Chapitre 2 : Limites

Produits (finis)

Tout ce qui suit est relatif à une catégorie **C** fixée.

Définition. Un *cône* (ou *cône projectif*)
de *base* $Y_1, \ldots, Y_n$, de *sommet* X, de *projections* $f_1, \ldots, f_n$, est :

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[d, phantom, "\ldots"] \arrow[dr, "f_n"] & \\ Y_1 & \cdots & Y_n \end{tikzcd}$$

Définition. Un *produit (fini)* est un cône :

$$\begin{tikzcd} & \prod_i Y_i \arrow[dl, dashed, "p_1"'] \arrow[d, phantom, "\ldots"] \arrow[dr, dashed, "p_n"] & \\ Y_1 & \cdots & Y_n \end{tikzcd}$$

qui vérifie la propriété suivante. Pour tout cône de même base :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[drr, "f_n"] & & \prod_i Y_i \arrow[dll, dashed, "p_1"'] \arrow[dr, dashed, "p_n"] & \\ Y_1 & & \cdots & Y_n \end{tikzcd}$$

il existe un unique morphisme $(f_1, \ldots, f_n) : X \to \prod_i Y_i$
tel que $p_i.(f_1, \ldots, f_n) = f_i$ pour tout i :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "(f_1,\ldots,f_n)"] \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[drr, "f_n"] & \prod_i Y_i \arrow[dll, dashed, "p_1"'] \arrow[dr, dashed, "p_n"] & \\ Y_1 & \cdots & Y_n \end{tikzcd}$$

Exemple. Dans **Ens** : produit cartésien $Y_1 \times \cdots \times Y_n$.
Les projections ne sont pas toujours surjectives : voir $\emptyset \times X$ avec X non vide.

Exemple. Dans **Mon** : le produit de monoïdes est le produit cartésien
muni de la loi produit.

Exemple. Dans **Pfn** (ensembles et fonctions partielles) :
$Y_1 \times_{\mathbf{Pfn}} Y_2 = Y_1 \times_{\mathbf{Ens}} Y_2 \ + \ Y_1 \ + \ Y_2$ (où $+$ désigne l'union disjointe).

Propriété. Pour une base fixée, le produit, s'il existe, est unique à iso près.

Définition. Une *catégorie cartésienne*, ou *catégorie à produits finis*,
est une catégorie où chaque famille finie d'objets a un produit.

Objet terminal

Définition. Un *objet terminal* $\mathbb{1}$ (ou "Unit", ou "Void")
est le sommet d'un produit d'arité $n = 0$.

Propriété. Un objet terminal est un objet $\mathbb{1}$ qui vérifie la propriété suivante.
Pour tout objet :

$$X$$

il existe un unique morphisme :

$$X \xrightarrow{(\,)_X} \mathbb{1}$$

Exemple. Dans **Ens** : singleton $\{*\}$.
Donc les morphismes $\mathbb{1} \to X$ dans **Ens** correspondent bijectivement aux *éléments* de X.

Exemple. Dans **Mon** : monoïde singleton $\{e\}$.

Exemple. Dans **Pfn** (ensembles et fonctions partielles) : $\emptyset$.

Remarque. L'ensemble des *comportements* d'un dispositif ("boîte noire")
peut parfois être *observé* grâce à l'objet terminal d'une catégorie.

Exemple. Flots. Considérons un ensemble fixé E.

Un *flot sur* E est une suite infinie d'éléments de E ; l'ensemble de ces flots est noté E^ω.
L'ensemble E^ω est muni de deux fonctions :
$\texttt{tete} : E^\omega \to E \ : \ (a_1, a_2, \dots) \mapsto a_1$
$\texttt{queue} : E^\omega \to E^\omega \ : \ (a_1, a_2, \dots) \mapsto (a_2, a_3, \dots)$.

Soit $\mathbf{Flot}(E)$ la catégorie ayant
— pour objets les ensembles F munis de deux fonctions $t : F \to E$ et $q : F \to F$,
— pour morphismes $f : (F, t, q) \to (F', t', q')$ les fonctions $f : F \to F'$ telles que
$t'(f(x)) = t(x)$ et $q'(f(x)) = f(q(x))$ pour tout $x \in F$.

