

Maths For Fun

1,2,3, soleil ! Dessiner la récurrence

Dominique Duval

Université de Grenoble

19 octobre 2009

IV – Points Fixes

Plan

LES NATURELS

SOMMES

INITIALITÉ

TERMINALITÉ

CONCLUSION

BOUCLE

NAT I — Axiomes de Peano

L'ensemble des **entiers naturels** est un ensemble \mathbb{N} avec $0 \in \mathbb{N}$ et $\text{suc} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ qui vérifient :

1. $\forall x \in \mathbb{N}, \text{suc}(x) \neq 0.$
2. $\forall x, y \in \mathbb{N}, \text{suc}(x) = \text{suc}(y) \Rightarrow x = y.$
3. $\forall P \subseteq \mathbb{N},$
Initialisation. si $0 \in P$
Hérédité. et si $\forall x \in \mathbb{N} (x \in P \Rightarrow \text{suc}(x) \in P)$
Conclusion. alors $P = \mathbb{N}$

NAT II — Modèle initial

La **signature des naturels** Σ_{nat} :

$$\mathbb{I} \xrightarrow{z} \mathbb{N} \xleftarrow{s} \mathbb{N}$$

Le **modèle des naturels** M_{nat} :

$$\{*\} \xrightarrow{0} \mathbb{N} \xleftarrow{\text{suc}} \mathbb{N}$$

Le modèle M_{nat} de Σ_{nat} est **initial** :

Pour tout ensemble X avec $a \in X$ et $b : X \rightarrow X$,
il existe une **unique** fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ telle que
 $f(0) = a$ et $f(\text{suc}(n)) = b(f(n))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{ccccc} \{*\} & \xrightarrow{0} & \mathbb{N} & \xleftarrow{\text{suc}} & \mathbb{N} \\ \downarrow \text{id} & = & \downarrow f & = & \downarrow f \\ \{*\} & \xrightarrow{a} & X & \xleftarrow{b} & X \end{array}$$

Distinction de cas

Un modèle de Σ_{nat}

= un ensemble X avec $a \in X$ et $b : X \rightarrow X$

$$\{*\} \xrightarrow{a} X \xleftarrow{b} X$$

= un ensemble X avec $\boxed{\alpha : \{*\} + X \rightarrow X}$

où $\{*\} + X = \{*\} \cup X$ si $* \notin X...$

$$\{*\} + X \xrightarrow{\alpha} X$$

Preuve.

- ▶ Soit $\alpha : \{*\} + X \rightarrow X$, poser $a = \alpha|_{\{*\}}$ et $b = \alpha|_X$
- ▶ Soient $a : \{*\} \rightarrow X$ et $b : X \rightarrow X$, poser $\boxed{\alpha = [a|b]}$
"si $x \in \{*\}$ alors $\alpha(x) = a(x)$, si $x \in X$ alors $\alpha(x) = b(x)$ "

Φ_{nat} -algèbres

Notation :

$$\Phi_{\text{nat}}(X) = \{*\} + X$$

Une Φ_{nat} -algèbre est un ensemble X et une fonction α :

$$\{*\} + X \xrightarrow{\alpha} X$$

Une **morphisme de Φ_{nat} -algèbres** $f : (X, \alpha) \rightarrow (Y, \beta)$ est une fonction $f : X \rightarrow Y$ telle que :

$$\begin{array}{ccc} \{*\} + X & \xrightarrow{\alpha} & X \\ \boxed{\{*\} + f} \downarrow & = & \downarrow f \\ \{*\} + Y & \xrightarrow{\beta} & Y \end{array}$$

c'est-à-dire $f(\alpha(*)) = \beta(*)$ et $f(\alpha(x)) = \beta(f(x))$

NAT III — Algèbre initiale

Modèles de Σ_{nat}	=	Φ_{nat} -Algèbres
modèle	=	algèbre
morphisme de modèles	=	morphisme d'algèbres
modèle initial	=	algèbre initiale

La Φ_{nat} -algèbre $(\mathbb{N}, [0|\text{suc}])$ est **initiale** :

