Dessiner des raisonnements

Dominique Duval

Séminaire Mosaic – 29 juin 2006

Quels dessins pour quels raisonnements ?

Dans l'exposé :

- Réécriture : Double pushout
- Induction et coinduction : Initialité et terminalité

Réécriture

Problème.

Sachant que :

$$\begin{cases} x + 0 = x \\ x + S(y) = S(x + y) \end{cases}$$

montrer que :

$$2 + 2 = 3 + 1$$

Orienter les équations :

"$t \rightsquigarrow u$" signifie "t peut être remplacé par u".

Problème (bis).

Sachant que :

$$\begin{cases} (R_0) & x + 0 \rightsquigarrow x \\ (R_1) & x + S(y) \rightsquigarrow S(x+y) \end{cases}$$

montrer que :

$$2 + 2 \rightsquigarrow 4 \text{ et } 3 + 1 \rightsquigarrow 4$$

Réponse.

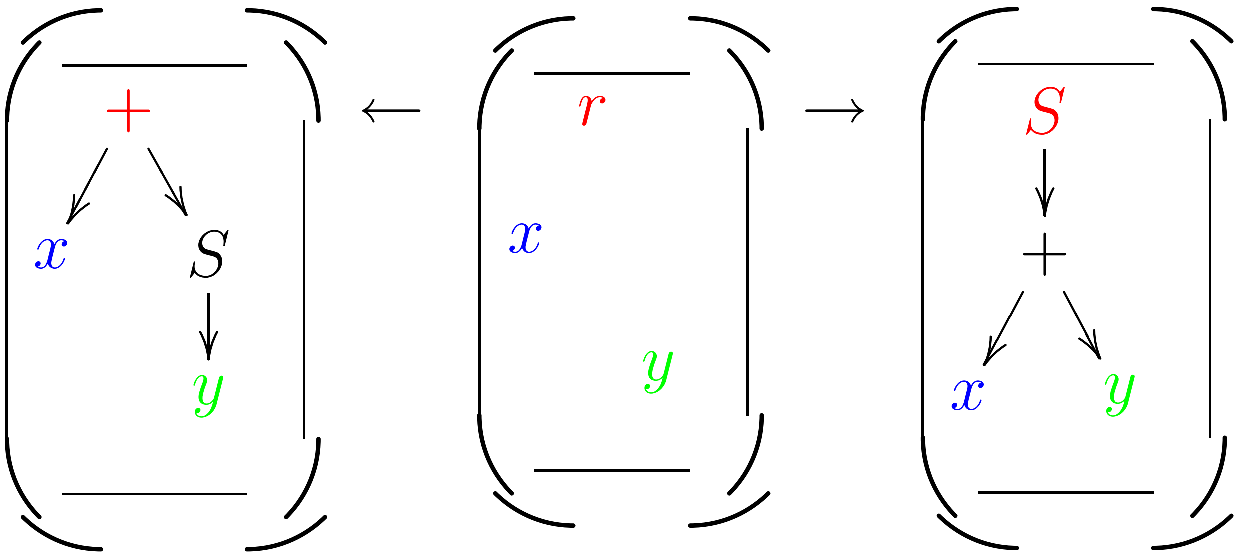
$$
\begin{aligned}
2+2 = 2+S(1) \quad & \rightsquigarrow_{R_1, x=2, y=1} \quad S(2+1) \\
& \rightsquigarrow_{R_1, x=2, y=0} \quad SS(2+0) \\
& \rightsquigarrow_{R_0, x=2} \quad SS(2) = 4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
3+1 = 3+S(0) \quad & \rightsquigarrow_{R_1, x=3, y=0} \quad S(3+0) \\
& \rightsquigarrow_{R_0, x=3} \quad S(3) = 4
\end{aligned}
$$

Donc $2+2 = 3+1$.