Alors $(E^\omega, \texttt{tete}, \texttt{queue})$ est un objet terminal de la catégorie $\mathbf{Flot}(E)$.
Etant donné un objet (F, t, q) de $\mathbf{Flot}(E)$,
l'unique morphisme $(\,) : (F, t, q) \to (E^\omega, \texttt{tete}, \texttt{queue})$ est :
$x \mapsto (t(x), t(q(x)), t(q(q(x))), \dots)$.

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "q"] \arrow[d, "(\,)"] & F \arrow[r, "t"] \arrow[d, "(\,)"] & E \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
E^\omega \arrow[r, "\texttt{queue}"] & E^\omega \arrow[r, "\texttt{tete}"] & E
\end{tikzcd}$$

Autrement dit, le morphisme $(\,)$ permet d'*observer* le *comportement* des éléments de F,
vu comme une *boîte noire*, via l'*observation* t, sous l'*action* de q.

L'état dans un langage impératif

Considérons un langage impératif très simple, sans typage ni pointeur.

Soit X l'ensemble des variables et V l'ensemble des valeurs (X et V sont connus).
Soit S l'ensemble des états de la machine (S est inconnu).

Soit x une variable, on peut *observer* la valeur de x, par "`x`".
Pour exprimer que cette valeur dépend de l'état courant, on considère une fonction :

$$\mathit{lookup} = l : S \times X \to V$$

telle que "`x`" retourne la valeur $l(s, x)$, où s est l'état courant.

On peut aussi *modifier* la valeur de x, par "`x:=v`".
Pour exprimer que cela modifie l'état courant, on considère une fonction :

$$\mathit{update} = u : S \times X \times V \to S$$

telle que "`x:=v`" modifie l'état courant s en l'état $u(s, x, v)$.
Alors les propriétés de l'affectation sont traduites par l'équation :

$$(*) \qquad l(u(s, x, v), x') = \text{ si } (x = x') \text{ alors } v \text{ sinon } l(s, x')$$

Exemple. "Typiquement", on peut prendre :

$$S = V^X = \text{ l'ensemble des fonctions de } X \text{ vers } V$$

$$l = l_T = \texttt{apply} : V^X \times X \to V \ : \ (\sigma, x) \mapsto \sigma(x)$$

$$u = u_T : V^X \times X \times V \to V^X \ : \ (\sigma, x, v) \mapsto \sigma' \text{ tel que}$$

$$\sigma'(x') = \text{ si } (x = x') \text{ alors } v \text{ sinon } \sigma(x')$$

Ce choix de S, l et u est, "d'un certain point de vue", optimal.

Précisément, soit $\mathbf{S}$ la catégorie "des ensembles d'états", ayant
— pour objets les ensembles S munis de deux fonctions
  $l : S \times X \to V$ et $u : S \times X \times V \to S$ vérifiant l'équation $(*)$,
— et pour morphismes $f : (S, l, u) \to (S', l', u')$ les fonctions $f : S \to S'$
  telles que $l'(f(s), x) = l(s, x)$ et $u'(f(s), x, v) = f(u(s, x, v))$ pour tous s, x, v.

Cela signifie que l'observation de s (par l) coïncide avec l'observation de $f(s)$ (par l'),
et que la modification de s (par u) correspond à la modification de $f(s)$ (par u').

Ces deux égalités peuvent s'exprimer par la commutativité des diagrammes :

$$\begin{tikzcd} S \times X \arrow[r, "l"] \arrow[d, "f \times \mathrm{id}_X"'] & V \arrow[d, "\mathrm{id}_V"] \\ S' \times X \arrow[r, "l'"] & V \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} S \times X \times V \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f \times \mathrm{id}_X \times \mathrm{id}_V"'] & S \arrow[d, "f"] \\ S' \times X \times V \arrow[r, "u'"] & S' \end{tikzcd}$$

Il est facile de vérifier que (V^X, l_T, u_T) est un objet terminal de la catégorie $\mathbf{S}$.

Logique équationnelle

Rappel.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{GrCat} \arrow[r, bend right, "F_2"'] & \mathbf{Cat} \arrow[l, bend right, "U_2"'] \end{tikzcd} \qquad \text{avec } F_2.U_2 \cong \mathrm{Id}$$

Par exemple la règle de composition :

$$\frac{f : X \to Y \quad g : Y \to Z}{g.f : X \to Z}$$

signifie que le morphisme de graphes à composition :

$$\mathcal{H} = \left(X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \right) \qquad \to \qquad \left(\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g.f"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd} \right) = \mathcal{B}$$

vérifie la propriété : toute occurrence de $\mathcal{H}$ dans un graphe à composition Σ
se prolonge en une occurrence de $\mathcal{B}$ dans la catégorie $F_2(\Sigma)$.