Pour toute Φ_{nat} -algèbre (X, α)

il existe un unique morphisme de Φ_{nat} -algèbres

$$f : (\mathbb{N}, [0|\text{suc}]) \rightarrow (X, \alpha)$$

$$\begin{array}{ccc} \{*\} + \mathbb{N} & \xrightarrow{[0|\text{suc}]} & \mathbb{N} \\ \{*\} + f \downarrow & = & \downarrow f \\ \{*\} + X & \xrightarrow{\alpha} & X \end{array}$$

Une bijection

Fait. Dans la Φ_{nat} -algèbre $(\mathbb{N}, [0|\text{suc}])$,
la fonction $[0|\text{suc}]$ est bijective (rappel : $\Phi_{\text{nat}}(\mathbb{N}) = \{*\} + \mathbb{N}$)

$$\begin{array}{ccc} \{*\} + \mathbb{N} & \xrightarrow{[0|\text{suc}]} & \mathbb{N} \\ * & \mapsto & 0 \\ 0 & \mapsto & 1 \\ 1 & \mapsto & 2 \\ & \vdots & \\ n & \mapsto & n + 1 \\ & \vdots & \end{array}$$

C'est une propriété de **point fixe**

$$\boxed{[0|\text{suc}] : \Phi_{\text{nat}}(\mathbb{N}) \cong \mathbb{N}}$$

Rappel. Points fixes

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Un **point fixe de f** est un élément $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x_0) = x_0$$

Ex. $f(x) = -x$, $f(x) = x + 1$, $f(x) = x^2$, $f(x) = x$.

Un point fixe x_0 de f est **attractif** si la suite $(x, f(x), f(f(x)), \dots, f^n(x), \dots)$ **converge** vers $\boxed{x_0}$ (pour x dans un voisinage de x_0).

Ex. $f(x) = x^2$, suite $(x, x^2, x^4, \dots, x^{2^n}, \dots)$

$x_0 = 0$ est attractif (pour $|x| < 1$)

$x_0 = 1$ n'est pas attractif.

Une construction de \mathbb{N}

Soit X un ensemble, alors

$$\Phi_{\text{nat}}(X) = \{*_0\} + X \text{ ou } \{0\} + X,$$

$$\Phi_{\text{nat}}^2(X) = \{*_0, *_1\} + X \text{ ou } \{0, 1\} + X, \dots$$

$$\Phi_{\text{nat}}^n(X) = \{*_0, *_1, \dots, *_n\} + X \text{ ou } \{0, 1, \dots, n-1\} + X, \dots$$

$$X \subset \{0\} + X \subset \{0, 1\} + X \subset \dots \subset \{0, 1, \dots, n-1\} + X \subset \dots$$

“À la limite” l’union est $\mathbb{N} + X$

En particulier si $X = \emptyset$

$$\emptyset \subset \{0\} \subset \{0, 1\} \subset \dots \subset \{0, 1, \dots, n-1\} \subset \dots$$

“À la limite” l’union est \mathbb{N}

Cette “suite” converge vers $\boxed{\mathbb{N}}$

Plan

LES NATURELS

SOMMES

INITIALITÉ

TERMINALITÉ

CONCLUSION

BOUCLE

Rappel. Produit cartésien

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \prod_{i=1}^n A_i = \{\langle a_1, \dots, a_n \rangle \mid a_1 \in A_1 \wedge \cdots \wedge a_n \in A_n\}$$

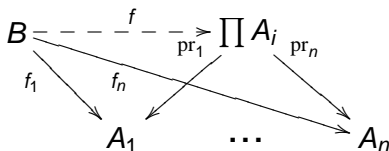
Caractérisation du produit cartésien.

