Chapitre 4 : Adjonction

Foncteurs adjoints

Définition. Soient deux catégories $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ et deux foncteurs F, G :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, bend right, "F"'] & \mathbf{B} \arrow[l, bend right, "G"'] \end{tikzcd}$$

Alors F est *adjoint à gauche* de G, et G est *adjoint à droite* de F (parfois noté $G \vdash F$), s'il y a une bijection naturelle en $A \in \mathbf{A}$ et $B \in \mathbf{B}$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(A, G(B)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(F(A), B)$$

Exemple. On a déjà vu plusieurs exemples où G est un foncteur d'oubli (noté U) :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Ens} \arrow[r, bend right, "F"'] & \mathbf{Mon} \arrow[l, bend right, "U"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{Gr} \arrow[r, bend right, "F"'] & \mathbf{Cat} \arrow[l, bend right, "U"'] \end{tikzcd}$$

et où parfois, de plus, $F.U \cong \mathrm{Id}_{\mathbf{B}}$:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{GrCat} \arrow[r, bend right, "F"'] & \mathbf{Cat} \arrow[l, bend right, "U"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{Spec}_{\mathrm{eq}} \arrow[r, bend right, "F"'] & \mathbf{Theo}_{\mathrm{eq}} \arrow[l, bend right, "U"'] \end{tikzcd}$$

Exemple. La catégorie **Cat** a des produits : la catégorie $\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2$ (produit des catégories C_1 et C_2) a pour objets les couples (X_1, X_2) et pour morphismes les couples (f_1, f_2). D'où :

$$\Delta_{\mathbf{C}} = (\mathrm{id}_{\mathbf{C}}, \mathrm{id}_{\mathbf{C}}) : \mathbf{C} \to \mathbf{C} \times \mathbf{C}$$

Le foncteur $\Delta_{\mathbf{C}}$ a pour adjoint à droite le produit binaire, car

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y_1 \times Y_2) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y_1) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y_2) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}\times\mathbf{C}}(\Delta(X), (Y_1, Y_2)) \ :$$

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[r, bend right, "\Delta"'] & \mathbf{C} \times \mathbf{C} \arrow[l, bend right, "\times"'] \end{tikzcd}$$

Le foncteur $\Delta_{\mathbf{C}}$ a pour adjoint à gauche la somme binaire, car

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X_1 + X_2, Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X_1, Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X_2, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}\times\mathbf{C}}((X_1, X_2), \Delta(X)) \ :$$

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} \times \mathbf{C} \arrow[r, bend right, "+"'] & \mathbf{C} \arrow[l, bend right, "\Delta"'] \end{tikzcd}$$

Unité et counité

Soit une adjonction :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, bend right, "F"'] & \mathbf{B} \arrow[l, bend right, "G"'] \end{tikzcd} \qquad \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(A, G(B)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(F(A), B)$$

Alors, en posant $B = F(A)$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(A, G(F(A))) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(F(A), F(A))$$

$$\eta_A \leftrightarrow \mathrm{id}_{F(A)}$$

d'où une transformation naturelle appelée *unité* :

$$\eta : \mathrm{Id}_{\mathbf{A}} \Rightarrow G.F$$

Dualement, en posant $A = G(B)$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(G(B), G(B)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(F(G(B)), B)$$

$$\mathrm{id}_{G(B)} \leftrightarrow \varepsilon_B$$

d'où une transformation naturelle appelée *counité* :

$$\varepsilon : F.G \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathbf{B}}$$

Exemple.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Gr} \arrow[r, bend right, "F"'] & \mathbf{Cat} \arrow[l, bend right, "U"'] \end{tikzcd}$$

Pour tout graphe Γ il y a un morphisme de graphes $\quad \eta_\Gamma : \Gamma \to U(F(\Gamma))$
Pour toute catégorie $\mathbf{C}$ il y a un foncteur $\quad \varepsilon_{\mathbf{C}} : F(U(\mathbf{C})) \to \mathbf{C}$

Propriété. Dans une équivalence de catégories :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[r, bend left, "\gamma"] & \mathbf{C}' \arrow[l, bend left, "\gamma'"] \end{tikzcd} \qquad \text{avec } \gamma'.\gamma \cong \mathrm{id}_{\mathbf{C}} \text{ et } \gamma.\gamma' \cong \mathrm{id}_{\mathbf{C}'}$$

γ et γ' sont adjoints, des deux côtés.

