Méthodes catégoriques pour la réécriture de graphes

Dominique Duval, Rachid Echahed, Frédéric Prost

Journées ARROWS
Grenoble — 28 novembre 2006

Outline

Motivation

But.
Réécriture de graphes, y compris de graphes cycliques.

Exemples.

- Manipulation de listes circulaires :
  longueur, ajouter un élément, concaténer
- Renverser une liste en place

Technique.
DPO “Double PushOut” *(“double somme amalgamée”)*

H. Ehrig, G. Engels, H.-J. Kreowski, G. Rozenberg, eds.
Handbook of Graph Grammars and Computing by Graph Transformations,
Vol. 1, 2, 3. World Scientific, 1999.

Règles de réécriture

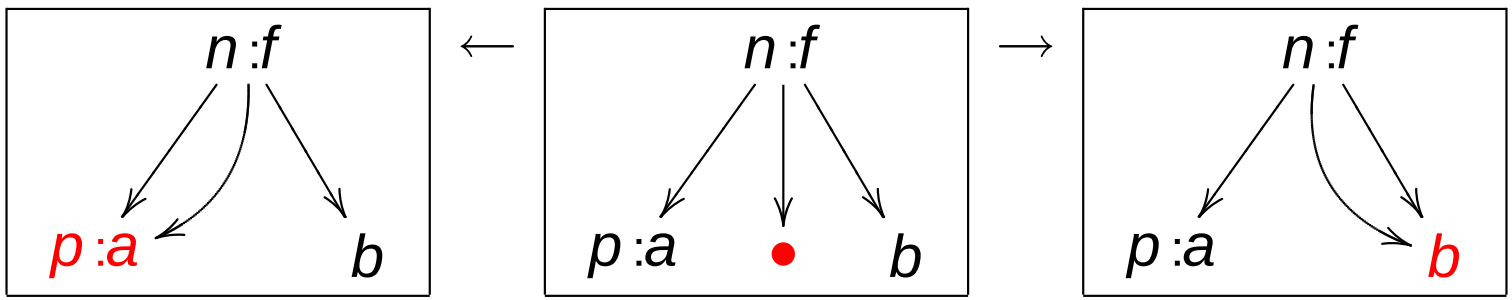
Chaque règle de réécriture $L \to R$ est “précisée” en

$$L \xleftarrow{\ell} K \xrightarrow{r} R$$

avec (au moins) deux intuitions possibles :

- K est la partie commune à L et R,
  ℓ est “injective”.
- K est obtenu en déconnectant des flèches de L,
  ℓ est “surjective”.

Un exemple de règle de réécriture



Double PushOut (DPO)

Chaque filtrage du membre gauche de la règle $\begin{array}{c} L \\ \downarrow m \\ G \end{array}$

est lui aussi déconnecté “selon ℓ”