Pour tous B et $f_i : B \rightarrow A_i$ (pour $i = 1, \dots, n$)

il existe une unique $f : B \rightarrow A_1 \times \cdots \times A_n$

telle que $\text{pr}_i \circ f = f_i$ pour tout i ,

c'est le " n -uple" $f = \langle f_1, \dots, f_n \rangle$



$n = 0$: le produit vide est le singleton $\{*\}$

Union disjointe (somme)

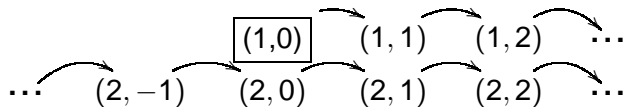
Définition.

$$A_1 + \cdots + A_n = \sum_{i=1}^n A_i = \cup_{i=1}^n (\{i\} \times A_i)$$

Si les A_i sont 2 à 2 disjoints, $\sum_{i=1}^n A_i \cong \cup_{i=1}^n A_i$

Ex. $\mathbb{N} + \mathbb{Z} = \{(1, k) | k \in \mathbb{N}\} \cup \{(2, k) | k \in \mathbb{Z}\}$

Avec $(1, 0) \in \mathbb{N} + \mathbb{Z}$ et $(i, k) \mapsto (i, k + 1) : \mathbb{N} + \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N} + \mathbb{Z}$



c'est un modèle de Σ_{nat} vérifiant les axiomes de Peano (1) et (2)
mais pas la récurrence (axiome 3)

Caractérisation de la somme

Soit $\text{in} : A_i \rightarrow A_1 + \dots + A_n$ l'injection : $x \mapsto (i, x)$

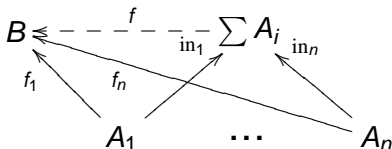
Pour tous B et $f_i : A_i \rightarrow B$ (pour $i = 1, \dots, n$)

il existe une unique $f : A_1 + \dots + A_n \rightarrow B$

telle que $f \circ \text{in}_i = f_i$ pour tout i ,

c'est la “**distinction de cas**” $f = [f_1 | \dots | f_n]$

“si $x \in A_i$ alors $f(x) = f_i(x)$ ”



$n = 0$: la somme vide est l'ensemble vide \emptyset

Distributivité ?

Rappel. Sur les nombres $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$

Propriété. Sur les ensembles,
en utilisant les propriétés universelles de $+$ et \times
on construit une fonction “canonique”

$$(A \times B) + (A \times C) \rightarrow A \times (B + C)$$

En fait c'est une bijection, mais on ne peut pas le montrer
en utilisant uniquement les propriétés universelles de $+$ et \times

Endofoncteurs polynomiaux

Une **fonction polynomiale** (en une variable) $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n a_i \times x^i \quad (a_i \in \mathbb{R})$$

Un **endofoncteur polynomial** (en une variable) $\Phi : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$

$$\Phi(X) = \sum_{i=1}^n A_i \times X^i \quad (A_i \in \mathbf{Set})$$

Pour toute fonction $f : X \rightarrow Y$, la fonction $\Phi(f) : \Phi(X) \rightarrow \Phi(Y)$

$$\Phi(f) = \sum_{i=1}^n A_i \times f^i$$

Ex. $\Phi_{\text{nat}}(X) = \{*\} + X = \{*\} \times X^0 + \{*\} \times X^1$

$\Phi_{\text{nat}}(f) = \{*\} + f$ telle que $* \mapsto *$ et $x \mapsto f(x)$

Endofoncteurs

Une **fonction** $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

associe à tout élément $x \in \mathbb{R}$ un élément $\varphi(x) \in \mathbb{R}$

Un **endofoncteur** $\Phi : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$

associe à tout ensemble X un ensemble $\Phi(X)$

et à toute fonction $f : X \rightarrow Y$ une fonction $\Phi(f) : \Phi(X) \rightarrow \Phi(X)$

de façon que $\Phi(\text{id}) = \text{id}$ et $\Phi(g \circ f) = \Phi(g) \circ \Phi(f)$

Ex. $\Phi_{\text{part}}(X) = \mathcal{P}(X)$

$\Phi_{\text{part}}(f) = \mathcal{P}(f) : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ telle que

$$f(X') = \{f(x) \mid x \in X'\}$$

L'endofoncteur Φ_{part} n'est pas polynomial

Plan

LES NATURELS

SOMMES

INITIALITÉ

TERMINALITÉ

CONCLUSION

BOUCLE

Algèbres d'un endofoncteur

Soit un **endofoncteur** $\Phi : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$.

