphisme d'esquisses à limites $\mathbf{E}_S \to \mathbf{E}_T$ avec U plein et fidèle est (à équivalence près) l'ajout d'inverses pour des flèches de $\mathbf{E}_S$.

Exemple. Esquisses linéaires et catégories

$$\boxed{\texttt{Comp} \longrightarrow \texttt{Cons}} \to \boxed{\texttt{Comp} \xrightarrow{\simeq} \texttt{Cons}}$$

Modèles

Soit une logique diagrammatique

$$\begin{tikzcd} \mathbf{S} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{T} \arrow[l, bend left, "U"] \end{tikzcd}$$

Définitions

- **S** est la catégorie des spécifications
- **T** est la catégorie des théories
- pour chaque $\Sigma \in |\mathbf{S}|$ et $\Theta \in |\mathbf{T}|$,
  l'ensemble des modèles de Σ à valeurs dans Θ est

$$\mathrm{Mod}(\Sigma, \Theta) = \mathbf{T}(F\Sigma, \Theta) \cong \mathbf{S}(\Sigma, U\Theta)$$

d'où le foncteur

$$\mathrm{Mod} : \mathbf{S} \times \mathbf{T}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$$

Instances

Définitions

- Un morphisme $\tau : \Sigma \to \Sigma'$ est une déduction (“entailment”) si $F(\tau)$ est inversible.

$$\begin{tikzcd} \Sigma \arrow[r, "\tau"] & \Sigma' \arrow[l, dashed] \end{tikzcd}$$

- Une instance de Σ dans Σ_1 est une fraction $\Sigma \to \Sigma_1' \overset{--\to}{\leftarrow} \Sigma_1$

dans **S** :

$$\begin{tikzcd} & \Sigma_1' \arrow[dr, dashed, shift right] & \\ \Sigma \arrow[ur, "\sigma"] & & \Sigma_1 \arrow[ul, "\tau"'] \arrow[ll, dashed, shift right] \end{tikzcd}$$

dans **T** :

$$\begin{tikzcd} & F\Sigma_1' \arrow[dr, "(F\tau)^{-1}"] & \\ F\Sigma \arrow[ur, "F\sigma"] \arrow[rr, "(F\tau)^{-1} \circ F\sigma"] & & F\Sigma_1 \end{tikzcd}$$

Soit **S2** la bicatégorie des fractions.

Règles de déduction

Définition

Une règle de déduction, d'hypothèse $\mathcal{H}$ et de conclusion $\mathcal{C}$, est une fraction $\rho : \mathcal{H} \overset{\leftarrow - -}{\rightarrow} \mathcal{H}' \leftarrow \mathcal{C}$

Exemple. **Règle du modus ponens** $\dfrac{A \quad A \Rightarrow B}{B}$

- Spécifications. $\Sigma = \langle \Sigma_F, \Sigma_P \rangle$
  où Σ_F est l'ensemble des **formules** avec un opérateur "$\Rightarrow$"
  et $\Sigma_P \subseteq \Sigma_F$ est l'ensemble des formules **prouvables**
- Théories. Θ est une spécification vérifiant :
  – si A et B sont des formules alors $A \Rightarrow B$ aussi
  – si $A \Rightarrow B$ et A sont prouvables alors B aussi

La règle est :

$$\begin{tikzcd}
 & \langle \{A, B, A \Rightarrow B\}, \{A, A \Rightarrow B, B\} \rangle \\
\langle \{A, B, A \Rightarrow B\}, \{A, A \Rightarrow B\} \rangle \arrow[ur, dashed, bend right] & \langle \{B\}, \{B\} \rangle \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

Pas de déduction

Définition

Soit ρ une règle. Étant donnée une spécification Σ,
le **pas de déduction** dans Σ le long de ρ
est le foncteur de composition à droite avec ρ dans **S2**

$$\mathbf{S2}(\rho, \Sigma) : \mathbf{S2}(\mathcal{H}, \Sigma) \to \mathbf{S2}(\mathcal{C}, \Sigma)$$

$$\kappa \mapsto \gamma = \kappa \circ \rho$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H} \arrow[d, "\kappa"'] & \mathcal{C} \arrow[l, "\rho"'] \arrow[d, "\gamma"'] \\
\Sigma \arrow[r, equal] & \Sigma
\end{tikzcd}$$

Système de déduction

Rappel

Le **pas de déduction** dans Σ le long de ρ est le foncteur

$$\mathbf{S2}(\rho, \Sigma) : \mathbf{S2}(\mathcal{H}, \Sigma) \to \mathbf{S2}(\mathcal{C}, \Sigma)$$

Définition

Le **processus de déduction dans** Σ est le foncteur contravariant

$$\mathbf{S2}(-, \Sigma) : \mathbf{S2}^{op} \to \mathbf{Cat}$$

Définition

Le **processus de déduction** est le foncteur (covariant) de Yoneda ($\mathcal{Y}'(\Sigma) = \mathbf{S2}(-, \Sigma)$)

$$\mathcal{Y}' : \mathbf{S2} \to \mathbf{Cat}^{\mathbf{S2}^{op}}$$

Preuves

Définition

Relativement à un ensemble de règles, une **preuve** est une fraction engendrée par ces règles.

Proposition

Toute logique diagrammatique est correcte

Exemple

$\mathcal{L}og_1$: logique équationnelle,
$\mathcal{L}og_{1,*}$: logique équationnelle pointée,
$\mathcal{L}og_2$: logique équationnelle à effets.

δ : enlève les décorations - pour les preuves
χ : explicite les effets (ici “état”) - pour les modèles

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{L}og_2 \arrow[dl, "\delta"'] \arrow[dr, "\chi"] & \\ \mathcal{L}og_1 & & \mathcal{L}og_{1,*} \end{tikzcd}$$

décrits (via Yoneda) par

$$\delta : \boxed{\begin{tikzcd} X \arrow[r, squiggly] \arrow[r, shift right] & Y \end{tikzcd}} \mapsto \boxed{\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & Y \end{tikzcd}} \quad \text{etc}$$

$$\chi : \boxed{\begin{tikzcd} X \arrow[r, squiggly] \arrow[r, shift right] & Y \end{tikzcd}} \mapsto \boxed{\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[dr] & Y \\ & (Y \times S)^S \end{tikzcd}} \quad \text{etc}$$