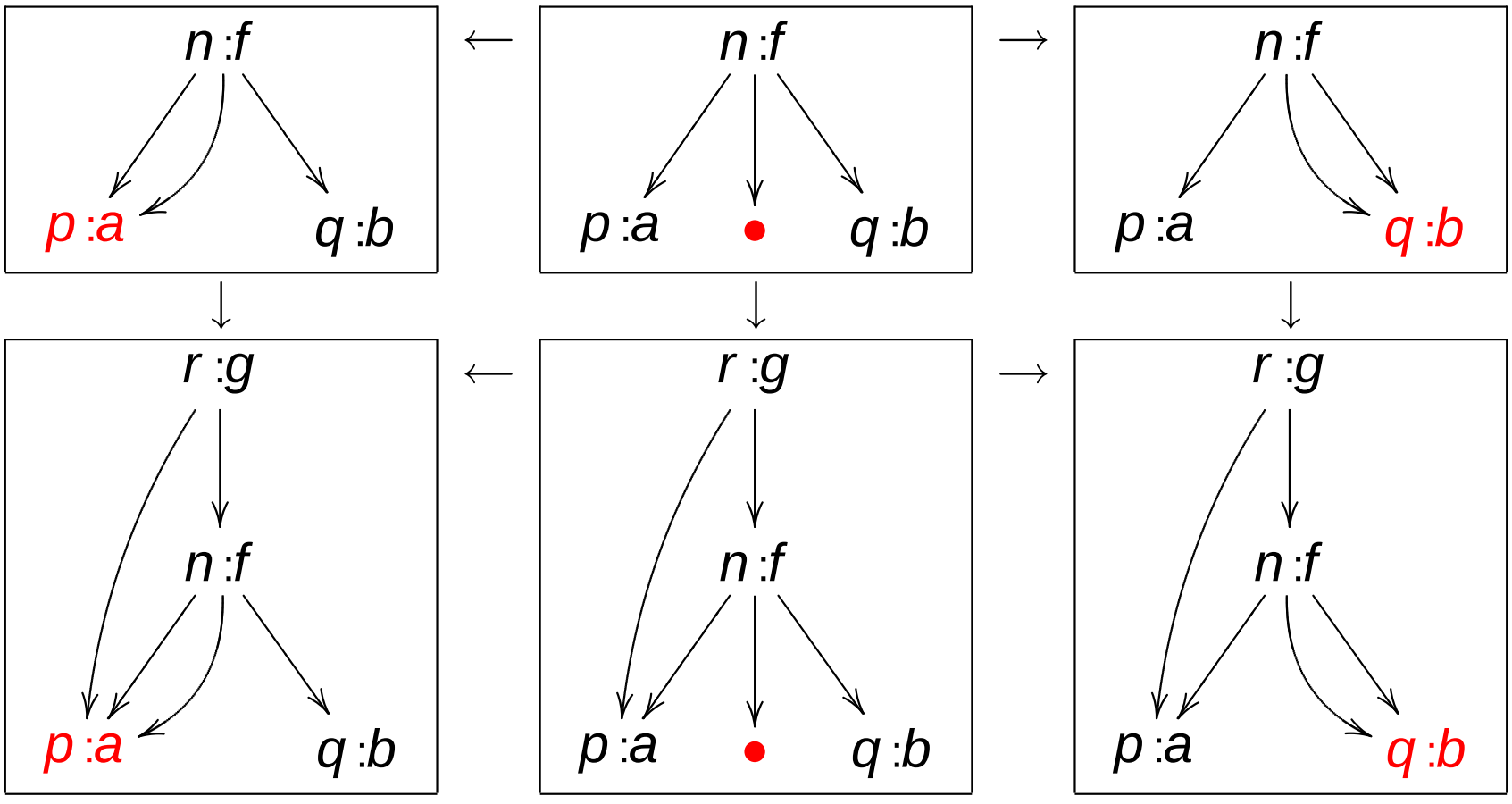
$$\begin{array}{ccc} L & \xleftarrow{\ell} & K \\ \downarrow m & & \downarrow d \\ G & \xleftarrow{\ell'} & D \end{array}$$

avant d’être reconnecté “selon r”

$$\begin{array}{ccccc} L & \xleftarrow{\ell} & K & \xrightarrow{r} & R \\ \downarrow m & & \downarrow d & & \downarrow m' \\ G & \xleftarrow{\ell'} & D & \xrightarrow{r'} & H \end{array}$$

ce qui fournit un filtrage du membre droit de la règle $\begin{array}{c} R \\ \downarrow m' \\ H \end{array}$

Un exemple de réécriture par DPO



Outline

Catégorie des graphes

Soit Ω une signature fixée, chaque $f \in \Omega$ a une arité $\mathrm{ar}(f) \in \mathbb{N}$.

Un graphe G est formé :

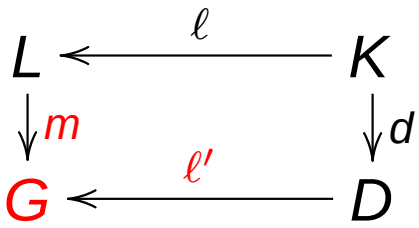
- d'un ensemble de nœuds $n, p, \ldots$
- d'un sous-ensemble de nœuds étiquetés $n : f, p : a, \ldots$ (avec $f, a, \cdots \in \Omega$)
- chaque nœud étiqueté $n : f$ a une liste de successeurs $\mathrm{suc}(n, 1), \ldots, \mathrm{suc}(n, k)$ où $k = \mathrm{ar}(f)$.