Citations

Saunders Mac Lane ("Categories for the working mathematician", 2nd ed., notes du Ch.4) :

... Daniel Kan in [1958] was the first to recognize and study adjoint functors.

... Bourbaki's construction problem emphasized representable functors, and asked

"Find Fx so that $W(x,a) \cong A(Fx,a)$".

This formulation lacks the symmetry of the adjunction problem,

"Find Fx so that $X(x,Ga) \cong A(Fx,a)$".

and so missed a basic discovery."

... Put differently, good general theory does not search for the maximum generality, but for the right generality.

Jean-Pierre Marquis ("Categories", *in* Stanford Encyclopedia of Philosophy) :

The number of mathematical constructions that can be described as adjoints is simply stunning. Although the details of each one of these constructions vary considerably, the fact that they can all be described using the same language illustrates the profound unity of mathematical concepts and mathematical thinking.

Préservation des (co)limites

Théorème. Soit une adjonction :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, bend right, "F"'] & \mathbf{B} \arrow[l, bend right, "G"'] \end{tikzcd}$$

Alors l'adjoint à gauche F préserve les colimites
et l'adjoint à droite G préserve les limites.

Exemple. Les foncteurs oubli et générateur :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Ens} \arrow[r, bend right, "F"'] & \mathbf{Mon} \arrow[l, bend right, "U"'] \end{tikzcd}$$

forment une adjonction, donc U préserve les limites et F préserve les colimites,
en particulier :

$$U(\prod_i M_i) = \prod_i U(M_i) \qquad F(\sum_i A_i) = \sum_i F(A_i)$$

U préserve l'objet terminal : $U(\{e\}) = \{*\}$
en effet U est un adjoint à droite, donc il préserve les limites.

U ne préserve pas l'objet initial : $U(\{e\}) = \{*\} \neq \emptyset$
donc U n'est pas un adjoint à gauche, i.e., U n'a pas d'adjoint à droite.

Existence de foncteurs libres

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Ens} \arrow[r, bend right, "F"'] & \mathbf{Mon} \arrow[l, bend right, "U"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{Gr} \arrow[r, bend right, "F"'] & \mathbf{Cat} \arrow[l, bend right, "U"'] \end{tikzcd}$$

"Un foncteur libre est l'adjoint à gauche d'un foncteur oubli"
— existence du foncteur libre ?
— qu'est-ce qu'un foncteur oubli ?

Soit un morphisme d'esquisses projectives (*ou* spécifications à limites) :

$$\mathbf{S} \xrightarrow{P} \mathbf{S}'$$

Définition. Le *foncteur oubli* U_P est la composition avec P :

$$\mathbf{Mod}(\mathbf{S}) \xleftarrow{U_P} \mathbf{Mod}(\mathbf{S}')$$

$$U_P(\Sigma') = \Sigma'.P$$

Théorème. Le foncteur U_P a un adjoint à gauche, c'est le *foncteur libre* F_P :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Mod}(\mathbf{S}) \arrow[r, bend right, "F_P"'] & \mathbf{Mod}(\mathbf{S}') \arrow[l, bend right, "U_P"'] \end{tikzcd}$$

Propriété. $F_P.\mathrm{Yon}_{\mathbf{S}} = \mathrm{Yon}_{\mathbf{S}'}.P$, autrement dit le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{S} \arrow[r, "P"] \arrow[d, "\mathrm{Yon}_{\mathbf{S}}"'] & \mathbf{S}' \arrow[d, "\mathrm{Yon}_{\mathbf{S}'}"] \\ \mathbf{Mod}(\mathbf{S}) \arrow[r, "F_P"] & \mathbf{Mod}(\mathbf{S}') \end{tikzcd}$$