Cela permet de prendre en compte la composition des fonctions unaires.
La logique équationnelle ajoute des produits pour pouvoir utiliser des fonctions n-aires.

Définition. Une *théorie équationnelle* est une catégorie cartésienne.

Définition. Une *spécification équationnelle* est un graphe
avec de la composition et des produits *potentiels*.

Propriété.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Spec}_{\mathrm{eq}} \arrow[r, bend right, "F_{\mathrm{eq}}"'] & \mathbf{Theo}_{\mathrm{eq}} \arrow[l, bend right, "U_{\mathrm{eq}}"'] \end{tikzcd} \qquad \text{avec } F_{\mathrm{eq}}.U_{\mathrm{eq}} \cong \mathrm{Id}$$

Remarque. Le foncteur F_{eq} permet de construire la théorie équationnelle $F_{\mathrm{eq}}(\Sigma)$
engendrée par une spécification équationnelle Σ :
il fournit les *règles* de la logique équationnelle.

Par exemple la règle de formation de paire :

$$\frac{f_1 : X \to Y_1 \quad f_2 : X \to Y_2}{(f_1, f_2) : X \to Y_1 \times Y_2}$$

Cela signifie que le morphisme de spécifications équationnelles :

$$\mathcal{H} = \left(\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & Y_1 \times Y_2 \arrow[dl, dashed] \arrow[dr, dashed] & \\ Y_1 & & & Y_2 \end{tikzcd} \right) \to \left(\begin{tikzcd} & X \arrow[r, "(f_1,f_2)"] \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[drr, "f_2"] & Y_1 \times Y_2 \arrow[dl, dashed] \arrow[dr, dashed] & \\ Y_1 & & & Y_2 \end{tikzcd} \right) = \mathcal{B}$$

vérifie la propriété : toute occurrence de $\mathcal{H}$ dans une spécification Σ
se prolonge en une occurrence de $\mathcal{B}$ dans la théorie $F_{\mathrm{eq}}(\Sigma)$.

Une spécification équationnelle des naturels

Spécification équationnelle Σ_{nat} :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "z"] & N \arrow[loop above, "s"] & N^2 \arrow[l, bend right, "a"'] \arrow[l, dashed, shift right, "x"'] \arrow[l, dashed, shift left, "y"]
\end{tikzcd}$$

avec deux produits :

$$\begin{tikzcd}
& N^2 \arrow[dl, dashed, "x"'] \arrow[dr, dashed, "y"] & \\
N & & N
\end{tikzcd} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{1}$$

et deux équations :

$$a(x, s(y)) = s(a(x, y)) : N^2 \to N \ \text{ et } \ a(t, z) = t : N \to N \ \ (\text{où } t = \mathrm{id}_N)$$

dont on peut dessiner les deux membres :

$$\begin{tikzcd}
a(x,s(y)) \arrow[d, phantom, "="] & & & N & & \\
& N^2 \arrow[urr, "x"] \arrow[rrr, "(x,s(y))"] \arrow[dr, "y"'] \arrow[dd, equal] & & & N^2 \arrow[ul, dashed, "x"'] \arrow[r, "a"] \arrow[dl, dashed, "y"] & N \arrow[dd, equal] \\
& & N \arrow[r, "s"'] & N & & \\
s(a(x,y)) & N^2 \arrow[rr, "a"] & & N \arrow[rr, "s"] & & N
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
a(t,z) \arrow[d, phantom, "="] & & & N & & \\
& N \arrow[urr, "t"] \arrow[rrr, "(t,z(\,))"] \arrow[dr, "(\,)"'] \arrow[dd, equal] & & & N^2 \arrow[ul, dashed, "x"'] \arrow[r, "a"] \arrow[dl, dashed, "y"] & N \arrow[dd, equal] \\
& & \mathbb{1} \arrow[r, "z"'] & N & & \\
t & N \arrow[rrrr, "t"] & & & & N
\end{tikzcd}$$

Remarque. Alors $a(s(0), s(0)) = s(s(0))$, i.e., "$1 + 1 = 2$"... Oui, mais "*où*" ?
— Dans Σ_{nat} : impossible, Σ_{nat} est *trop petit*.
— Dans $F_{\text{eq}}(\Sigma_{\text{nat}})$: possible, mais $F_{\text{eq}}(\Sigma_{\text{nat}})$ est "*trop grand*".