Un homomorphisme de graphes $G \to H$ est une fonction qui :

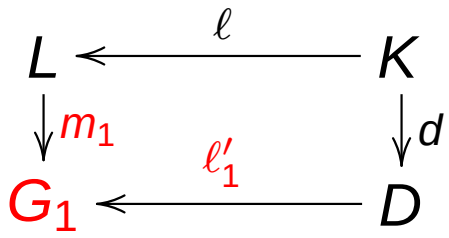
- associe à chaque nœud de G un nœud de H
- préserve les étiquettes et les successeurs (dans l'ordre).

Pushout

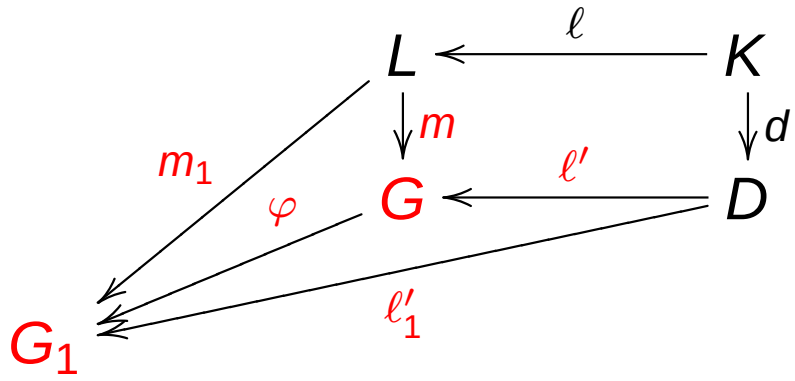
Un pushout (ou somme amalgamée) est un carré



qui est commutatif, i.e. $\ell' \circ d = m \circ \ell$,
et tel que, pour tout carré commutatif

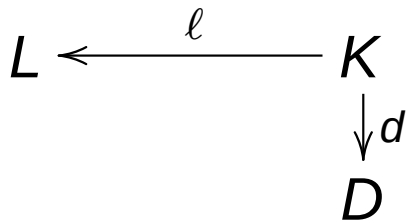


il existe un unique $\varphi : G \to G_1$ tel que $\varphi \circ m = m_1$ et $\varphi \circ \ell' = \ell'_1$



Unicité du pushout

Etant donné un span Σ



s'il a un pushout, celui-ci est unique (à iso près).

Le pushout de Σ "recolle L et D le long de K",
en identifiant l'image de K par ℓ (dans L)
et l'image de K par d (dans D)

Régles et filtrages

Une règle de réécriture $L \xleftarrow{\ell} K \xrightarrow{r} R$ est un couple d'homomorphismes de graphes.
Un filtrage $L \xrightarrow{m} G$ est un homomorphisme de graphes.
Ces homomorphismes doivent vérifier certaines conditions.

- Une déconnection de L est un homomorphisme $L \xleftarrow{\ell} K$ qui "décroche" des flèches (pour la redirection locale) et introduit de nouveaux nœuds (pour la redirection globale).
- Une règle de réécriture $L \xleftarrow{\ell} K \xrightarrow{r} R$ est formée d'une déconnection ℓ et d'un homomorphisme r qui préserve injectivement les nœuds non étiquetés de L.
- Un filtrage est un homomorphisme $L \xrightarrow{m} G$ qui préserve injectivement les nœuds étiquetés ou redirigés de L.

Double pushout

Soient une règle de réécriture $L \xleftarrow{\ell} K \xrightarrow{r} R$ et un filtrage $L \xrightarrow{m} G$.
On cherche un double pushout

$$\begin{array}{ccccc} L & \xleftarrow{\ell} & K & \xrightarrow{r} & R \\ \downarrow m & & \downarrow d & & \downarrow m' \\ G & \xleftarrow{\ell'} & D & \xrightarrow{r'} & H \end{array}$$

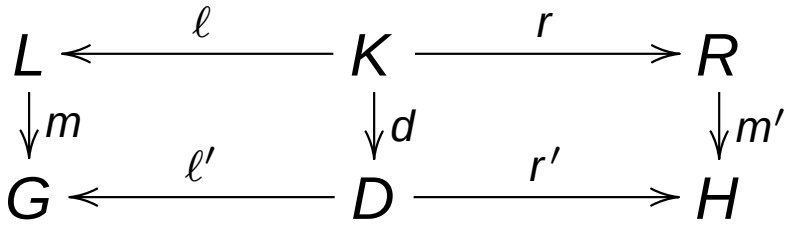
Attention. . .