Exemple.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{S}_{\mathrm{gr}} \arrow[r, "P=\subseteq"] \arrow[d, "\mathrm{Yon}_{\mathrm{gr}}"'] & \mathbf{S}_{\mathrm{cat}} \arrow[d, "\mathrm{Yon}_{\mathrm{cat}}"] \\ \mathbf{Gr} \arrow[r, "F_P"] & \mathbf{Cat} \end{tikzcd}$$

Correspondance de Galois

Un *préordre* $(P, \leq_P)$ est un ensemble P avec une relation réflexive et transitive "$\leq_P$".
A tout préordre $(P, \leq_P)$ est associé une catégorie $\mathbf{P}$: ses objets sont les éléments de P, et il y a une flèche $x \to y$ si et seulement si $x \leq y$.
Un foncteur $\Phi : (P, \leq_P) \to (Q, \leq_Q)$ est une fonction $\Phi : P \to Q$ qui préserve l'ordre :

si $x \leq_P y$ alors $\Phi(x) \leq_Q \Phi(y)$.

Définition. Une *connection (ou correspondance) de Galois (covariante)* est une adjonction entre deux préordres.
Autrement dit, une connection de Galois est formée de deux fonctions F et G préservant l'ordre :

$$\begin{tikzcd} (P, \leq_P) \arrow[r, bend right, "F"'] & (Q, \leq_Q) \arrow[l, bend right, "G"'] \end{tikzcd}$$

telles que, pour tous $x \in P$ et $y \in Q$:

$$x \leq_P G(y) \;\Leftrightarrow\; F(x) \leq_Q y$$

Propriété. Pour tous $x \in P$ et $y \in Q$:

$$x \leq_P G(F(x)) \;\; \text{(unité)} \quad \text{et} \;\; F(G(y)) \leq_Q y \;\; \text{(counité)}$$

Exemple.

$$\begin{tikzcd} (\mathbb{N}, \leq_{bN}) \arrow[r, bend right, "\subseteq"'] & (\mathbb{R}, \leq_{\mathbb{R}}) \arrow[l, bend right, "y \mapsto [y]"'] \end{tikzcd}$$

On a bien, pour tous $x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{R}$: $x \leq_{\mathbb{N}} [y] \iff x \leq_{\mathbb{R}} y$.

Exemple. (Evariste Galois).
Soient $\mathcal{K}/\mathcal{K}_0$ une extension galoisienne de corps, de groupe de Galois $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(\mathcal{K}/\mathcal{K}_0)$.

$$\begin{tikzcd} (\mathcal{P}(\mathcal{K}), \subseteq) \arrow[r, bend right, "H \mapsto \{x \in \mathcal{K} | g \in H \Rightarrow g(x) = x\}"'] & (\mathcal{P}(\mathcal{G}), \supseteq) \arrow[l, bend right, "L \mapsto \{g \in \mathcal{G} | x \in L \Rightarrow g(x) = x\}"'] \end{tikzcd}$$

Autrement dit :
$F(L)$ est le sous-groupe de $\mathcal{G}$ qui fixe tous les points de L,
$G(H)$ est le sous-corps de $\mathcal{K}$ formé des points fixes de tous les $g \in H$.

Alors F et G forment une correspondance de Galois :
ils préservent l'ordre, et pour tous $L \subseteq \mathcal{K}$ et $H \subseteq \mathcal{G}$:

$$L \subseteq G(H) \;\Leftrightarrow\; \forall k \in L \; \forall g \in H \; g(k) = k \;\Leftrightarrow\; F(L) \supseteq H$$

De plus :
$G(F(L))$ est le plus petit sous-corps de $\mathcal{K}$ contenant L,
$F(G(H))$ est le plus petit sous-groupe de $\mathcal{G}$ contenant H.

Fonctions partielles

Supposons que $\mathbf{C}$ contient "assez" de limites et de colimites.

