Les exceptions sont symétriques des états

Dominique Duval — travail en cours avec Laurent Fousse, J.-Guillaume Dumas, J.-Claude Reynaud

Grenoble, le 6 mai 2010 séminaire Bipop-Casys

Outline

Sémantique catégorique

Sémantique catégorique des effets

Symétrie

 Sémantique des langages de programmation

- Sémantique des langages de programmation
- Sémantique catégorique des langages de programmation

Correspondance de Curry-Howard-Lambek

| Informatique | Logique | Catégories | Ensembles |
|------------------------|--------------------------|--------------------------------------|-----------|
| types | propositions | objets | ensembles |
| termes | preuves | morphismes | fonctions |
| lambda- calcul typé | logique intuitioniste | catégories cartésiennes closes | |

Ensembles

$$\frac{a\in A\quad f:A\to B}{f(a)\in B}$$

Catégories

$$\frac{a:U\to A\quad f:A\to B}{f\circ a:U\to B}$$

Logique

$$\frac{A \quad A \Rightarrow B}{B}$$

Informatique

$$\frac{x:A \qquad t:B}{\lambda x.t:A \to B} \qquad a:A$$
$$(\lambda x.t) a:B$$

Outline

Sémantique catégorique

Sémantique catégorique des effets

Symétrie

 Sémantique des langages de programmation

- Sémantique des langages de programmation
- Sémantique catégorique des langages de programmation

| Informatique | Catégories | Ensembles |
|--------------|------------|-----------|
| types | objets | ensembles |
| termes | morphismes | fonctions |

- Sémantique des langages de programmation
- Sémantique catégorique des langages de programmation

| Informatique | Catégories | Ensembles |
|--------------|------------|-----------|
| types | objets | ensembles |
| termes | morphismes | fonctions |

 Sémantique catégorique des effets dans les langages de programmation

La notion d'effet

- Soient A et B deux types du langage, interprétés par deux ensembles [[A]] et [[B]].
- Soit t un terme du langage avec un paramètre de type A et un résultat de type B

$$t: A \rightarrow B$$

en l'absence d'effets t est interprété par une fonction

$$[[t]]:[[A]]\to[[B]]$$

Sinon, il y a (au moins) un effet.

Types A, B, terme $t: A \rightarrow B$.

états ("effets de bord")

$$[[t]]:[[A]]\times\mathbb{S}\to[[B]]\times\mathbb{S}$$

Types A, B, terme $t: A \rightarrow B$.

états ("effets de bord")

$$[[t]]:[[A]]\times\mathbb{S}\to[[B]]\times\mathbb{S}$$

exceptions

$$[[t]]:[[A]]+\mathbb{E} \rightarrow [[B]]+\mathbb{E}$$

Types A, B, terme $t: A \rightarrow B$.

états ("effets de bord")

$$[[t]]:[[A]]\times\mathbb{S}\to[[B]]\times\mathbb{S}$$

exceptions

$$[[t]]:[[A]]+\mathbb{E}\to [[B]]+\mathbb{E}$$

non-terminaison

Types A, B, terme $t: A \rightarrow B$.

états ("effets de bord")

$$[[t]]:[[A]]\times\mathbb{S}\to[[B]]\times\mathbb{S}$$

exceptions

$$[[t]]:[[A]]+\mathbb{E} \rightarrow [[B]]+\mathbb{E}$$

non-terminaison

non-déterminisme

$$[[t]]:[[A]]\to\mathcal{P}([[B]])$$

Types A, B, terme $t: A \rightarrow B$.

états ("effets de bord")

$$[[t]]:[[A]]\times\mathbb{S}\to[[B]]\times\mathbb{S}$$

exceptions

$$[[t]]:[[A]]+\mathbb{E} \rightarrow [[B]]+\mathbb{E}$$

non-terminaison

non-déterminisme

$$[[t]]:[[A]] \rightarrow \mathcal{P}([[B]])$$

entrées, sorties, continuations,...

Sémantique catégorique des effets : monades

Comment généraliser aux effets le dictionnaire informatique – catégories ?

[Moggi, 1989], Haskell.

Pour chaque effet il existe une monade T telle que $t: A \rightarrow B$ est interprété par

$$[[t]]:[[A]]\to T([[B]])$$

Monade des états

[Moggi] Pour chaque effet il existe une monade T telle que $t: A \to B$ est interprété par $[[t]]: [[A]] \to T([[B]])$.

États

$$[[t]]:[[A]]\times\mathbb{S}\to[[B]]\times\mathbb{S}$$

équivaut à

$$[[t]]:[[A]] o([[B]] imes\mathbb{S})^{\mathbb{S}}$$

donc la monade pour les états est

$$T(X) = (X \times \mathbb{S})^{\mathbb{S}}$$



Monade des exceptions

[Moggi] Pour chaque effet il existe une monade T telle que $t: A \to B$ est interprété par $[[t]]: [[A]] \to T([[B]])$.

Traiter des exceptions

$$[[t]]:[[A]]+\mathbb{E} \rightarrow [[B]]+\mathbb{E}$$

n'équivaut à aucun

$$[[t]]:[[A]]\rightarrow T([[B]])$$



Monade des exceptions

[Moggi] Pour chaque effet il existe une monade T telle que $t: A \to B$ est interprété par $[[t]]: [[A]] \to T([[B]])$.

▶ Traiter des exceptions

$$[[t]]:[[A]]+\mathbb{E} \rightarrow [[B]]+\mathbb{E}$$

n'équivaut à aucun

$$[[t]]:[[A]]\to T([[B]])$$

Lever des exceptions

$$[[t]]:[[A]] \rightarrow [[B]] + \mathbb{E}$$

donc la monade pour lever les exceptions est

$$T(X) = X + \mathbb{E}$$



Généraliser les monades

[DD, JCR, JGD, LF] depuis 2002.

