Les exceptions sont symétriques des états

Dominique Duval — travail en cours avec
Laurent Fousse, J.-Guillaume Dumas, J.-Claude Reynaud

Grenoble, le 6 mai 2010
séminaire Bipop-Casys

Outline

Le cadre : informatique théorique

- **Sémantique**
  des langages de programmation

Le cadre : informatique théorique

- **Sémantique**
  des langages de programmation
- **Sémantique catégorique**
  des langages de programmation

Correspondance de Curry-Howard-Lambek

Informatique	**Logique**	**Catégories**	**Ensembles**
types	propositions	objets	ensembles
termes	preuves	morphismes	fonctions
lambda-calcul typé	logique intuitioniste	catégories cartésiennes closes	

- **Ensembles**

$$\frac{a \in A \quad f : A \to B}{f(a) \in B}$$

- **Catégories**

$$\frac{a : U \to A \quad f : A \to B}{f \circ a : U \to B}$$

- **Logique**

$$\frac{A \quad A \Rightarrow B}{B}$$

- **Informatique**

$$\frac{\dfrac{x : A \qquad t : B}{\lambda x.t : A \to B} \qquad a : A}{(\lambda x.t)\, a : B}$$

Outline

Le cadre : informatique théorique

- **Sémantique**
  des langages de programmation

Le cadre : informatique théorique

- **Sémantique**
  des langages de programmation
- **Sémantique catégorique**
  des langages de programmation

Informatique	**Catégories**	**Ensembles**
types	objets	ensembles
termes	morphismes	fonctions

Le cadre : informatique théorique

- **Sémantique**
  des langages de programmation
- **Sémantique catégorique**
  des langages de programmation

Informatique	**Catégories**	**Ensembles**
types	objets	ensembles
termes	morphismes	fonctions

- **Sémantique catégorique des effets**
  dans les langages de programmation

La notion d'effet

- Soient A et B deux types du langage, interprétés par deux ensembles $[[A]]$ et $[[B]]$.
- Soit t un terme du langage avec un paramètre de type A et un résultat de type B

$$t : A \to B$$

en l'absence d'effets t est interprété par une fonction

$$[[t]] : [[A]] \to [[B]]$$

- Sinon, il y a (au moins) un effet.

Exemples

Types A, B, terme $t : A \to B$.

- états (“effets de bord”)

$$[[t]] : [[A]] \times \mathbb{S} \to [[B]] \times \mathbb{S}$$

Exemples

Types A, B, terme $t : A \to B$.

- états (“effets de bord”)
$$[[t]] : [[A]] \times \mathbb{S} \to [[B]] \times \mathbb{S}$$
- exceptions
$$[[t]] : [[A]] + \mathbb{E} \to [[B]] + \mathbb{E}$$

Exemples

Types A, B, terme $t : A \to B$.

- états (“effets de bord”)
$$[[t]] : [[A]] \times \mathbb{S} \to [[B]] \times \mathbb{S}$$
- exceptions
$$[[t]] : [[A]] + \mathbb{E} \to [[B]] + \mathbb{E}$$
- non-terminaison
$$[[t]] : [[A]] \rightharpoonup [[B]]$$

Exemples

Types A, B, terme $t : A \to B$.

- états (“effets de bord”)
$$[[t]] : [[A]] \times \mathbb{S} \to [[B]] \times \mathbb{S}$$
- exceptions
$$[[t]] : [[A]] + \mathbb{E} \to [[B]] + \mathbb{E}$$
- non-terminaison
$$[[t]] : [[A]] \rightharpoonup [[B]]$$
- non-déterminisme
$$[[t]] : [[A]] \to \mathcal{P}([[B]])$$

Exemples

Types A, B, terme $t : A \to B$.

- états (“effets de bord”)
$$[[t]] : [[A]] \times \mathbb{S} \to [[B]] \times \mathbb{S}$$
- exceptions
$$[[t]] : [[A]] + \mathbb{E} \to [[B]] + \mathbb{E}$$
- non-terminaison
$$[[t]] : [[A]] \rightharpoonup [[B]]$$
- non-déterminisme
$$[[t]] : [[A]] \to \mathcal{P}([[B]])$$
- entrées, sorties, continuations,...

Sémantique catégorique des effets : monades

Comment généraliser aux effets le dictionnaire informatique – catégories ?