A partir de $\mathbf{C}$, on définit une catégorie $\mathbf{K}(\mathbf{C})$:

— les objets de $\mathbf{K}(\mathbf{C})$ sont les objets de $\mathbf{C}$,

— les flèches $X \to Y$ de $\mathbf{K}(\mathbf{C})$ sont les flèches $X \to Y + \mathbb{1}$ de $\mathbf{C}$,

— pour chaque objet X, la flèche identité $\mathrm{id}_X : X \to X$ de $\mathbf{K}(\mathbf{C})$ est la coprojection $\eta_X : X \to X + \mathbb{1}$ de $\mathbf{C}$,

— pour chaque couple de flèches consécutives $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ de $\mathbf{K}(\mathbf{C})$, la flèche $g.f : X \to Z$ de $\mathbf{K}(\mathbf{C})$ est définie dans $\mathbf{C}$ de la manière suivante (où $i_Z : \mathbb{1} \to Z + \mathbb{1}$ est la coprojection) :

$$g.f = [g|i_Z].f \qquad \begin{tikzcd} & Y + \mathbb{1} \arrow[r, "{[g|i_Z]}"] & Z + \mathbb{1} \\ X \arrow[ur, "f"] & Y \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

ou bien, de façon équivalente (où $\mu_Z = [\mathrm{id}_{Z+\mathbb{1}}|i_Z]$ identifie les deux "$\mathbb{1}$") :

$$g.f = \mu_Z.(g + \mathrm{id}_{\mathbb{1}}).f \qquad \begin{tikzcd} & & Z + \mathbb{1} + \mathbb{1} \arrow[d, "\mu_Z"] \\ & Y + \mathbb{1} \arrow[ur, "g+\mathbb{1}"] & Z + \mathbb{1} \\ X \arrow[ur, "f"] & Y \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Alors, les axiomes d'associativité et d'élément neutre sont vérifiés : $\mathbf{K}(\mathbf{C})$ est une catégorie.

Lorsque $\mathbf{C} = \mathbf{Ens}$, en interprétant l'unique élément de $\mathbb{1}$ comme une "erreur", la catégorie $\mathbf{K}(\mathbf{Ens})$ permet de manipuler des fonctions susceptibles de retourner une erreur, avec propagation de l'erreur lors de la composition.

La catégorie $\mathbf{Pfn}$ des *fonctions partielles* est définie par :

— les objets de $\mathbf{Pfn}$ sont les ensembles,

— les flèches de $\mathbf{Pfn}$ sont les fonctions partielles : $f \to Y$ dans $\mathbf{Pfn}$ est notée $f : X \rightharpoonup Y$, et le domaine de définition de f est noté $\mathrm{Def}(f)$,

— les identités sont les identités usuelles $\mathrm{id}_X : X \rightharpoonup X$ avec $\mathrm{Def}(\mathrm{id}_X) = X$,

— pour chaque couple $f : X \rightharpoonup Y$, $g : Y \rightharpoonup Z$, la composée $g.f$ est définie par : $\mathrm{Def}(g.f) = \{x \in X \mid x \in \mathrm{Def}(f) \wedge f(x) \in \mathrm{Def}(g)\}$ et $g.f(x) = g(f(x))$.

Il y a un isomorphisme $\Phi : \mathbf{K}(\mathbf{Ens}) \xrightarrow{\cong} \mathbf{Pfn}$, défini par :

— sur les objets, $\Phi(X) = X$,

— sur les flèches : soit $f : X \to Y$ dans $\mathbf{K}(\mathbf{Ens})$, c'est-à-dire $f : X \to Y + \mathbb{1}$ dans $\mathbf{Ens}$, alors $\Phi(f) : X \rightharpoonup Y$ est telle que $\mathrm{Def}(\Phi(f)) = \{x \in X \mid f(x) \in Y\}$ et $\Phi(f)(x) = f(x)$.

