Un cadre formel pour parler de “logique”

Dominique Duval , LJK, Université de Grenoble

Lyon, le 17 mars 2009
Journées GEOCAL-LAC du GDR IM

Outline

Introduction

“Zooms”

Logiques diagrammatiques

Syntaxes pour une logique diagrammatique

Une application : le produit séquentiel

Conclusion

GEOCAL

Trouver au sein de la logique et des mathématiques des outils permettant la modélisation abstraite des programmes.

LAC

Interactions entre les systèmes calculatoires dont la théorie est issue de l'algèbre, ... sans oublier les formalismes informatiques issus de la théorie des catégories. Notre but est ... de faire coexister ces approches dans un cadre homogène qui intègre plusieurs paradigmes.

Motivation

Développement d'outils mathématiques pour modéliser certaines propriétés liées aux effets dans les langages de programmation.

- Qu'est-ce qu'un effet ?
- Comment adapter l'approche catégorique pour tenir compte des effets ?

En fait, cette motivation provient d'un problème de calcul formel, via les esquisses et les catégories, et "bien sûr" il s'agit de logique.

Un tour d'horizon

Pour modéliser les propriétés des effets calculatoires, trois points de vue "similaires", autour de Haskell :

- Monades fortes [Moggi'89].
- Catégories prémonoïdales [Power&Robinson'97].
- Arrows [Hughes'00].

Et un point de vue "plus restrictif" et "plus homogène" :

- Morphismes de logiques [Duval&Reynaud'05, Dominguez&Duval'05, Dumas&Duval&Reynaud'07].

The `Maybe` monad

`http://www.haskell.org/all_about_monads/`

- *Computation type:*
  Computations which may return `Nothing`
- *Motivation:*
  The `Maybe` *monad embodies the strategy of combining a chain of computations that may each return* `Nothing` *by ending the chain early if any step produces* `Nothing` *as output. It is useful when a computation entails a sequence of steps that depend on one another, and in which some steps may fail to return a value.*

Un calcul est donc une suite de pas,
a priori chaque pas peut retourner `Nothing`,
mais certains pas ("purs") retournent toujours une valeur.

Outline

Introduction

“Zooms”

Logiques diagrammatiques

Syntaxes pour une logique diagrammatique

Une application : le produit séquentiel

Conclusion

Un exemple

Sur les naturels :
0 et s sont purs, mais p peut retourner 'Nothing'.

D'où 3 spécifications (avec 'e' pour 'Nothing') :

effet décoré

$$\begin{tikzcd} & & N \\ 1 \arrow[r, squiggly, "0"] & N \arrow[ur, squiggly, "s"] \arrow[dr, "p"'] & \\ & & N \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & & N \\ 1 \arrow[r, "0"] & N \arrow[ur, "s"] \arrow[dr, "p"'] & \\ & & N \end{tikzcd}$$

effet caché

$$\begin{tikzcd} & & N \\ 1 \arrow[r, "0"] & N \arrow[ur, "s"] \arrow[dr, "p"'] & \\ & & N + e \end{tikzcd}$$

effet explicite

“Zoom”

Le “zoom” désigne le passage
de la spécification avec effet caché
à la spécification avec effet explicite :

$$\boxed{\text{effet caché}} \longrightarrow \boxed{\text{effet explicite}}$$

Le “zoom” procède en 2 temps :

$$\begin{tikzcd}
 & \boxed{\text{effet décoré}} \arrow[dr] & \\
\boxed{\text{effet caché}} \arrow[ur] & & \boxed{\text{effet explicite}}
\end{tikzcd}$$

Le “zoom” est associé à 2 “morphismes” :

$$\begin{tikzcd}
 & \boxed{\text{effet décoré}} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\boxed{\text{effet caché}} & & \boxed{\text{effet explicite}}
\end{tikzcd}$$

Span

Donc, un “zoom” est un span :

$$\begin{tikzcd} & D \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ C & & E \end{tikzcd}$$

Plus précisément, un “zoom” provient d’un span dans une catégorie de logiques :

$$\begin{tikzcd} & \boxed{\text{logique avec effets décorés}} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \boxed{\text{logique avec effets cachés}} & & \boxed{\text{logique avec effets explicites}} \end{tikzcd}$$

Outline

Introduction

“Zooms”

Logiques diagrammatiques

Syntaxes pour une logique diagrammatique

Une application : le produit séquentiel

Conclusion

Fractions

Soit une adjonction :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{S} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{T} \arrow[l, bend left, "U"] \end{tikzcd}$$

Soit D l'ensemble des morphismes τ dans $\mathbf{S}$ tels que $F(\tau)$ est inversible dans $\mathbf{T}$.