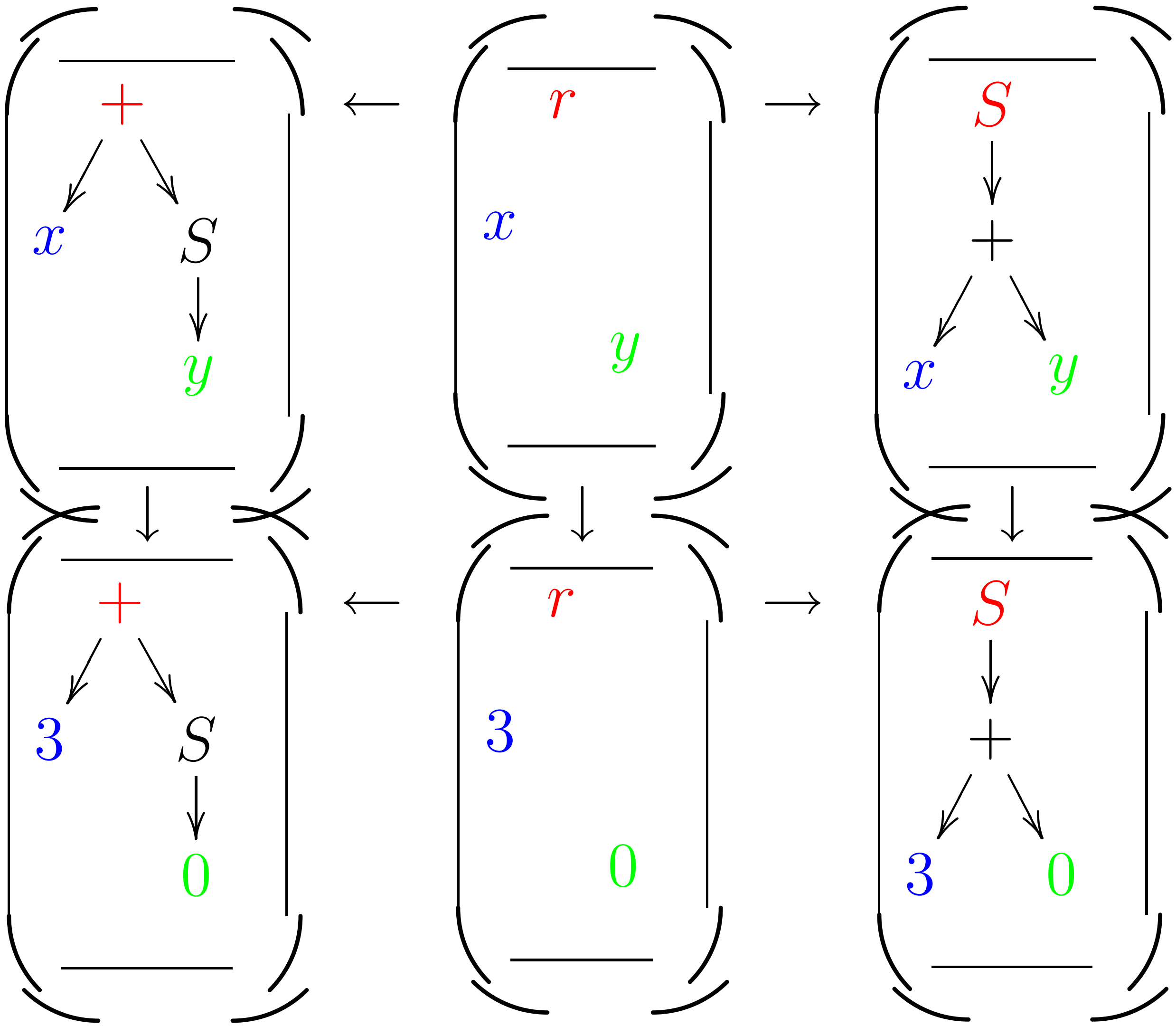
Dessiner la règle : span

$$(R_1) \quad x + S(y) \quad \rightsquigarrow \quad S(x+y)$$



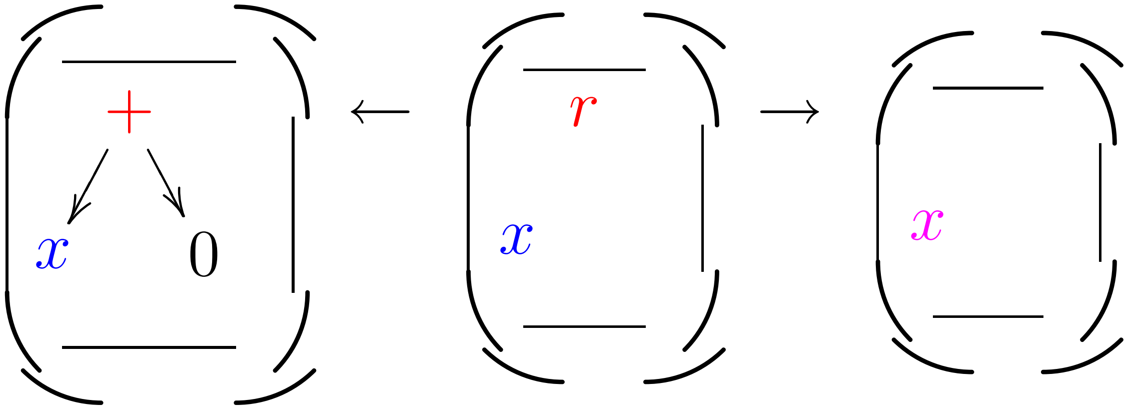
Appliquer la règle : double pushout

$3 + S(0) \quad \rightsquigarrow_{R_1, x=3, y=0} \quad S(3+0)$



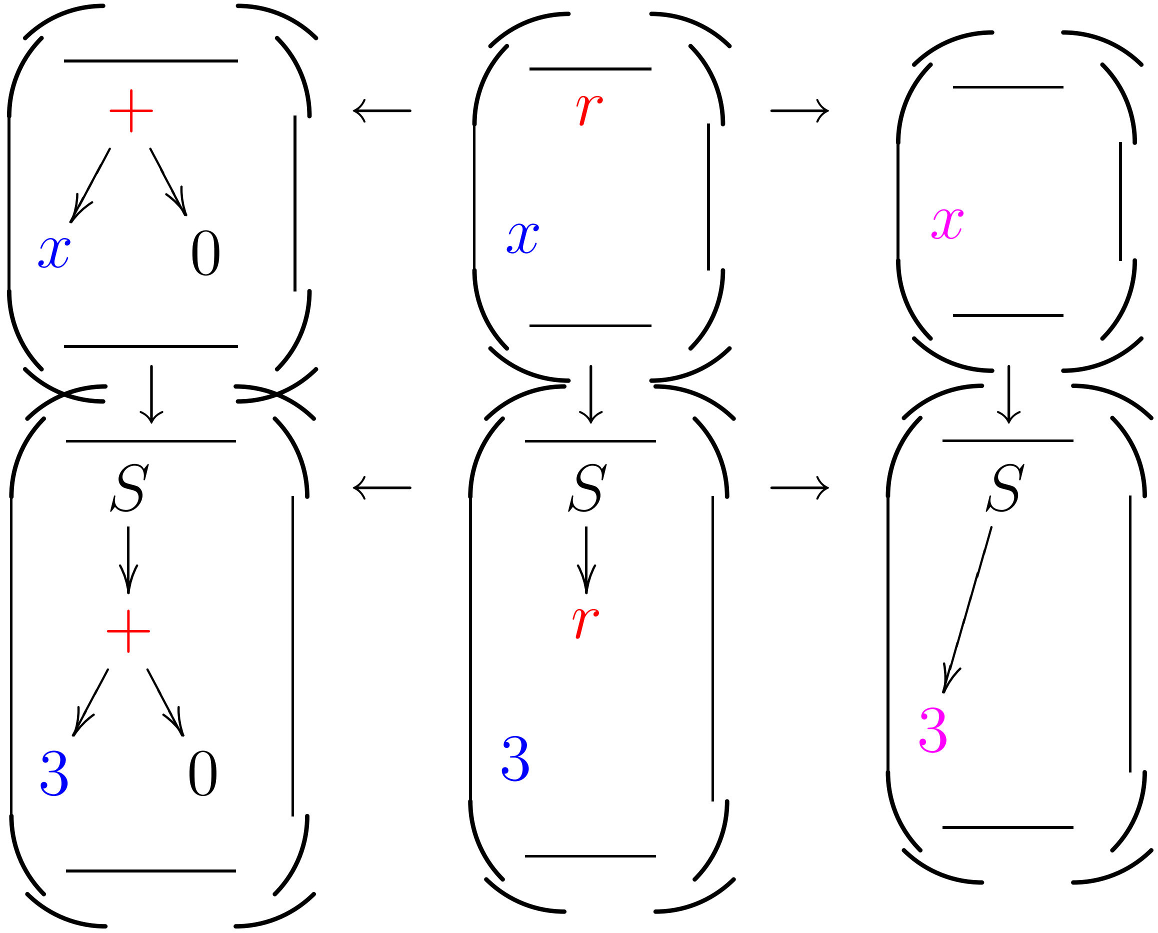
Dessiner la règle : span

$(R_0) \quad x + 0 \quad \rightsquigarrow \quad x$



Appliquer la règle : double pushout

$S(3+0) \quad \rightsquigarrow_{R_0, x=3} \quad S(3)$



Induction

Problème.

Soit $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$. Sachant que :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(n+1) = f(n) + 2 \text{ pour tout } n \geq 0 \end{cases}$$

montrer que :

$$f(n) = 2\,n \text{ pour tout } n \in \mathbf{N}$$

Réponse. Soit $\mathbf{P} = \{n \in \mathbf{N} \mid f(n) = 2n\} \subseteq \mathbf{N}$.

Initialisation :
$f(0) = 0 = 2 \times 0$, donc

$$0 \in \mathbf{P}$$

Hérédité :