Monades

Définition. Une *monade sur* $\mathbf{C}$ est un endofoncteur $M : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ avec deux transformations naturelles $\eta : \mathrm{Id}_{\mathbf{C}} \Rightarrow M$ (*unité*) et $\mu : M^2 \Rightarrow M$ (*multiplication*) telles que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{tikzcd} M^3 \arrow[r, "M\mu"] \arrow[d, "\mu M"'] & M^2 \arrow[d, "\mu"] \\ M^2 \arrow[r, "\mu"] & M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "\eta M"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_M"'] & M^2 \arrow[d, "\mu"] & M \arrow[l, "M\eta"'] \arrow[dl, "\mathrm{id}_M"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

(une monade est un monoïde dans la catégorie des endofoncteurs de $\mathbf{C}$).

La commutativité de ces diagrammes assure que la catégorie de Kleisli de M (définie page suivante) est bien une catégorie.

Exemple. Sur toute catégorie $\mathbf{C}$, l'identité $\mathrm{Id}_{\mathbf{C}}$ est une monade...

Exemple. Sur toute catégorie $\mathbf{C}$ avec $\mathbb{1}$ et $+$, la monade "$\cdots + \mathbb{1}$" ("lift monad") :
foncteur $M(X) = X + \mathbb{1}$, $M(f) = f + \mathrm{id}_{\mathbb{1}}$,
unité : la coprojection $\eta_X : X \to X + \mathbb{1}$,
multiplication $\mu_X = [\mathrm{id}_{X+\mathbb{1}} | i_X] : X + \mathbb{1} + \mathbb{1} \to X + \mathbb{1}$.

Exemple. Sur **Ens**, la monade des listes (ou "étoile de Kleene") :
foncteur $M(X) = X^*$, $M(f)$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (f(x_1), \ldots, f(x_n))$,
unité : $\eta_X : X \to X^*$, $x \mapsto (x)$,
multiplication $\mu_X : (X^*)^* \to X^*$, $((x_{1,1}, \ldots), \ldots, (x_{k,1}, \ldots)) \mapsto (x_{1,1}, \ldots, x_{k,n_k})$.

Exemple. Sur **Ens**, la monade des parties :
foncteur $M(X) = \mathcal{P}(X)$, $M(f)$, $Y \mapsto \{f(x) \mid x \in Y\}$,
unité : $\eta_X : X \to \mathcal{P}(X)$, $x \mapsto \{x\}$,
multiplication $\mu_X : \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) \to \mathcal{P}(X)$, $\{Y_1, \ldots, Y_k\} \mapsto Y_1 \cup \cdots \cup Y_k$.

Exemple. Monade "d'état" : voir plus loin.

Utilisation des monades en Haskell : `http://www.nomaware.com/monads/html/`

Monades et adjonction

Propriété. Etant donnée une adjonction :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, bend right, "F"'] & \mathbf{B} \arrow[l, bend right, "G"'] \end{tikzcd}$$

on lui associe une monade en posant :

$$M = G.F : \mathbf{A} \to \mathbf{A} \quad \text{et} \quad \eta : \mathrm{Id}_{\mathbf{A}} \Rightarrow M \quad \text{et} \quad \mu = G.\varepsilon.F : M^2 \Rightarrow M$$

En fait, toute monade peut être obtenue à partir d'une adjonction (de plusieurs façons).

Définition. La *catégorie de Kleisli* $\mathbf{Kl}(M)$ de la monade M sur $\mathbf{C}$ est définie par :

— les objets de $\mathbf{Kl}(M)$ sont les objets de $\mathbf{C}$,

— les flèches $X \to Y$ de $\mathbf{Kl}(M)$ sont les flèches $X \to M(Y)$ de $\mathbf{C}$,

— pour chaque objet X, la flèche identité $\mathrm{id}_X : X \to X$ de $\mathbf{Kl}(M)$ est la flèche $\eta_X : X \to M(X)$ de $\mathbf{C}$,