Construire une spécification équationnelle $\Sigma_{\text{nat},1}$ à partir de Σ_{nat},
en utilisant les règles de la logique équationnelle, de façon que dans $\Sigma_{\text{nat},1}$:
$a(s(0), s(0)) = s(s(0))$.

Notation. (*ce n'est pas une notation standard ; analogie avec* $\vdash$ *en logique*)

$$\Sigma_{\text{nat}} \mathrel{-\!\!\!+\!\!\!\rightarrow} \Sigma_{\text{nat},1}$$

Modèles (ensemblistes) en logique équationnelle

Remarque. La catégorie **Ens** est une théorie équationnelle,
et $U_{\mathrm{eq}}(\mathbf{Ens})$ est "la théorie **Ens** vue comme une spécification".

Définition. Un *modèle* M d'une spécification équationnelle Σ est un morphisme :

$$M : \Sigma \to U_{\mathrm{eq}}(\mathbf{Ens})$$

Un *morphisme de modèles* de Σ est une transformation naturelle :

$$m : M_1 \Rightarrow M_2 : \Sigma \to U_{\mathrm{eq}}(\mathbf{Ens})$$

D'où la catégorie $\mathbf{Mod}(\Sigma) = \mathbf{Mod}(\Sigma, \mathbf{Ens})$ des modèles (ensemblistes) de Σ.
Donc une spécification définit *simultanément* des modèles et des morphismes entre eux.

Exemple. Spécification équationnelle des graphes Σ_{gr} :

$$\begin{tikzcd} \mathtt{Pt} & \mathtt{Fl} \arrow[l, bend right, "\mathtt{sce}"'] \arrow[l, bend left, "\mathtt{but}"] \end{tikzcd}$$

Un modèle M de Σ_{gr} est formé d'ensembles $M(\mathtt{Pt})$, $M(\mathtt{Fl})$ et de fonctions $M(\mathtt{sce})$, $M(\mathtt{but})$:

$$\begin{tikzcd} M(\mathtt{Pt}) & M(\mathtt{Fl}) \arrow[l, bend right, "M(\mathtt{sce})"'] \arrow[l, bend left, "M(\mathtt{but})"] \end{tikzcd}$$

Autrement dit, c'est un graphe (voir le ch. 1). Par exemple :

$$M_1 : \quad \begin{tikzcd} \{X, Y\} & \{a\} \arrow[l, bend right, "a \mapsto X"'] \arrow[l, bend left, "a \mapsto Y"] \end{tikzcd} \quad \text{ou} \quad X \xrightarrow{a} Y$$

$$M_2 : \quad \begin{tikzcd} \{Z, T\} & \{b\} \arrow[l, bend right, "b \mapsto Z"'] \arrow[l, bend left, "b \mapsto Z"] \end{tikzcd} \quad \text{ou} \quad \begin{tikzcd} Z \arrow[loop above, "b"] \end{tikzcd} \qquad T$$

Un morphisme de modèles $m : M_1 \to M_2$ de Σ_{gr} est formé de 2 applications $m_{\mathtt{Pt}}$, $m_{\mathtt{Fl}}$ telles que $m_{\mathtt{Pt}}.M_1(\mathtt{sce}) = M_2(\mathtt{sce}).m_{\mathtt{Fl}}$ et $m_{\mathtt{Pt}}.M_1(\mathtt{but}) = M_2(\mathtt{but}).m_{\mathtt{Fl}}$:

$$\begin{tikzcd} M_1(\mathtt{Pt}) \arrow[d, "m_{\mathtt{Pt}}"] & M_1(\mathtt{Fl}) \arrow[l, bend right, "M_1(\mathtt{sce})"'] \arrow[l, bend left, "M_1(\mathtt{but})"] \arrow[d, "m_{\mathtt{Fl}}"] \\ M_2(\mathtt{Pt}) & M_2(\mathtt{Fl}) \arrow[l, bend right, "M_2(\mathtt{sce})"'] \arrow[l, bend left, "M_2(\mathtt{but})"] \end{tikzcd}$$

Autrement dit, c'est un morphisme de graphes.
Dans l'exemple, le seul morphisme $m : M_1 \to M_2$ est $X, Y \mapsto Z$, $a \mapsto b$.