si $f(n) = 2n$ alors $f(n+1) = 2n + 2 = 2(n+1)$, donc

$$n \in \mathbf{P} \Rightarrow (n+1) \in \mathbf{P}$$

Conclusion : Par le principe de récurrence :

$$\mathbf{P} = \mathbf{N}$$

Dessiner $\mathbf{N}$ (on note $\mathbf{U} = \{*\}$ et $0 = (* \mapsto 0)$) :

$$\mathbf{U} \xrightarrow{0} \mathbf{N} \xleftarrow{S} \mathbf{N}$$

Dessiner la récurrence :

Pour toute inclusion $i : \mathbf{P} \to \mathbf{N}$, si

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{U} \arrow[r, "0'"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "="] & \mathbf{P} \arrow[d, "i"] \arrow[dr, phantom, "="] & \mathbf{P} \arrow[l, "S'"'] \arrow[d, "i"] \\
\mathbf{U} \arrow[r, "0"] & \mathbf{N} & \mathbf{N} \arrow[l, "S"']
\end{tikzcd}$$

alors $\mathbf{P} = \mathbf{N}$

Dessiner la récurrence autrement : Initialité de $\mathbf{N}$

Pour tout

$$\mathbf{U} \xrightarrow{\alpha} \mathbf{X} \xleftarrow{\beta} \mathbf{X}$$

il existe un unique $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{X}$ tel que

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{U} & \xrightarrow{0} & \mathbf{N} & \xleftarrow{S} & \mathbf{N} \\
{\scriptstyle \mathrm{id}}\downarrow & = & \downarrow{\scriptstyle \varphi} & = & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\
\mathbf{U} & \xrightarrow{\alpha} & \mathbf{X} & \xleftarrow{\beta} & \mathbf{X}
\end{array}$$

Théorème. L'initialité de $\mathbf{N}$ implique la récurrence.

Réponse dessinée.

$f(0) = 0$ et $f(S(n)) = S^2(f(n))$ signifie :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{U} \arrow[r, "0"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "="] & \mathbf{N} \arrow[d, "f"] \arrow[dr, phantom, "="] & \mathbf{N} \arrow[l, "S"'] \arrow[d, "f"] \\
\mathbf{U} \arrow[r, "0"] & \mathbf{N} & \mathbf{N} \arrow[l, "S^2"']
\end{tikzcd}$$

or c'est aussi vérifié par $g(n) = 2n$,

donc par unicité : $f(n) = 2\,n$.

Induction sur $\mathbf{Z}$

Problème.