— pour chaque couple de flèches consécutives $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ de $\mathbf{Kl}(M)$, la flèche $g.f : X \to Z$ de $\mathbf{Kl}(M)$ est définie dans $\mathbf{C}$ de la manière suivante :

$$g.f = \mu_Z.M(g).f$$

$$\begin{tikzcd} & & M^2(Z) \arrow[d, "\mu_Z"] \\ & M(Y) \arrow[ur, "M(g)"] & M(Z) \\ X \arrow[ur, "f"] & Y \arrow[ur, "g"] & \end{tikzcd}$$

Théorème. Il y a une adjonction :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[r, bend right, "F"'] & \mathbf{Kl}(M) \arrow[l, bend right, "G"'] \end{tikzcd}$$

définie par :
$F(X) = X$ et, pour tout $f : X \to Y$ dans $\mathbf{C}$:

$$F(f) = \eta_Y.f : X \to Y \ \text{ dans } \ \mathbf{Kl}(M)$$

$G(X) = M(X)$ et, pour tout $f : X \to Y$ dans $\mathbf{Kl}(M)$:

$$G(f) = \mu_Y.M(f) : M(X) \to M(Y) \ \text{ dans } \ \mathbf{C}$$

et M est la monade associée à cette adjonction.

Exemple. La catégorie $\mathbf{K}(\mathbf{C})$ (vue précédemment) est la catégorie de Kleisli de la monade "$X + \mathbb{1}$".

Catégories cartésiennes closes

Définition. La catégorie $\mathbf{C}$ est *cartésienne close* si elle est cartésienne et si, pour tout objet Y, le foncteur F_Y "produit avec Y" (tel que $F_Y(X) = X \times Y$) a un adjoint à droite (noté $G_Y(Z) = Z^Y$), c'est-à-dire s'il y a une bijection naturelle en $X \in \mathbf{C}$ et $Z \in \mathbf{C}$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Z^Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X \times Y, Z)$$

Etant donné $f : X \times Y \to Z$, son image par cette bijection est la *currifiée* de f, notée :

$$\mathtt{curry}(f) = \lambda\, f : X \to Z^Y$$

L'*application* ou *évaluation* relative à Y et Z est ε_Z :

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Z^Y, Z^Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Z^Y \times Y, Z)$$

$$\mathrm{id}_{Z^Y} \leftrightarrow \varepsilon_Z = \mathtt{apply}_{Y,Z} = \mathtt{eval}_{Y,Z}$$

Exemple. La catégorie **Ens** est cartésienne close, Z^Y est l'ensemble des applications (fonctions partout définies) de Y vers Z, et $\mathtt{apply}(f, y) = f(y)$.

Exemple. La catégorie **Cat** est cartésienne close, $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$ est la catégorie des foncteurs de $\mathbf{C}$ vers $\mathbf{D}$, et $\mathtt{apply}(\Phi, Y) = \Phi(Y)$.

Exemple. Un autre exemple de monade : la monade "d'état".

La catégorie $\mathbf{C}$ est cartésienne close, avec un objet distingué S.

La monade "d'état" est définie par le foncteur $M(X) = (X \times S)^S$,
avec pour tout $f : X \to Y$:

$$M(f) = \lambda\,((f \times \mathrm{id}_S).\mathtt{eval}) : (X \times S)^S \to (Y \times S)^S$$

Unité : $\eta_X = \lambda\,\mathrm{id}_{X \times S} : X \to (X \times S)^S$

Multiplication : $\mu_X = \cdots : ((X \times S)^S \times S)^S \to (X \times S)^S$ (pas très facile)

La composition dans la catégorie de Kleisli est facile à définir directement :
à partir de $\varphi : X \to (Y \times S)^S$ et $\psi : Y \to (Z \times S)^S$
on forme $f = \mathtt{eval}(\varphi \times \mathrm{id}_S) : (X \times S) \to (Y \times S)$ et $g = \mathtt{eval}(\psi \times \mathrm{id}_S) : (Y \times S) \to (Z \times S)$
(tels que $\varphi = \lambda\, f$ et $\psi = \lambda\, g$),
puis $h = g.f : (X \times S) \to (Z \times S)$,
et enfin $\psi \circ \varphi = \lambda\, h : X \to (Z \times S)^S$.