Théorème [Gabriel Zisman'67]. Propriétés équivalentes :

- U est plein et fidèle.
- $\varepsilon : F \circ U \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathbf{T}}$ est un isomorphisme.
- À équivalence près, $\mathbf{T}$ est la catégorie $\mathbf{S}[D^{-1}]$ des fractions de $\mathbf{S}$ à dénominateur dans D, et F est la localisation.

De plus, si $\mathbf{S}$ a suffisamment de colimites, les fractions sont de la forme :

$$\begin{tikzcd} & \Sigma_1' \arrow[dr, dashed] & \\ \Sigma \arrow[ur, "\sigma"] & & \Sigma_1 \arrow[ul, "\tau"'] \end{tikzcd}$$

noté $\quad \tau\backslash\sigma : \Sigma \dashrightarrow \Sigma_1$

Théories et spécifications

$$\begin{tikzcd} \mathbf{S} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{T} \arrow[l, bend left, "U"] \end{tikzcd} \qquad \text{avec} \quad F \circ U \cong \mathrm{Id}_{\mathbf{T}}$$

Logique	Catégories	Notation
la catégorie des théories		$\mathbf{T}$
théorie (famille de théorèmes)	objet de $\mathbf{T}$	Θ
morphisme de théories	flèche de $\mathbf{T}$	θ
la catégorie des spécifications		$\mathbf{S}$
spécification (famille d'axiomes)	objet de $\mathbf{S}$	Σ
morphisme de spécifications	flèche de $\mathbf{S}$	σ

U : toute théorie "est" une spécification.
F : toute spécification engendre une théorie.

Modèles

$$\begin{tikzcd} \mathbf{S} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{T} \arrow[l, bend left, "U"] \end{tikzcd} \qquad \text{avec} \quad F \circ U \cong \mathrm{Id}_{\mathbf{T}}$$

Logique	Catégories
l'ensemble $\mathrm{Mod}(\Sigma, \Theta)$ des modèles de Σ dans Θ	
modèle de Σ dans Θ	$M : \Sigma \to U\Theta$ dans $\mathbf{S}$
modèle de Σ dans Θ	$M : F\Sigma \to \Theta$ dans $\mathbf{T}$
morphisme de modèles de Σ dans Θ	*NON, en général*

Preuves

$$\begin{tikzcd} \mathbf{S} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{T} \arrow[l, bend left, "U"] \end{tikzcd} \qquad \text{avec} \quad F \circ U \cong \mathrm{Id}_{\mathbf{T}}$$

Logique	Catégories
règle d'inférence $\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{C}}$	fraction $\rho : \mathrm{C} \dashrightarrow \mathrm{H}$
instance de H dans Σ	fraction $\kappa : \mathrm{H} \dashrightarrow \Sigma$
pas ("*step*") d'inférence	composition $\kappa \circ \rho : \mathrm{C} \dashrightarrow \Sigma$

Un exemple : modus ponens

$$\frac{H}{C} = \frac{A \quad A \Rightarrow B}{B}$$

Une spécification Σ :

- deux ensembles Φ (formules), $\Pi \subseteq \Phi$ (f. prouvables),
- une fonction partielle $\Rightarrow : \Phi^2 \rightharpoonup \Phi$.

Une théorie Θ : ajouter deux règles :

- si Φ contient A, B alors Φ contient $A, B, A \Rightarrow B$,
- règle de modus ponens :

  si Φ contient $A, B, A \Rightarrow B$ et
  si Π contient $A, A \Rightarrow B$, alors Π contient B.