Une **Φ -algèbre** est un ensemble X et une fonction α :

$$\Phi(X) \xrightarrow{\alpha} X$$

Une **morphisme de Φ -algèbres** $f : (X, \alpha) \rightarrow (Y, \beta)$ est une fonction $f : X \rightarrow Y$ telle que :

$$\begin{array}{ccc} \Phi(X) & \xrightarrow{\alpha} & X \\ \Phi(f) \downarrow & = & \downarrow f \\ \Phi(Y) & \xrightarrow{\beta} & Y \end{array}$$

Algèbres et Modèles

Soit Φ un **endofoncteur polynomial**

$$\Phi(X) = \sum_{i=1}^n A_i \times X^i = A_0 + A_1 \times X + \cdots + A_n \times X^n$$

Soit Σ la **signature paramétrée**

$$P_0 \rightarrow X$$

$$P_1 \times X \rightarrow X$$

$$\vdots$$

$$P_n \times X^n \rightarrow X$$

Les **Φ -algèbres** sont les **modèles de Σ** où P_i est interprété par A_i , et les morphismes de Φ -algèbres sont les morphismes de modèles de Σ (donc id sur les A_i).

Les naturels

L'endofoncteur Φ_{nat}

$$\Phi_{\text{nat}}(X) = \{*\} + X$$

Une Φ_{nat} -algèbre = un ensemble X et une fonction

$$\{*\} + X \xrightarrow{\alpha} X$$

La signature Σ_{nat}

$$\mathbb{1} \xrightarrow{z} N \xleftarrow{s} N$$

Un modèle de Σ_{nat} = un ensemble X et deux fonctions

$$\{*\} \xrightarrow{a} X \xleftarrow{b} X$$

C'est la même chose, poser

$$\alpha = [a|b]$$

Les listes

L'endofoncteur Φ_{list}

$$\Phi_{\text{list}}(X) = \{*\} + A \times X$$

Une Φ_{list} -algèbre = un ensemble X et une fonction

$$\{*\} + A \times X \xrightarrow{\alpha} X$$

La signature Σ_{list}

$$\mathbb{I} \xrightarrow{e} L \xleftarrow{c} P \times L$$

Un modèle de Σ_{list} = un ensemble X et deux fonctions

$$\{*\} \xrightarrow{a} X \xleftarrow{b} A \times X$$

C'est la même chose, poser

$$\alpha = [a|b]$$

Initialité \Rightarrow Point fixe

Théorème. *Pour tout endofoncteur, toute algèbre initiale est un point fixe*

Preuve. Soit (X, α) une Φ -algèbre initiale, montrons que α est une bijection.

$(\Phi(X), \Phi(\alpha))$ est une Φ -algèbre, donc il existe une unique $f : X \rightarrow \Phi(X)$ telle que

$$\begin{array}{ccc} \Phi(X) & \xrightarrow{\alpha} & X \\ \Phi(f) \downarrow & = & \downarrow f \\ \Phi^2(X) & \xrightarrow{\Phi(\alpha)} & \Phi(X) \end{array}$$

Montrer que $f = \alpha^{-1}$. (à terminer...)

Corollaire. *Pour tout endofoncteur, algèbre initiale = plus petit point fixe*

Polynomial \Rightarrow Initialité

Théorème.