Exponentielle

L'exponentielle Y^X peut être définie par une "propriété universelle", de façon similaire au produit $X \times Y$.

Pour *le produit* $X \times Y$:

$$\begin{tikzcd}
 & X \times Y \arrow[dl, dashed, "p"'] \arrow[dr, dashed, "q"] & \\
X & & Y \\
 & Z \arrow[ul, "g"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}
\quad \longmapsto \quad
\begin{tikzcd}
 & X \times Y \arrow[dl, dashed, "p"'] \arrow[dr, dashed, "q"] & \\
X \arrow[rr, phantom, "="] & & Y \\
 & Z \arrow[ul, "g"] \arrow[ur, "f"'] \arrow[uu, "(f,g)"] &
\end{tikzcd}$$

Etant donnés $f : Z \to X$ et $g : Z \to Y$,
il existe un unique $(f, g) : Z \to X \times Y$ tel que $p.(f, g) = f$ et $q.(f, g) = g$.

Pour *l'exponentielle* Y^X :

$$\begin{tikzcd}
 & Y^X \times X \arrow[dl, dashed] \arrow[dr, dashed] \arrow[rr, squiggly, "\texttt{eval}"] & & \\
Y^X & & X & & Y \\
Z & & & Z \times X \arrow[ul, dashed] \arrow[ll, dashed] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}
\quad \longmapsto \quad
\begin{tikzcd}
 & Y^X \times X \arrow[dl, dashed] \arrow[dr, dashed] \arrow[rr, squiggly, "\texttt{eval}"] \arrow[dd, "\lambda f \times \mathrm{id}_X"] & & \\
Y^X & & X \arrow[rr, phantom, "="] & & Y \\
Z \arrow[u, "\lambda f"] & & & Z \times X \arrow[ul, dashed] \arrow[ll, dashed] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Etant donné $f : Z \times X \to Y$,
il existe un unique $\lambda f : Z \to Y^X$ tel que $\texttt{eval}(\lambda f \times \mathrm{id}_X) = f$.

Topos

John Baez ("Topos Theory in a Nutshell") :

Around 1963, Lawvere decided to figure out new foundations for mathematics, based on category theory. His idea was to figure out what was so great about sets, strictly from the category-theoretic point of view. This is an interesting project, since category theory is all about objects and morphisms. For the category of sets, this means SETS and FUNCTIONS. Of course, the usual axioms for set theory are all about SETS and MEMBERSHIP. Thus analyzing set theory from the category-theoretic viewpoint forces a radical change of viewpoint, which downplays membership and emphasizes functions.

Even earlier, this same change of viewpoint was also becoming important in algebraic geometry, thanks to the work of Grothendieck on the Weil conjectures. So topos theory can be thought of as a merger of ideas from geometry and logic...

After a bunch of work, Lawvere and others invented the concept of a "topos", which is category with certain extra properties that make it a lot like the category of sets. There are lots of different topoi; you can do a lot of the same mathematics in all of them; but there are also lots of differences between them: for example, the axiom of choice need not hold in a topos, and the law of the excluded middle ("either P or $\mathrm{not}(P)$*") need not hold. Some but not all topoi contain a "natural numbers object", which plays the role of the natural numbers.*

It's good to prove theorems about topoi in general, so that you don't need to keep proving the same kind of theorem over and over again, once for each topos you encounter. This is especially true if you do a lot of heavy-duty mathematics as part of your daily work.

Définition. Un *topos (élémentaire)* est une catégorie à limites finies, cartésienne close, et avec un classifieur de sous-objets.

Remarque. Le pluriel de topos est *topoi* ou *topos*, ou *toposes* en anglais.

Propriété. Un topos est aussi (entre autres) une catégorie à colimites finies.