La règle sous forme de fraction (on note seulement Π) :

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{H}' \arrow[dr, dashed, shift left] & \\ \mathrm{C} \arrow[ur] & & \mathrm{H} \arrow[ul] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \{A, A \Rightarrow B, B\} \arrow[dr, dashed, shift left] & \\ \{B\} \arrow[ur] & & \{A, A \Rightarrow B\} \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

La catégorie des logiques diagrammatiques

- Une logique diagrammatique **L** est une adjonction

$$\begin{tikzcd} \mathbf{S} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{T} \arrow[l, bend left, "U"] \end{tikzcd}$$

  avec U plein et fidèle. D'où, pour chaque logique **L**, les notions de théorie, spécification, modèle, inférence.
- Un morphisme de logiques diagrammatiques $\Phi : \mathbf{L}_1 \to \mathbf{L}_2$ est formé de deux foncteurs Φ_S et Φ_T tels que le carré commute :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{S}_1 \arrow[r, "F_1"] \arrow[d, "\Phi_S"] & \mathbf{T}_1 \arrow[d, "\Phi_T"] \\ \mathbf{S}_2 \arrow[r, "F_2"] & \mathbf{T}_2 \end{tikzcd}$$

Span

Soit un span de logiques diagrammatiques :

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{L}_D \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathbf{L}_C & & \mathbf{L}_E \end{tikzcd}$$

D'où, en considérant les spécifications, un span de catégories :

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{S}_D \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathbf{S}_C & & \mathbf{S}_E \end{tikzcd}$$

C'est un "zoom" de $\mathbf{L}_C$ (logique avec effets cachés)
vers $\mathbf{L}_E$ (logique avec effets explicites).

Outline

Introduction

“Zooms”

Logiques diagrammatiques

Syntaxes pour une logique diagrammatique

Une application : le produit séquentiel

Conclusion

Esquisse

Soit une esquisse à limites **E**
d'où la catégorie $\mathbf{S} = \mathrm{Real}(\mathbf{E})$ des réalisations de **E** dans Set.

E et **S** sont reliés par le foncteur de Yoneda (contravariant) :

$$\mathbf{E} \xrightarrow{\quad Y \quad} \mathbf{S}^{op}$$

Les objets de **S** peuvent être décrits ingrédient par ingrédient.

Ex.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{E} : & \textit{Type} & \begin{array}{c}\longleftarrow \\ \longleftarrow\end{array} & \textit{Fonction} \\ Y \downarrow & & & \\ \mathbf{S} = \mathrm{Real}(\mathbf{E}) : & \boxed{X} & \begin{array}{c}\longrightarrow \\ \longrightarrow\end{array} & \boxed{X \longrightarrow Y} \end{array}$$

Morphisme d'esquisses

Théorème. [Ehresman'68]

Tout morphisme d'esquisses à limites $\mathbf{E}_S \xrightarrow{P} \mathbf{E}_T$

détermine une adjonction $\begin{tikzcd} \mathbf{S} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{T} \arrow[l, bend left, "U"] \end{tikzcd}$

où $\mathbf{S} = \mathrm{Real}(\mathbf{E}_S)$, $\mathbf{T} = \mathrm{Real}(\mathbf{E}_T)$ et $U(\Theta) = \Theta \circ P$:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{E}_S \arrow[rr, "P"] \arrow[dr, "U(\Theta)"'] & & \mathbf{E}_T \arrow[dl, "\Theta"] \\ & \mathrm{Set} & \end{tikzcd}$$

Et F et P sont reliés par les foncteurs de Yoneda :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{E}_S \arrow[r, "P"] \arrow[d, "Y_S"'] & \mathbf{E}_T \arrow[d, "Y_T"] \\ \mathbf{S}^{op} \arrow[r, "F^{op}"] & \mathbf{T}^{op} \end{tikzcd}$$

Règles élémentaires

Soit un morphisme d'esquisses à limites $\mathbf{E}_S \xrightarrow{P} \mathbf{E}_T$

d'adjonction associée $\begin{tikzcd} \mathbf{S} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{T} \arrow[l, bend left, "U"] \end{tikzcd}$ avec U plein et fidèle.

D'où une logique diagrammatique **L**.

Les règles élémentaires de **L** sont les fractions venant de P, via Yoneda.

Esquisses et fractions

Théorème. [Duval&Lair'02]
Tout morphisme d'esquisses à limites P_0 se décompose en un morphisme "très simple" Q, avec F_Q plein et fidèle suivi d'un morphisme P avec U_P plein et fidèle.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{E}_0 \arrow[rr, "P_0"] \arrow[dr, "Q"'] & & \mathbf{E}_T \\
& \mathbf{E}_S \arrow[ur, "P"'] &
\end{tikzcd}$$

Retour sur l'exemple de "zoom"

Sur les naturels :
0 et s sont purs, mais p peut retourner 'Nothing'.