- à gauche, on connaît $\begin{array}{ccc} L & \xleftarrow{\ell} & K \\ \downarrow m & & \\ G & & \end{array}$,

  et on cherche un pushout complément.
- à droite, on connaît $\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{r} & R \\ \downarrow d & & \\ D & & \end{array}$,

  et on cherche un pushout.

Résultats



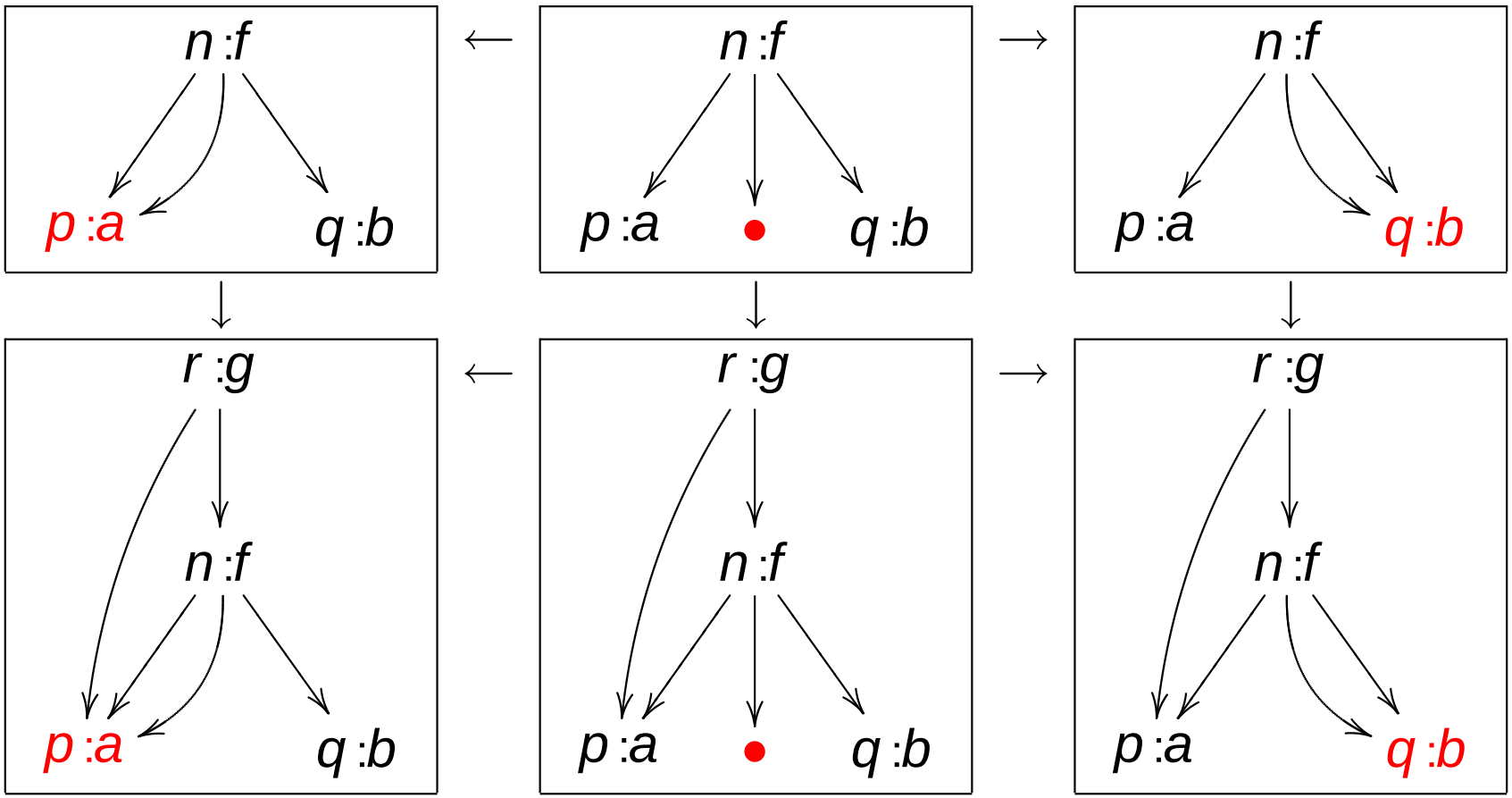
Théorème “gauche”.
Existence du pushout complément, à gauche.