Définition. Un *objet des nombres naturels* ("NNO") dans un topos est un objet N avec deux flèches $z : \mathbb{1} \to N$ et $s : N \to N$ vérifiant la propriété suivante (initialité) :

pour tous X, $a : \mathbb{1} \to X$, $b : X \to X$,

il existe une unique $f : N \to X$ telle que $f.z = a$ et $f.s = b.f$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{1} \arrow[r, "z"] & N & N \arrow[l, "s"'] \\ \mathbb{1} \arrow[r, "a"'] & X & X \arrow[l, "b"] \end{tikzcd} \quad \longmapsto \quad \begin{tikzcd} \mathbb{1} \arrow[r, "z"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "="] & N \arrow[l, phantom, "="] \arrow[d, "f"] & N \arrow[l, "s"'] \arrow[d, "f"] \\ \mathbb{1} \arrow[r, "a"'] & X & X \arrow[l, "b"] \end{tikzcd}$$

Exemple. La catégorie **Ens** est un topos, avec un objet des nombres naturels !

Le topos des graphes

La catégorie des *préfaisceaux* ("presheaves") sur une catégorie $\mathbf{C}$ est la catégorie des foncteurs contravariants de $\mathbf{C}$ vers $\mathbf{Ens}$:

$$\mathbf{Pf}(\mathbf{C}) = (\mathbf{Fonct}(\mathbf{C}^{op}, \mathbf{Ens})$$

Théorème. La catégorie $\mathbf{Fonct}(\mathbf{C}^{op}, \mathbf{Ens})$ est un topos.

Exemple.

Soit $\mathbf{C}$: $\begin{tikzcd} \mathtt{Pt} \arrow[r, bend left, "\mathtt{sce}"] \arrow[r, bend right, "\mathtt{but}"'] & \mathtt{Fl} \end{tikzcd}$ et donc $\mathbf{C}^{op}$: $\begin{tikzcd} \mathtt{Pt} & \mathtt{Fl} \arrow[l, bend right, "\mathtt{sce}"'] \arrow[l, bend left, "\mathtt{but}"] \end{tikzcd}$

Alors les préfaisceaux sur $\mathbf{C}$ sont les graphes : $\mathbf{Pf}(\mathbf{C}) \cong \mathbf{Gr}$. Donc la catégorie des graphes est un topos. Et donc, en particulier, la catégorie des graphes a un classifieur de sous-objets.
Le graphe terminal est $\mathbb{1}$:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[loop above, "u"] \end{tikzcd}$$

Le classifieur de sous-objets est le graphe Ω :

$$\begin{tikzcd} \text{dedans} \arrow[loop above, "\text{tout}"] \arrow[loop below, "\text{extremites}"] \arrow[r, bend left, "\text{source}"] & \text{dehors} \arrow[loop below, "\text{rien}"] \arrow[l, bend left, "\text{but}"] \end{tikzcd}$$

avec la constante $t : \mathbb{1} \to \Omega$:

$$U \mapsto \text{dedans}\ , \quad u \mapsto \text{tout}$$

Alors dans $\mathbf{Gr}$, pour tout sous-graphe $\Theta \subseteq \Gamma$ il existe un unique produit fibré :

$$\begin{tikzcd} & \Theta \arrow[dl, dashed, "\subseteq"'] \arrow[dr, dashed, "()"] & \\ \Gamma \arrow[dr, "p"'] & & \mathbb{1} \arrow[dl, "t"] \\ & \Omega & \end{tikzcd}$$

le morphisme p est défini par :
$p(X) = \text{dedans}$ si X est un point de Θ, et sinon $p(X) = \text{dehors}$,
$p(f) = \text{tout}$ si f est une flèche de Θ, et sinon :
$p(f) = \text{extremites}$ si $f : X \to Y$ avec X et Y dans Θ,
$p(f) = \text{source}$ si $f : X \to Y$ avec X dans Θ mais pas Y,
$p(f) = \text{but}$ si $f : X \to Y$ avec Y dans Θ mais pas X,
$p(f) = \text{rien}$ si $f : X \to Y$ avec ni X ni Y dans Θ.