Pour résumer, il y a un isomorphisme de catégories : $\mathbf{Gr} \cong \mathbf{Mod}(\Sigma_{\mathrm{gr}})$.

Une spécification équationnelle des monoïdes

Σ_{mon} :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{1} \arrow[r, "e"] & M \arrow[r, shift left, dashed, "x"] \arrow[r, shift right, dashed, "y"'] & M^2 \arrow[l, bend right, "k"'] \end{tikzcd} \qquad \text{avec} \qquad \begin{tikzcd} & M^2 \arrow[dl, dashed] \arrow[dr, dashed] & \\ M & & M \end{tikzcd} \qquad \text{et } \mathbb{1} \text{ terminal}$$

et les équations : $k(t,e) = t$, $k(e,t) = t$, $k(x', k(y', z')) = k(k(x', y'), z')$
où $t = \mathrm{id}_M$ et x', y', z' sont les projections de M^3 vers M (non dessiné).

Les modèles de Σ_{mon} sont les monoïdes. Précisément : $\mathbf{Mon} \simeq \mathbf{Mod}(\Sigma_{\text{mon}})$.

Modèle M_{R+} :

$$\begin{tikzcd} \{*\} \arrow[r, "0"] & \mathbb{R} \arrow[r, shift left, dashed] \arrow[r, shift right, dashed] & \mathbb{R}^2 \arrow[l, bend right, "+"'] \end{tikzcd}$$

Modèle $M_{R\times}$:

$$\begin{tikzcd} \{*\} \arrow[r, "1"] & \mathbb{R} \arrow[r, shift left, dashed] \arrow[r, shift right, dashed] & \mathbb{R}^2 \arrow[l, bend right, "\times"'] \end{tikzcd}$$

Morphisme $m : M_{R+} \to M_{R\times}$:

$$\begin{tikzcd} \{*\} \arrow[r, "0"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & \mathbb{R} \arrow[r, shift left, dashed] \arrow[r, shift right, dashed] \arrow[d, "m"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[l, bend right, "+"'] \arrow[d, "m^2"] \\ \{*\} \arrow[r, "1"] & \mathbb{R} \arrow[r, shift left, dashed] \arrow[r, shift right, dashed] & \mathbb{R}^2 \arrow[l, bend right, "\times"'] \end{tikzcd}$$

autrement dit : $m(0) = 1$ et $m(x+y) = m(x) \times m(y)$

(m est une exponentielle)

Propriété. Toute spécification équationnelle Σ a un *modèle terminal* T,
c'est-à-dire un objet terminal de la catégorie $\mathbf{Mod}(\Sigma)$:

$T(S) = \{*\}$ pour tout objet S, et $T(s) = \mathrm{id}_{\{*\}}$ pour tout morphisme s.

Produits fibrés (*ou "pullbacks"*)

Définition. Un *cône* (ou *cône projectif*)
de *base* $Y_1 \xrightarrow[g_1]{} Y_0 \xleftarrow[g_2]{} Y_2$, de *sommet* X, de *projections* f_1, f_2, est :

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\ Y_1 \arrow[dr, "g_1"'] & & Y_2 \arrow[dl, "g_2"] \\ & Y_0 & \end{tikzcd} \qquad \text{avec} \qquad g_1.f_1 = g_2.f_2$$

Définition. Un *produit fibré* ("*pullback*") est un cône :

$$\begin{tikzcd} & Y_1 \times_{Y_0} Y_2 \arrow[dl, dashed, "p_1"'] \arrow[dr, dashed, "p_2"] & \\ Y_1 \arrow[dr, "g_1"'] & & Y_2 \arrow[dl, "g_2"] \\ & Y_0 & \end{tikzcd}$$

qui vérifie la propriété suivante. Pour tout cône de même base :

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[drr] & & Y_1 \times_{Y_0} Y_2 \arrow[dll, dashed, "p_1"'] \arrow[dr, dashed, "p_2"] & \\ Y_1 \arrow[dr, "g_1"'] & & & & Y_2 \arrow[dll, "g_2"] \\ & Y_0 & & & \end{tikzcd}$$

il existe un unique morphisme $(f_1, f_2) : X \to Y_1 \times_{Y_0} Y_2$
tel que $p_i.(f_1, f_2) = f_i$ pour $i = 1, 2$:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[r, "(f_1,f_2)"] \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[drr] & Y_1 \times_{Y_0} Y_2 \arrow[dll, dashed, "p_1"'] \arrow[dr, dashed, "p_2"] & & \\ Y_1 \arrow[dr, "g_1"'] & & & & Y_2 \arrow[dll, "g_2"] \\ & Y_0 & & & \end{tikzcd}$$