Tout endofoncteur polynomial a un plus petit point fixe

Preuve. (idée)

$$\begin{array}{ccccccc} \emptyset & \xrightarrow{u} & \Phi(\emptyset) & \xrightarrow{\Phi(u)} & \Phi^2(\emptyset) & \xrightarrow{\Phi^2(u)} & \dots & \text{limite...} & L \\ \downarrow u & & \downarrow \Phi(u) & & \downarrow \Phi^2(u) & & & & \downarrow \cong \\ \Phi(\emptyset) & \xrightarrow{\Phi(u)} & \Phi^2(\emptyset) & \xrightarrow{\Phi^2(u)} & \Phi^3(\emptyset) & \xrightarrow{\Phi^3(u)} & \dots & \text{limite...} & L' \end{array}$$

et de plus, puisque Φ est polynomial, $L' \cong \Phi(L)$.

Construction d'algèbre initiale

Les naturels. $\Phi_{\text{nat}}(X) = \{*_0\} + X$

$$\emptyset \subset \{0\} \subset \{0, 1\} \subset \{0, 1, 2\} \dots \text{limite} \dots \mathbb{N}$$

Les listes sur A . $\Phi_{\text{list}}(X) = \{*_0\} + A \times X$

$$\emptyset \subset \{()\} \subset \{(), (a_1)\} \subset \{(), (a_1), (a_1, a_2)\} \dots \text{limite} \dots \mathbb{A}^*$$

Plan

LES NATURELS

SOMMES

INITIALITÉ

TERMINALITÉ

CONCLUSION

BOUCLE

Coalgèbres d'un endofoncteur

Soit un **endofoncteur** $\Phi : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$.

Une **Φ -coalgèbre** est un ensemble X et une fonction α :

$$X \xrightarrow{\alpha} \Phi(X)$$

Une **morphisme de Φ -coalgèbres** $f : (X, \alpha) \rightarrow (Y, \beta)$ est une fonction $f : X \rightarrow Y$ telle que :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha} & \Phi(X) \\ \downarrow f & = & \downarrow \Phi(f) \\ Y & \xrightarrow{\beta} & \Phi(Y) \end{array}$$

Coalgèbres et Modèles

Soit Φ un **endofoncteur polynomial**

$$\Phi(X) = \sum_{i=1}^n A_i \times X^i = A_0 + A_1 \times X + \cdots + A_n \times X^n$$

Cas particulier

$$\Phi(X) = A_n \times X^n$$

Soit Σ la **signature paramétrée**

$$X \rightarrow P_n \times X^n$$

Les **Φ -coalgèbres** sont les **modèles de Σ** où P_i est interprété par A_i , et les morphismes de Φ -coalgèbres sont les morphismes de modèles de Σ (donc id sur les A_j).

Les flots

L'endofoncteur Φ_{flot}

$$\Phi_{\text{flot}}(X) = A \times X$$

Une Φ_{flot} -coalgèbre = un ensemble X et une fonction

$$X \xrightarrow{\alpha} A \times X$$

La signature Σ_{flot}

$$P \xleftarrow{h} F \xrightarrow{t} F$$

Un modèle de Σ_{flot} = un ensemble X et deux fonctions

$$A \xleftarrow{a} X \xrightarrow{b} X$$

C'est la même chose, poser

$$\alpha = \langle a, b \rangle$$

Terminalité \Rightarrow Point fixe

Théorème. *Pour tout endofoncteur, toute coalgèbre terminale est un point fixe*

Corollaire. *Pour tout endofoncteur, coalgèbre terminale = plus grand point fixe*

Théorème.

Tout endofoncteur polynomial a un plus grand point fixe

Preuve. (idée)

$$\begin{array}{ccccccc} \{*\} & \xleftarrow{u} & \Phi(\{*\}) & \xleftarrow{\Phi(u)} & \Phi^2(\{*\}) & \xleftarrow{\Phi^2(u)} & \dots & \text{limite...} & L \\ \uparrow u & & \uparrow \Phi(u) & & \uparrow \Phi^2(u) & & & & \uparrow \cong \\ \Phi(\{*\}) & \xleftarrow{\Phi(u)} & \Phi^2(\{*\}) & \xleftarrow{\Phi^2(u)} & \Phi^3(\{*\}) & \xleftarrow{\Phi^3(u)} & \dots & \text{limite...} & L' \end{array}$$

et de plus, puisque Φ est polynomial, $L' \cong \Phi(L)$.

