Chapitre 1 : Graphes et catégories

Graphes

Définition. Un *graphe* (pour *multi-graphe orienté*) Γ est formé :
— d'un ensemble de *points* $\Gamma(\mathtt{Pt}) = \{X, Y, \dots\}$
— d'un ensemble de *flèches* $\Gamma(\mathtt{Fl}) = \{f, g, \dots\}$
— d'une fonction *source* $\Gamma(\mathtt{sce}) : \Gamma(\mathtt{Fl}) \to \Gamma(\mathtt{Pt})$
— d'une fonction *but* $\Gamma(\mathtt{but}) : \Gamma(\mathtt{Fl}) \to \Gamma(\mathtt{Pt})$.
(on utilise "fonction" au sens de "fonction totale", ou "application", entre deux ensembles).
Si f a pour source X et pour but Y, on note $f : X \to Y$ ou $X \xrightarrow{f} Y$.

Exemple. Graphe "des naturels" Γ_{nat} :

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "z"] & N \arrow[loop right, "s"] \end{tikzcd}$$

Exemple. Graphe "des graphes" Γ_{gr} :

$$\begin{tikzcd} \mathtt{Pt} & \mathtt{Fl} \arrow[l, bend right, "\mathtt{sce}"'] \arrow[l, bend left, "\mathtt{but}"] \end{tikzcd}$$

Exemple. Graphe "des ensembles" **Ens** (attention aux questions de *taille* !) :
les points sont les ensembles, les flèches sont les fonctions.

Définition. Un *morphisme de graphes* $\gamma : \Gamma \to \Gamma'$ est formé :
— d'une fonction $\gamma_{\mathtt{Pt}}$ ou $\gamma : \Gamma(\mathtt{Pt}) \to \Gamma'(\mathtt{Pt})$
— et d'une fonction $\gamma_{\mathtt{Fl}}$ ou $\gamma : \Gamma(\mathtt{Fl}) \to \Gamma'(\mathtt{Fl})$
— qui préservent source et but : si $f : X \to Y$ alors $\gamma(f) : \gamma(X) \to \gamma(Y)$.

Autrement dit, les carrés suivants sont commutatifs :

$$\begin{tikzcd} \Gamma(\mathtt{Pt}) \arrow[d, "\gamma_{\mathtt{Pt}}"'] & \Gamma(\mathtt{Fl}) \arrow[l, "\Gamma(\mathtt{sce})"'] \arrow[d, "\gamma_{\mathtt{Fl}}"] \\ \Gamma'(\mathtt{Pt}) & \Gamma'(\mathtt{Fl}) \arrow[l, "\Gamma'(\mathtt{sce})"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Gamma(\mathtt{Pt}) \arrow[d, "\gamma_{\mathtt{Pt}}"'] & \Gamma(\mathtt{Fl}) \arrow[l, "\Gamma(\mathtt{but})"'] \arrow[d, "\gamma_{\mathtt{Fl}}"] \\ \Gamma'(\mathtt{Pt}) & \Gamma'(\mathtt{Fl}) \arrow[l, "\Gamma'(\mathtt{but})"'] \end{tikzcd}$$

Exemple. Le graphe "des naturels" vu comme *réalisation ensembliste* du graphe "des graphes", c'est-à-dire comme morphisme de graphes $\Gamma_{\text{nat}} : \Gamma_{\text{gr}} \to \mathbf{Ens}$:

$$\begin{tikzcd} \{U, N\} & \{z, s\} \arrow[l, bend right, "z \mapsto U, s \mapsto N"'] \arrow[l, bend left, "z \mapsto N, s \mapsto N"] \end{tikzcd}$$

Remarque. De même, tout graphe Γ peut être vu comme une réalisation ensembliste du graphe "des graphes", c'est-à-dire comme $\Gamma : \Gamma_{\text{gr}} \to \mathbf{Ens}$.
Et réciproquement.

Catégories

Définition. Une *catégorie* est un graphe $\mathbf{C}$ muni :
— d'une fonction *sélection des identités* $\mathbf{C}(\texttt{selid}) : \mathbf{C}(\texttt{Pt}) \to \mathbf{C}(\texttt{Fl})$
(notation : $\mathbf{C}(\texttt{selid})(X) = \mathrm{id}_X$)
— d'une fonction *composition* $\mathbf{C}(\texttt{comp}) : \mathbf{C}(\texttt{Cons}) \to \mathbf{C}(\texttt{Fl})$
(notation : $\mathbf{C}(\texttt{comp})(f, g) = g \circ f = g.f = gf = g(f)$)
où $\mathbf{C}(\texttt{Cons})$ est l'ensemble des couples de flèches consécutives $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ de $\mathbf{C}$
— vérifiant les axiomes suivants :
* *associativité* : si $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} T$ alors $h.(g.f) = (h.g).f$
* *élément neutre* : si $X \xrightarrow{f} Y$ alors $f.\mathrm{id}_X = f$ et $\mathrm{id}_Y.f = f$.

Remarque. Une catégorie avec un seul point est un *monoïde*.

Remarque. Un peu de terminologie (non exhaustive !) :

ici ("dessin")	point	flèche	source	but
graphes	sommet	arc	origine	extrémité
catégories	objet	morphisme	domaine	codomaine

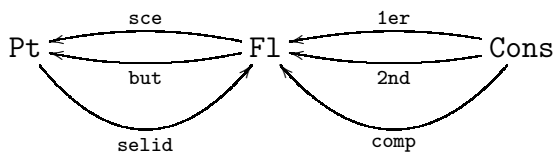
Exemple. Catégorie des ensembles **Ens**.

Exemple. Catégorie des monoïdes **Mon**.

Exemple. Catégorie des ensembles avec fonctions partielles **Pfn**.