Exemple. Dans **Ens** : $Y_1 \times_{Y_0} Y_2 = \{(y_1, y_2) \mid g_1(y_1) = g_2(y_2)\}$. Donc $Y_1 \times_{Y_0} Y_2 \subseteq Y_1 \times Y_2$.

Exemple. En algèbre relationnelle.
On distingue deux représentations différentes, isomorphes, du produit fibré dans **Ens**.
Soient $Y_1 \subseteq A \times B$ et $Y_2 \subseteq B \times C$, alors le *theta-produit* est :

$$Y_1 \bowtie_{B=B} Y_2 = \{(a, b, b, c) \mid (a, b) \in Y_1 \text{ et } (b, c) \in Y_2\} \subseteq A \times B \times B \times C$$

et le *produit naturel* est :

$$Y_1 \star Y_2 = \{(a, b, c) \mid (a, b) \in Y_1 \text{ et } (b, c) \in Y_2\} \subseteq A \times B \times C$$

Monomorphismes

Définition. Un *mono(morphisme)* est un morphisme $f : X \to Y$ tel que pour tous $a, b : W \to X$:

$$\text{si} \quad f.a = f.b \quad \text{alors} \quad a = b$$

On note alors :

$$X \overset{f}{\rightarrowtail} Y$$

Exemple. Dans **Ens**, les monomorphismes sont les *injections*.

Exemple. Dans toute catégorie, tout morphisme $\mathbb{1} \to X$, où $\mathbb{1}$ est un objet terminal, est un monomorphisme :

$$\mathbb{1} \rightarrowtail X$$

Propriété. Un morphisme $f : X \to Y$ est un monomorphisme si et seulement si on a un produit fibré :

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, dashed, "\mathrm{id}"'] \arrow[dr, dashed, "\mathrm{id}"] & \\
X \arrow[dr, "f"'] & & X \arrow[dl, "f"] \\
 & Y &
\end{tikzcd}$$

Propriété. Dans un produit fibré, si g_2 est un mono, alors p_1 est un mono :

$$\begin{tikzcd}
 & Y_1 \times_{Y_0} Y_2 \arrow[dl, dashed, "p_1"'] \arrow[dr, dashed, "p_2"] & \\
Y_1 \arrow[dr, "g_1"'] & & Y_2 \arrow[dl, "g_2"] \\
 & Y_0 &
\end{tikzcd}$$

Corollaire. Dans un produit fibré de la forme suivante, m est un mono :

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, dashed, "m"'] \arrow[dr, dashed, "()"] & \\
Y \arrow[dr] & & \mathbb{1} \arrow[dl] \\
 & Z &
\end{tikzcd}$$

Exemple. Soient `Terme` l'ensemble des termes et `Type` l'ensemble des types pour un langage typé, et soit `t` un type. Alors dans le produit fibré :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathtt{Terme_t} \arrow[dl, dashed, "m"'] \arrow[dr, dashed, "()"] & \\
\mathtt{Terme} \arrow[dr, ":"'] & & \mathbb{1} \arrow[dl, "\mathtt{t}"] \\
 & \mathtt{Type} &
\end{tikzcd}$$

le sommet $\mathtt{Terme_t}$ est l'ensemble des termes de type `t`.

Classifieur de sous-objets

Exemple. Dans **Ens**, avec X fixé et $\mathbb{B} = \{\texttt{true}, \texttt{false}\}$.
A tout sous-ensemble $W \subseteq X$ est associé la *fonction caractéristique* $p_W : W \to \mathbb{B}$:

$$p_W(x) = \texttt{true} \iff x \in W$$

Alors on a un produit fibré :

$$\begin{tikzcd}
 & W \arrow[dl, dashed, "\subseteq"'] \arrow[dr, dashed, "()"] & \\
X \arrow[dr, "p_W"'] & & \{*\} \arrow[dl, "\texttt{true}"] \\
 & \mathbb{B} &
\end{tikzcd}$$

Réciproquement, pour tout produit fibré :

$$\begin{tikzcd}
 & W \arrow[dl, dashed, "m"'] \arrow[dr, dashed, "()"] & \\
X \arrow[dr, "p"'] & & \{*\} \arrow[dl, "\texttt{true}"] \\
 & \mathbb{B} &
\end{tikzcd}$$

m est un mono (cf. corollaire) donc $W \cong m(W) \subseteq X$ et $p = p_{m(W)}$.