Soit $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$. Sachant que :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(n+1) = f(n) + 2 \ \text{ pour tout } \ n \geq 0 \\ f(n-1) = f(n) - 2 \ \text{ pour tout } \ n \leq 0 \end{cases}$$

montrer que :

$$f(n) = 2\,n \ \text{ pour tout } \ n \in \mathbf{Z}$$

Problème.

Soit $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$. Sachant que :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(n+1) = f(n) + 2 \text{ pour tout } n \geq 0 \\ f(n-1) = f(n) - 1 \text{ pour tout } n \leq 0 \end{cases}$$

montrer que :

$f(n) =$ *(une forme close à déterminer. . .)* pour tout $n \in \mathbf{Z}$

Réponse. f n'existe pas. Formuler soigneusement l'induction sur $\mathbf{Z}$ pour comprendre pourquoi.

Coinduction

Soit $\mathbf{A}$ un ensemble (alphabet),

et $\mathbf{A}^\omega$ l'ensemble des flots sur $\mathbf{A}$,

c'est-à-dire l'ensemble des suites infinies d'éléments de $\mathbf{A}$

Soit $h : \mathbf{A}^\omega \to \mathbf{A}$ la fonction $h(a_0, a_1, a_2, \dots) = a_0$

Soit $t : \mathbf{A}^\omega \to \mathbf{A}^\omega$ la fonction $t(a_0, a_1, a_2, \dots) = (a_1, a_2, a_3, \dots)$

Problème. Soit $f : \mathbf{A}^\omega \to \mathbf{A}^\omega$. Sachant que :

$$\begin{cases} h(f(\underline{a})) = h(\underline{a}) \\ t(f(\underline{a})) = f(t(t(\underline{a}))) \quad \text{pour tout } \ \underline{a} \in \mathbf{A}^\omega \end{cases}$$

montrer que :

$f(\underline{a}) =$ *(une forme close à déterminer. . .)* pour tout $\underline{a} \in \mathbf{A}^\omega$

Dessiner $\mathbf{A}^\omega$:

$$\mathbf{A} \xleftarrow{h} \mathbf{A}^\omega \xrightarrow{t} \mathbf{A}^\omega$$

Dessiner la terminalité de $\mathbf{A}^\omega$:

Théorème. Pour tout

$$\mathbf{A} \xleftarrow{\alpha} \mathbf{X} \xrightarrow{\beta} \mathbf{X}$$

il existe un unique $\varphi : \mathbf{X} \to \mathbf{A}^\omega$ tel que

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "="] & \mathbf{X} \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dr, phantom, "="] & \mathbf{X} \arrow[d, "\varphi"] \\
\mathbf{A} & \mathbf{A}^\omega \arrow[l, "h"'] \arrow[r, "t"] & \mathbf{A}^\omega
\end{tikzcd}$$

Dessiner le problème

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \arrow[r, phantom, "="'] & \mathbf{A}^\omega \arrow[l, "h"'] \arrow[r, "t^2"] \arrow[d, "f"] \arrow[r, phantom, "="'] & \mathbf{X} \arrow[d, "f"] \\
\mathbf{A} & \mathbf{A}^\omega \arrow[l, "h"'] \arrow[r, "t"] & \mathbf{A}^\omega
\end{tikzcd}$$

Réponse : $f(a_0, a_1, a_2, \dots) = (a_0, a_2, a_4, \dots)$

Preuve. Poser $g(a_0, a_1, a_2, \dots) = (a_0, a_2, a_4, \dots)$,
vérifier que g convient aussi bien que f dans le diagramme,
et conclure grâce à l'unicité : $f = g$.

Conclusion

On a vu quelques dessins pour quelques raisonnements :

- Réécriture : double pushout
- Induction et coinduction : initialité et terminalité

En général : diagrammes (constructions catégoriques)

- Déduction : Pushout (logique “quelconque”)

Qu’est-ce qu’une logique “quelconque” ?

- un système de déduction (théorie de la démonstration)
- et des interprétations (théorie des modèles)

vérifiant la propriété de correction :
“tout ce qui est démontrable est vrai dans tous les modèles”