D'où 3 spécifications :

effet décoré

$$\begin{tikzcd} & & N \\ 1 \arrow[r, squiggly, "0"] & N \arrow[ur, squiggly, "s"] \arrow[dr, "p"'] & \\ & & N \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & & N \\ 1 \arrow[r, "0"] & N \arrow[ur, "s"] \arrow[dr, "p"'] & \\ & & N \end{tikzcd}$$

effet caché

$$\begin{tikzcd} & & N \\ 1 \arrow[r, "0"] & N \arrow[ur, "s"] \arrow[dr, "p"'] & \\ & & N + e \end{tikzcd}$$

effet explicite

“Zoom” ingrédient par ingrédient

Type :

$$\boxed{X}$$

$$\boxed{X} \qquad \boxed{X}$$

Fonction “pure” (garantie sans effet) :

$$\boxed{X \rightsquigarrow Y}$$

$$\boxed{X \longrightarrow Y} \qquad \boxed{X \longrightarrow Y}$$

Fonction “générale” (avec peut-être un effet) :

$$\boxed{X \longrightarrow Y}$$

$$\boxed{X \longrightarrow Y} \qquad \boxed{X \longrightarrow Y + e}$$

Composition, etc...

Outline

Introduction

“Zooms”

Logiques diagrammatiques

Syntaxes pour une logique diagrammatique

Une application : le produit séquentiel

Conclusion

Le problème

Comment formaliser les opérations à plusieurs arguments ?

Sans effets : produit cartésien et composition :

$$f(t_1, \ldots, t_n) = f \circ \langle t_1, \ldots, t_n \rangle$$

Avec effets : l'ordre d'évaluation des arguments est important !

Catégories de Freyd : $C \subseteq K$,

- C pour les fonctions "pures" (garanties sans effet) :
  C cartésienne, donc monoidale.
- K pour les fonctions "générales" (avec peut-être un effet) :
  K prémonoidale.

Plus homogène [Dumas&Duval&Reynaud'07, '09] : $C \subseteq K$,

- C cartésienne (donc monoidale).
- K à effets cartésienne (donc prémonoidale).

Produit séquentiel

effet décoré

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "f"] \arrow[d, squiggly] \arrow[dr, phantom, "="] & \bullet \arrow[d, squiggly] \\
\bullet \arrow[r, "f\times\mathrm{id}"] \arrow[d, squiggly] \arrow[dr, phantom, "\geq"] & \bullet \arrow[d, squiggly] \\
\bullet \arrow[r, squiggly, "\mathrm{id}"] & \bullet
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "f"] \arrow[d, phantom, "="] & \bullet \\
\bullet \arrow[r, "f\times\mathrm{id}"] \arrow[u] \arrow[d, phantom, "="] & \bullet \arrow[u] \\
\bullet \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d] & \bullet \arrow[d] \\
\bullet \arrow[r, "\mathrm{id}"] & \bullet
\end{tikzcd}$$

effet caché

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "f"] \arrow[d, phantom, "="] & \bullet + e \\
\bullet \arrow[r, "f\times\mathrm{id}"] \arrow[u] \arrow[d, phantom, "\geq"] & \bullet + e \arrow[u] \\
\bullet \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d] & \bullet \arrow[d] \\
\bullet \arrow[r, "\mathrm{id}"] & \bullet
\end{tikzcd}$$

effet explicite

Outline

Introduction

“Zooms”

Logiques diagrammatiques

Syntaxes pour une logique diagrammatique

Une application : le produit séquentiel

Conclusion

Bilan et perspectives

Nous avons défini des “logiques”, avec leurs notions de théorie, spécification, modèle, inférence.

Nous avons défini des “morphismes de logiques”,
et donc des spans pour traduire les “zooms”.

En utilisant des résultats anciens :

- les catégories de fractions [Gabriel Zisman’67]
- les esquisses à limites [Ehresmann’68]
- (et un théorème sur les esquisses à limites [Duval Lair’02])

Nous avons traité plusieurs applications.

À voir : d’autres applications, composition d’effets,...

Question : est-ce “bien connu” ?

Merci pour votre attention.