Définition. Soit $\mathbb{1}$ un objet terminal. Un *classifieur de sous-objets* est un morphisme :

$$t : \mathbb{1} \to \Omega$$

(donc, un mono) tel que pour tout mono $m : W \rightarrowtail X$ il existe un unique produit fibré :

$$\begin{tikzcd}
 & W \arrow[dl, dashed, "m"'] \arrow[dr, dashed, "()"] & \\
X \arrow[dr, "p"'] & & \mathbb{1} \arrow[dl, "t"] \\
 & \Omega &
\end{tikzcd}$$

Le classifieur de sous-objets, s'il existe, est unique à iso près.
Exemple. Dans **Ens**, l'ensemble $\mathbb{B}$ avec $\texttt{true} : \{*\} \to \mathbb{B}$ est le classifieur de sous-objets.

Définition. Un *sous-objet* de X est une classe d'isomorphisme de monos $m : W \rightarrowtail X$.
Exemple. Dans **Ens**, chaque sous-objet Y de X contient un et un seul sous-ensemble de X : c'est l'image commune à toutes les injections qui forment la classe Y.

Egaliseurs

Définition. Un *cône* (ou *cône projectif*)
de *base* $Y_1 \underset{g'}{\overset{g}{\rightrightarrows}} Y_2$, de *sommet* X, de *projections* f_1, f_2, est :

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\
Y_1 \arrow[rr, bend left, "g"] \arrow[rr, bend right, "g'"'] & & Y_2
\end{tikzcd}$$

avec $g.f_1 = g'.f_1 = f_2$ (donc f_2 peut être omis).

Définition. Un *égaliseur* est un cône :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Eg}(g, g') \arrow[dl, dashed, "p"'] & \\
Y_1 \arrow[rr, bend left, "g"] \arrow[rr, bend right, "g'"'] & & Y_2
\end{tikzcd}$$

qui vérifie la propriété suivante. Pour tout cône de même base :

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "f"'] & \mathrm{Eg}(g, g') \arrow[dl, dashed, "p"'] & \\
Y_1 \arrow[rrr, bend left, "g"] \arrow[rrr, bend right, "g'"'] & & & Y_2
\end{tikzcd}$$

il existe un unique morphisme $h : X \to \mathrm{Eg}(g, g')$ tel que $p.h = f$:

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[r, "h"] \arrow[dl, "f"'] & \mathrm{Eg}(g, g') \arrow[dl, dashed, "p"'] & \\
Y_1 \arrow[rrr, bend left, "g"] \arrow[rrr, bend right, "g'"'] & & & Y_2
\end{tikzcd}$$

Exemple. Dans **Ens** : $\mathrm{Eg}(g, g') = \{x \in Y_1 \mid g(x) = g'(x)\}$.

Par exemple, étant donné un graphe Γ, l'égaliseur de $\Gamma(\texttt{Fl}) \underset{\Gamma(\texttt{but})}{\overset{\Gamma(\texttt{sce})}{\rightrightarrows}} \Gamma(\texttt{Pt})$
est l'ensemble des boucles du graphe.

Propriété. Pour tout égaliseur, la projection $p : \mathrm{Eg}(g, g') \to Y_1$ est un mono.

Limites (*ou* limites projectives)

Définition. Soient Γ un graphe. Un *diagramme de forme* Γ *dans* $\mathbf{C}$ est un morphisme de graphes $D : \Gamma \to U(\mathbf{C})$.