Construction de coalgèbre terminale

Les flots. $\Phi_{\text{flot}}(X) = A \times X$

$$\{*\} \longleftarrow \{(a_1)\} \longleftarrow \{(a_1, a_2)\} \dots \longleftarrow \text{limite...} \quad \mathbb{A}^\omega$$

Les listes et les flots. $\Phi_{\text{list+flot}}(X) = \{*\} + A \times X$

$$\{*\} \longleftarrow \{(), (a_1)\} \longleftarrow \{(), (a_1), (a_1, a_2)\} \dots \longleftarrow \text{limite...} \quad \mathbb{A}^* + \mathbb{A}^\omega$$

Plan

LES NATURELS

SOMMES

INITIALITÉ

TERMINALITÉ

CONCLUSION

BOUCLE

Récurrance, induction, coinduction

- ▶ L'induction généralise la récurrence,
la coinduction est “duale” de l'induction
- ▶ L'induction pour **construire**
La coinduction pour **observer**
- ▶ C'est un problème fondamental (maths, logique, info)
avec des approches variées (maths, logique, info)
- ▶ Sous-jacent dans toutes ces approches :
la théorie des **catégories**
- ▶ Cette approche s'applique à d'autres logiques
(1er ordre, ...)

Plan

LES NATURELS

SOMMES

INITIALITÉ

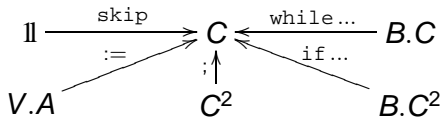
TERMINALITÉ

CONCLUSION

BOUCLE

La sémantique est un modèle

Signature Σ_{IMP}



Soit $\mathbb{S} = \mathbb{Z}^V$ l'ensemble des **états**

La **sémantique** de IMP est un modèle $[[\dots]]$ de Σ_{IMP} :

- ▶ $[[C]]$ est l'ensemble $\mathbb{S}^{\mathbb{S}, \rho}$ des **fonctions partielles** de \mathbb{S} vers \mathbb{S}
- ▶ $[[\text{skip}]]$ est la fonction identité $s \mapsto s$
- ▶ $[[X := a]]$ est la fonction de mise à jour $s \mapsto s[n/X]$
où l'entier n est la valeur de l'expression a
- ▶ $[[c_1; c_2]]$ est la fonction composée $s \mapsto [[c_2]]([[c_1]](s))$
- ▶ $[[\text{if } b \text{ then } c_1 \text{ else } c_2]]$ est la fonction
si $[[b]]$ alors $[[c_1]]$ sinon $[[c_2]]$ telle que
 $s \mapsto [[c_1]](s)$ si $[[b]](s) = \text{true}$
 $s \mapsto [[c_2]](s)$ si $[[b]](s) = \text{false}$

La sémantique de la boucle

$[[\text{while } b \text{ do } c]]$ est une fonction partielle de \mathbb{S} vers \mathbb{S} telle que

$[[\text{while } b \text{ do } c]] = [[\text{if } b \text{ then } (c; \text{while } b \text{ do } c) \text{ else skip}]]$

c'est-à-dire, en posant $w = [[\text{while } b \text{ do } c]]$

$w = \text{si } [[b]] \text{ alors } w \circ [[c]] \text{ sinon id}$

Soit $\Phi : \mathbb{S}^{\mathbb{S}, \rho} \rightarrow \mathbb{S}^{\mathbb{S}, \rho}$ telle que

$\Phi(f) = \text{si } [[b]] \text{ alors } f \circ [[c]] \text{ sinon id}$

Alors w est **un point fixe** de Φ .

Théorème. w est **le plus petit point fixe** de Φ .

L'ordre sur $\mathbb{S}^{\mathbb{S}, \rho}$ est l'ordre habituel sur les fonctions partielles :

$f \leq g$ si et seulement si $\mathcal{D}(f) \subseteq \mathcal{D}(g)$ et $\forall x \in \mathcal{D}(f) f(x) = g(x)$