Pour chaque effet il existe une méthode systématique pour interpréter $t: A \rightarrow B$, par exemple :

▶ il existe une monade T telle que

$$[[t]]:[[A]]\to T([[B]])$$

▶ il existe une comonade T telle que

$$[[t]]:T([[A]])\to [[B]]$$

▶ il existe un foncteur T tel que

$$[[t]]: T([[A]]) \rightarrow T([[B]])$$

[C. Dominguez, D. Duval] *Diagrammatic logic applied to a parameterization process* à paraître dans MSCS.



Foncteur des états. Foncteur des exceptions

Pour certains types d'effet il existe un foncteur T tel que $t: A \to B$ est interprété par $[[t]]: T([[A]]) \to T([[B]])$.

États

$$[[t]]:[[A]]\times\mathbb{S}\to[[B]]\times\mathbb{S}$$

donc le foncteur pour les états est

$$T(X) = X \times \mathbb{S}$$

Foncteur des états. Foncteur des exceptions

Pour certains types d'effet il existe un foncteur T tel que $t: A \to B$ est interprété par $[[t]]: T([[A]]) \to T([[B]])$.

États

$$[[t]]:[[A]]\times\mathbb{S}\to[[B]]\times\mathbb{S}$$

donc le foncteur pour les états est

$$T(X) = X \times \mathbb{S}$$

Exceptions

$$[[t]]:[[A]]+\mathbb{E} \rightarrow [[B]]+\mathbb{E}$$

donc le foncteur pour les exceptions est

$$T(X) = X + \mathbb{E}$$



Outline

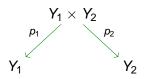
Sémantique catégorique

Sémantique catégorique des effets

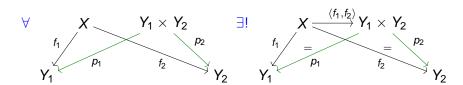
Symétrie

Produits

Le produit cartésien (ou produit)

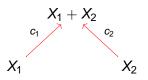


vérifie la propriété suivante

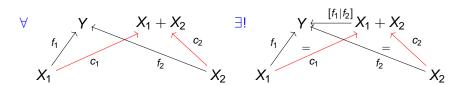


Sommes

L'union disjointe (ou coproduit ou somme)



vérifie la propriété suivante



Symétrie : dualité

La dualité consiste à inverser le sens des flèches.

| produit | somme | |
|---|---|--|
| $X \xrightarrow{\langle f_1, f_2 \rangle} Y_1 \times Y_2$ $\downarrow^{f_1} = \downarrow^{p_2}$ $\downarrow^{p_1} \qquad \downarrow^{p_2}$ $\downarrow^{p_2} \qquad \downarrow^{p_2}$ $\downarrow^{p_2} \qquad \downarrow^{p_2}$ $\downarrow^{p_2} \qquad \downarrow^{p_2}$ | $Y \downarrow [f_1 f_2] X_1 + X_2$ $\downarrow f_1 = c_1$ $\downarrow f_2 = c_2$ | |
| états | exceptions | |
| $T(X) = X \times \mathbb{S}$ | $\mathcal{T}(X) = X + \mathbb{E}$ | |
| X | X | |

▶ On voit apparaître une symétrie entre états et exceptions

Sémantique catégorique des effets : théories de Lawvere

Chaque effet est associé à des opérations :

• états : lire et mettre à jour

exceptions : lever et traiter

[Plotkin, Power, Hyland, 2001...].

Pour chaque effet il existe une théorie de Lawvere qui engendre la monade de Moggi et qui fournit les opérations caractéristiques de l'effet.

Mais cette approche ne permet pas de traiter les exceptions.

Symétrie des opérations

| États $T(X) = X \times \mathbb{S}$ (un indice i par variable) | Exceptions $T(X) = X + \mathbb{E}$ (un indice i par type d'exc.) |
|--|---|
| $\begin{array}{c} lookup \\ \mathit{l_i}: \mathbb{S} \to \mathit{V_i} \end{array}$ | $\begin{array}{c} \textbf{raise} \\ r_i: P_i \to \mathbb{E} \end{array}$ |
| | $egin{aligned} & handle \ & h_i : \mathbb{E} ightarrow P_i + \mathbb{E} \ & \left\{ egin{aligned} & h_i \circ r_i = \mathrm{id} \ & h_i \circ r_j = r_j \end{aligned} \end{aligned} \end{aligned}$ |
| \mathbb{S} "terminal" $\mathbb{S} = \prod_i V_i$ | \mathbb{E} "initial" $\mathbb{E} = \sum_i P_i$ |

► La symétrie s'étend aux opérations



Signification de la symétrie

États

$$\begin{cases}
l_i \circ u_i = \mathrm{id} \\
l_j \circ u_i = l_j
\end{cases}$$

Pour lire la valeur d'une variable, on n'utilise que la **dernière** mise à jour de cette variable, tout ce qui a été exécuté entre les deux est oublié.

Exceptions

$$\begin{cases}
h_i \circ r_i = \mathrm{id} \\
h_i \circ r_j = r_j
\end{cases}$$

Lorsqu'on lève une exception, on exécute immédiatement le **premier** traitement de ce type d'exceptions, tout ce qui est écrit entre les deux est oublié.

Conclusion

Les exceptions sont symétriques des états

Ce résultat est

- nouveau
- surprenant

Il apporte un point de vue

- relativement neuf sur les états
- complètement neuf sur les exceptions

Il pose de nombreuses questions...

- y a-t-il d'autres couples d'effets symétriques ?
- ▶ rattacher aux travaux de [Plotkin, Power, Hyland,...] ?