Théorème “droit”.
Existence du pushout, à droite.

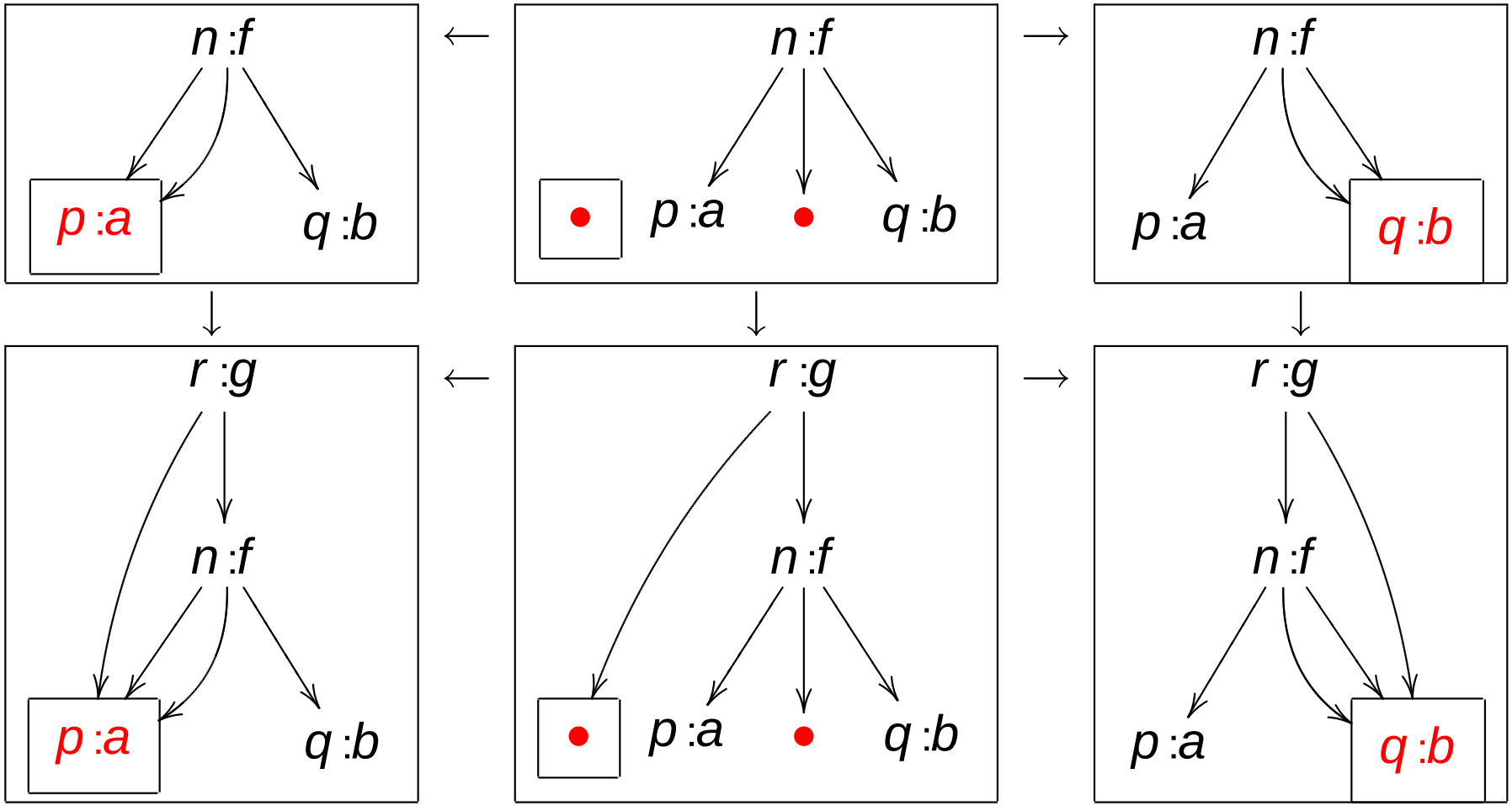
Preuves.

- Pour les nœuds : une étude détaillée.
- Pour les flèches : utiliser la fidélité du foncteur “ensemble des nœuds d’un graphe”.