[Moggi, 1989], Haskell.

Pour chaque effet il existe une monade T telle que $t : A \to B$ est interprété par

$$[[t]] : [[A]] \to T([[B]])$$

Monade des états

[Moggi] Pour chaque effet il existe une monade T telle que $t : A \to B$ est interprété par $[[t]] : [[A]] \to T([[B]])$.

- États

$$[[t]] : [[A]] \times \mathbb{S} \to [[B]] \times \mathbb{S}$$

équivaut à

$$[[t]] : [[A]] \to ([[B]] \times \mathbb{S})^{\mathbb{S}}$$

donc la monade pour les états est

$$T(X) = (X \times \mathbb{S})^{\mathbb{S}}$$

Monade des exceptions

[Moggi] Pour chaque effet il existe une monade T telle que $t : A \to B$ est interprété par $[[t]] : [[A]] \to T([[B]])$.

- Traiter des exceptions

$$[[t]] : [[A]] + \mathbb{E} \to [[B]] + \mathbb{E}$$

n'équivaut à *aucun*

$$[[t]] : [[A]] \to T([[B]])$$

Monade des exceptions

[Moggi] Pour chaque effet il existe une monade T telle que $t : A \to B$ est interprété par $[[t]] : [[A]] \to T([[B]])$.

- Traiter des exceptions

$$[[t]] : [[A]] + \mathbb{E} \to [[B]] + \mathbb{E}$$

n'équivaut à *aucun*

$$[[t]] : [[A]] \to T([[B]])$$

- Lever des exceptions

$$[[t]] : [[A]] \to [[B]] + \mathbb{E}$$

donc la monade pour lever les exceptions est

$$T(X) = X + \mathbb{E}$$

Généraliser les monades

[DD, JCR, JGD, LF] depuis 2002.

Pour chaque effet il existe une méthode systématique pour interpréter $t : A \to B$, *par exemple* :

- il existe une monade T telle que

$$[[t]] : [[A]] \to T([[B]])$$

- il existe une comonade T telle que

$$[[t]] : T([[A]]) \to [[B]]$$

- il existe un foncteur T tel que

$$[[t]] : T([[A]]) \to T([[B]])$$

[C. Dominguez, D. Duval] *Diagrammatic logic applied to a parameterization process* à paraître dans MSCS.

Foncteur des états. Foncteur des exceptions

Pour certains types d'effet il existe un foncteur T tel que $t : A \to B$ est interprété par $[[t]] : T([[A]]) \to T([[B]])$.

- États

$$[[t]] : [[A]] \times \mathbb{S} \to [[B]] \times \mathbb{S}$$

donc le foncteur pour les états est

$$\boxed{T(X) = X \times \mathbb{S}}$$

Foncteur des états. Foncteur des exceptions

Pour certains types d'effet il existe un foncteur T tel que $t : A \to B$ est interprété par $[[t]] : T([[A]]) \to T([[B]])$.

- États

$$[[t]] : [[A]] \times \mathbb{S} \to [[B]] \times \mathbb{S}$$

donc le foncteur pour les états est

$$\boxed{T(X) = X \times \mathbb{S}}$$

- Exceptions

$$[[t]] : [[A]] + \mathbb{E} \to [[B]] + \mathbb{E}$$

donc le foncteur pour les exceptions est

$$\boxed{T(X) = X + \mathbb{E}}$$

Outline

Produits

Le produit cartésien (ou produit)

$$\begin{tikzcd} & Y_1 \times Y_2 \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ Y_1 & & Y_2 \end{tikzcd}$$

vérifie la propriété suivante

$$\forall \quad \begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[drr, "f_2"] & & Y_1 \times Y_2 \arrow[dll, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"] & \\ Y_1 & & & & Y_2 \end{tikzcd} \qquad \exists! \quad \begin{tikzcd} & X \arrow[r, "\langle f_1, f_2 \rangle"] \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[drr, "f_2"] \arrow[dr, phantom, "="] & Y_1 \times Y_2 \arrow[dll, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"] \arrow[dl, phantom, "="] & \\ Y_1 & & & Y_2 \end{tikzcd}$$