Définition. Un *cône* (ou *cône projectif*) de *base* $D : \Gamma \to \mathbf{C}$, de *sommet* X, de *projections* f_I (pour I objet de Γ), est :

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f_I"'] \arrow[dr, "f_J"] \arrow[d, phantom, "\cdots"] & \\ D(I) & \cdots & D(J) \end{tikzcd}$$

tel que $D(i) \circ f_I = f_J$, pour tout morphisme $i : I \to J$ de Γ :

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f_I"'] \arrow[dr, "f_J"] \arrow[d, phantom, "="] & \\ D(I) \arrow[rr, "D(i)"'] & & D(J) \end{tikzcd}$$

Définition. Une *limite de base* D est un cône de base D :

$$\begin{tikzcd} & \lim_I D(I) \arrow[dl, dashed, "p_I"'] \arrow[dr, dashed, "p_J"] \arrow[d, phantom, "\cdots"] & \\ D(I) & \cdots & D(J) \end{tikzcd}$$

qui vérifie la propriété suivante. Pour tout cône de même base :

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f_I"'] \arrow[drr, "f_J"] & & \lim_I D(I) \arrow[dll, dashed, "p_I"'] \arrow[dr, dashed, "p_J"] & \\ D(I) & & \cdots & & D(J) \end{tikzcd}$$

il existe un unique morphisme $(f_I)_I : X \to \lim_I D(I)$ tel que $p_I.((f_I)_I) = f_I$ pour tout I :

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[r, "(f_I)_I"] \arrow[dl, "f_I"'] \arrow[drr, "f_J"] & \lim_I D(I) \arrow[dll, dashed, "p_I"'] \arrow[dr, dashed, "p_J"] & \\ D(I) & & \cdots & & D(J) \end{tikzcd}$$

Exemple. Les produits, produits fibrés, égaliseurs, sont des limites.

Propriété. Pour une base fixée, la limite, si elle existe, est unique à iso près.

Définition. Une catégorie est *complète* si tout diagramme a une limite.

Exemple. La catégorie **Ens** est complète.

Théorème. Une catégorie avec tous les produits et égaliseurs est complète.

Logique “à limites”

Définition. Une *théorie à limites* est une catégorie complète.

Définition. Une *spécification à limites*, ou *esquisse projective*, est un graphe avec de la composition et des limites *potentielles*.

Propriété.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Spec}_{\mathrm{lim}} \arrow[r, bend right, "F_{\mathrm{lim}}"'] & \mathbf{Theo}_{\mathrm{lim}} \arrow[l, bend right, "U_{\mathrm{lim}}"'] \end{tikzcd} \qquad \text{avec } F_{\mathrm{lim}}.U_{\mathrm{lim}} \cong \mathrm{Id}$$

Remarque. Le foncteur F_{lim} fournit les *règles* de la logique à limites.

Exemple. Spécification à limites (esquisse projective) des catégories :

Σ_{cat} :

$$\begin{tikzcd} \mathtt{Pt} \arrow[r, bend right, "\mathtt{but}"'] \arrow[rr, bend right=60, "\mathtt{selid}"'] & \mathtt{Fl} \arrow[l, bend right, "\mathtt{sce}"'] & \mathtt{Cons} \arrow[l, bend right, "\mathtt{2nd}"'] \arrow[ll, bend right=60, "\mathtt{comp}"'] \arrow[l, bend left, "\mathtt{1er}"] \end{tikzcd}$$

avec

$$\begin{tikzcd} & \mathtt{Cons} \arrow[dl, dashed, "\mathtt{1er}"'] \arrow[dr, dashed, "\mathtt{2nd}"] & \\ \mathtt{Fl} \arrow[dr, "\mathtt{but}"'] & & \mathtt{Fl} \arrow[dl, "\mathtt{sce}"] \\ & \mathtt{Pt} & \end{tikzcd}$$

(donc $\mathtt{but.1er} = \mathtt{sce.2nd}$), avec quatre équations :

$$\mathtt{sce.comp} = \mathtt{sce.1er}\ ,\ \mathtt{but.comp} = \mathtt{but.2nd}\ ,\ \mathtt{sce.selid} = \mathrm{id}_{\mathtt{Pt}}\ ,\ \mathtt{but.selid} = \mathrm{id}_{\mathtt{Pt}}$$

et complété de façon à tenir compte des axiomes d’associativité et d’élément neutre.

Les modèles de Σ_{cat} sont les catégories. Plus précisément : $\mathbf{Cat} \simeq \mathbf{Mod}(\Sigma_{\mathrm{cat}})$.

Remarque. La logique “à limites” a un pouvoir expressif strictement supérieur aux *théories de Horn universelles*.
Par exemple, la catégorie **Cat** est la catégorie de modèles d’une esquisse projective (voir ci-dessus), mais ce n’est pas la catégorie de modèles d’une théorie de Horn universelle.