Un exemple de redirection locale



Un exemple de redirection locale et globale



Outline

Catégorie des graphes enracinés

Le ramasse-miettes enlève les “miettes”, c’est-à-dire les nœuds qui ne sont pas atteignables à partir des racines.

Un graphe enraciné est un graphe avec un ensemble spécifié de nœuds, appelés racines.

Un homomorphisme de graphes enracinés est un homomorphisme de graphes qui préserve les racines.

Soit **Gr** la catégorie des graphes enracinés.

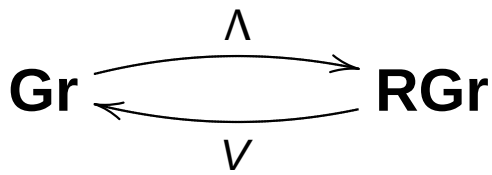
Par la suite, tous les graphes sont enracinés.

Une définition abstraite du ramasse-miettes

Soit **RGr** la catégorie des graphes atteignables.

L'inclusion est un foncteur V : **RGr** $\longrightarrow$ **Gr**.

Théorème. Le ramasse-miette est le foncteur Λ adjoint à droite de l'inclusion



i.e., pour tout graphe atteignable H
et tout graphe G, "naturellement en H et G" :

$$\mathbf{Gr}(V(H), G) \cong \mathbf{RGr}(H, \Lambda(G))$$

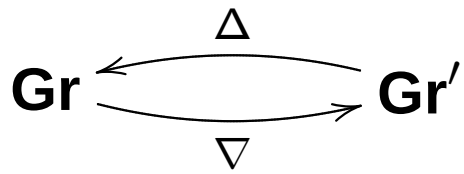
Preuve. Immédiate.

Le ramasse-miettes commence par le marquage

Soit $\mathbf{Gr}'$ la catégorie des graphes marqués.

Le foncteur oubli $\Delta : \mathbf{Gr}' \to \mathbf{Gr}$ oublie le marquage.

Théorème. Le marquage des nœuds atteignables est le foncteur ∇ adjoint à gauche de l'oubli



Cela signifie que pour tout graphe graphe G
et tout graphe marqué K, "naturellement en G et K" :

$$\mathbf{Gr}(G, \Delta(K)) \cong \mathbf{Gr}'(\nabla(G), K)$$

Preuve. Immédiate.

Ramasse-miettes et adjonction

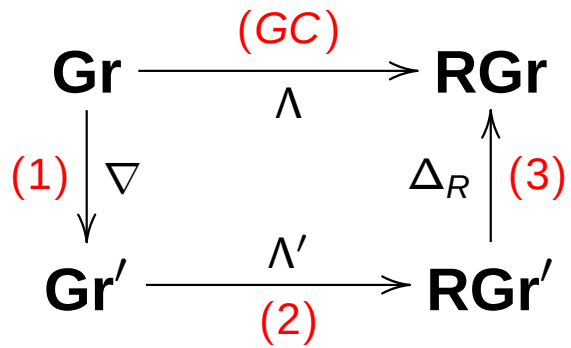
Le principe de base du ramasse-miettes :

1. marquer les nœuds atteignables,
2. enlever les nœuds qui ne sont pas marqués,
3. oublier le marquage.

Soit $\mathbf{RGr}'$ la catégorie des graphes marqués atteignables.
L'inclusion est un foncteur $V' : \mathbf{RGr}' \to \mathbf{Gr}'$.
dont l'adjoint à droite Λ' ôte les nœuds non marqués.

Théorème. "Ramasse-miettes = (1) puis (2) puis (3)" :

$$\Lambda = \Delta_R \circ \Lambda' \circ \nabla$$



Preuve. Facile : adjonctions et "chasse au diagramme".

Un exemple

. . . dessiné au tableau. . .

Conclusion

Les catégories fournissent un cadre théorique “confortable” pour exprimer :

- . . . la réécriture de graphes. . .
  D. Duval, R. Echahed, F. Prost.
  Modeling Pointer Redirection as Cyclic Term Graph Rewriting,
  Termgraph 2006, ENTCS.
- . . . avec ramasse-miettes. . .
  D. Duval, R. Echahed, F. Prost.
  Adjunction for Garbage Collection with Application to Graph Rewriting,
  soumis à Fossacs 2007.
- . . . et avec évaluation de l’utilisation de la mémoire. . .
  D. Duval, R. Echahed, F. Prost.
  travaux en cours.