Sommes

L'union disjointe (ou coproduit ou somme)

$$\begin{tikzcd} & X_1 + X_2 & \\ X_1 \arrow[ur, "c_1"] & & X_2 \arrow[ul, "c_2"'] \end{tikzcd}$$

vérifie la propriété suivante

$$\forall \quad \begin{tikzcd} & Y & & X_1 + X_2 & \\ X_1 \arrow[ur, "f_1"] \arrow[urr, "c_1"'] & & & & X_2 \arrow[ull, "f_2"] \arrow[ul, "c_2"'] \end{tikzcd} \qquad \exists! \quad \begin{tikzcd} & Y & & X_1 + X_2 \arrow[ll, "{[f_1|f_2]}"'] & \\ X_1 \arrow[ur, "f_1"] \arrow[urr, "c_1"'] \arrow[urrr, phantom, "="] & & & & X_2 \arrow[ull, "f_2"] \arrow[ul, "c_2"'] \arrow[ulll, phantom, "="] \end{tikzcd}$$

Symétrie : dualité

La dualité consiste à inverser le sens des flèches.

produit	somme
$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\langle f_1, f_2 \rangle"] \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[drr, "f_2"] & Y_1 \times Y_2 \arrow[dl, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & \\ Y_1 \arrow[rr, phantom, "="] & & Y_2 \end{tikzcd}$	$\begin{tikzcd} Y & X_1 + X_2 \arrow[l, "{[f_1 \mid f_2]}"'] \\ X_1 \arrow[u, "f_1"] \arrow[ur, "c_1"'] \arrow[r, phantom, "="] & X_2 \arrow[ul, "c_2"] \arrow[ul, "f_2"'] \end{tikzcd}$
états	**exceptions**
$\begin{tikzcd} & T(X) = X \times \mathbb{S} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X & & \mathbb{S} \end{tikzcd}$	$\begin{tikzcd} & T(X) = X + \mathbb{E} & \\ X \arrow[ur] & & \mathbb{E} \arrow[ul] \end{tikzcd}$

- On voit apparaître une symétrie entre états et exceptions

Sémantique catégorique des effets : théories de Lawvere

Chaque effet est associé à des opérations :

- états : lire et mettre à jour
- exceptions : lever et traiter

[Plotkin, Power, Hyland, 2001. . .].

Pour chaque effet il existe une théorie de Lawvere qui engendre la monade de Moggi et qui fournit les opérations caractéristiques de l'effet.

Mais cette approche ne permet *pas* de traiter les exceptions.

Symétrie des opérations

États $T(X) = X \times \mathbb{S}$ (un indice i par variable)	Exceptions $T(X) = X + \mathbb{E}$ (un indice i par type d'exc.)
lookup $l_i : \mathbb{S} \to V_i$	raise $r_i : P_i \to \mathbb{E}$
update $u_i : V_i \times \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ $\begin{cases} l_i \circ u_i = \mathrm{id} \\ l_j \circ u_i = l_j \end{cases}$	handle $h_i : \mathbb{E} \to P_i + \mathbb{E}$ $\begin{cases} h_i \circ r_i = \mathrm{id} \\ h_i \circ r_j = r_j \end{cases}$
$\mathbb{S}$ "terminal" $\mathbb{S} = \prod_i V_i$	$\mathbb{E}$ "initial" $\mathbb{E} = \sum_i P_i$

- La symétrie s'étend aux opérations

Signification de la symétrie

- États

$$\begin{cases} l_i \circ u_i = \mathrm{id} \\ l_j \circ u_i = l_j \end{cases}$$

Pour lire la valeur d'une variable, on n'utilise que
la **dernière** mise à jour de cette variable,
tout ce qui a été exécuté entre les deux est oublié.

- Exceptions

$$\begin{cases} h_i \circ r_i = \mathrm{id} \\ h_i \circ r_j = r_j \end{cases}$$

Lorsqu'on lève une exception, on exécute immédiatement
le **premier** traitement de ce type d'exceptions,
tout ce qui est écrit entre les deux est oublié.

Conclusion

Les exceptions sont symétriques des états

Ce résultat est

- nouveau
- surprenant

Il apporte un point de vue

- relativement neuf sur les états
- complètement neuf sur les exceptions

Il pose de nombreuses questions...

- y a-t-il d'autres couples d'effets symétriques ?
- rattacher aux travaux de [Plotkin, Power, Hyland,. . .] ?