Exemple. Catégorie des graphes **Gr**.

Remarque. Graphe "des catégories" Γ_{cat} :



Toute catégorie $\mathbf{C}$ peut être vu comme une réalisation ensembliste de Γ_{cat},
c'est-à-dire comme $\mathbf{C} : \Gamma_{\mathrm{cat}} \to \mathbf{Ens}$.
Mais la réciproque est *fausse*.

Définition. Dans une catégorie $\mathbf{C}$, un *iso(morphisme)* est une flèche inversible :

$$X \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} Y \qquad \text{avec } f^{-1}.f = \mathrm{id}_X \text{ et } f.f^{-1} = \mathrm{id}_Y$$

Exemple. Dans la catégorie des ensembles, les isos sont les *bijections*.

Foncteurs

Définition. Un *foncteur* (ou *morphisme de catégories*) $\gamma : \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$
est un morphisme de graphes qui préserve identité et composition :
— $\gamma(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\gamma(X)}$ pour tout point X de $\mathbf{C}$,
— et $\gamma(g.f) = \gamma(g).\gamma(f)$ pour tout couple de flèches consécutives $. \xrightarrow{f} . \xrightarrow{g} .$ de $\mathbf{C}$.

Exemple. "inclusion" $I : \mathbf{Ens} \to \mathbf{Pfn}$.

Exemple. oubli $U : \mathbf{Mon} \to \mathbf{Ens}$, générateur $F : \mathbf{Ens} \to \mathbf{Mon}$.

Définition. La *catégorie des catégories* **Cat** a
pour points les catégories et pour flèches les foncteurs.

Exemple. oubli $U : \mathbf{Cat} \to \mathbf{Gr}$, générateur $F : \mathbf{Gr} \to \mathbf{Cat}$.

Notation. Pour X et Y donnés, l'ensemble des flèches $f : X \to Y$ de $\mathbf{C}$ est noté :

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) = \mathrm{Hom}(X, Y) = \mathbf{C}(X, Y) \ .$$

Définition. Le *foncteur hom (covariant)* $\mathrm{Hom}(X, -) : \mathbf{C} \to \mathbf{Ens}$ est :
— $\mathrm{Hom}(X, -)(Y) = \mathrm{Hom}(X, Y)$,
— $\mathrm{Hom}(X, -)(g) = \mathrm{Hom}(X, g) : \mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(X, Y') \ : \ h \mapsto g.h$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[dr, dotted, "g.h"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Y' \end{tikzcd}$$

Définition. La catégorie *opposée* $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ de $\mathbf{C}$ a les mêmes points que $\mathbf{C}$
et une fléche $f : Y \to X$ pour toute flèche $f : X \to Y$ de $\mathbf{C}$.

Définition. Un *foncteur contravariant* $\gamma : \mathbf{C} \multimap \mathbf{C}'$ *(pas de notation standard)*
est un foncteur $\gamma : \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{C}'$, ou bien $\gamma : \mathbf{C} \to \mathbf{C}'^{\mathrm{op}}$.

Définition. Le *foncteur hom contravariant* $\mathrm{Hom}(-, Y) : \mathbf{C} \multimap \mathbf{Ens}$ est :
— $\mathrm{Hom}(-, Y)(X) = \mathrm{Hom}(X, Y)$,
— $\mathrm{Hom}(-, Y)(f) = \mathrm{Hom}(f, Y) : \mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(X', Y) \ : \ h \mapsto h.f$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] & Y \\ X' \arrow[u, "f"] \arrow[ur, dotted, "h.f"'] & \end{tikzcd}$$

Catégories engendrées

Foncteur oubli U : $U(\mathbf{C})$ est *le graphe sous-jacent à* la catégorie $\mathbf{C}$.
Foncteur générateur F : $F(\Gamma)$ est *la catégorie engendrée par* le graphe Γ.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Gr} \arrow[r, bend right, "F"'] & \mathbf{Cat} \arrow[l, bend right, "U"'] \end{tikzcd}$$

Remarque. Les foncteurs U et F *ne sont pas* inverses l'un de l'autre.

Exemple. Graphe "des naturels" Γ_{nat} : $\begin{tikzcd} U \arrow[r, "z"] & N \arrow[loop right, "s"] \end{tikzcd}$

Un modèle ensembliste M_{nat} de Γ_{nat} : $\begin{tikzcd} \{*\} \arrow[r, "0"] & \mathbb{N} \arrow[loop right, "\text{succ}"] \end{tikzcd}$

La catégorie $F(\Gamma_{\text{nat}})$ engendrée par Γ_{nat} :

$$\begin{tikzcd} U \arrow[loop above, "\text{id}_U"] \arrow[r, "z"] \arrow[rr, bend right, "s.z"'] & N \arrow[loop above, "\text{id}_N"] \arrow[loop right, "s"] \arrow[loop below, "\dots s^2"] \\ & \vdots \end{tikzcd}$$

Un modèle ensembliste M_{nat} de $F(\Gamma_{\text{nat}})$:

$$\begin{tikzcd} \{*\} \arrow[loop above, "\text{id}"] \arrow[r, "0"] \arrow[rr, bend right, "1"'] & \mathbb{N} \arrow[loop above, "\text{id}"] \arrow[loop right, "\text{succ}"] \arrow[loop below, "\dots \text{succ}^2"] \\ & \vdots \end{tikzcd}$$

Remarque. $1 = \text{succ}(0) \in \mathbb{N}$ est formalisé par $s.z : U \to N$. Oui, mais "*où*" ?
— Dans Γ_{nat} : impossible, Γ_{nat} est *trop petit*.
— Dans $F(\Gamma_{\text{nat}})$: possible, mais $F(\Gamma_{\text{nat}})$ est "*trop grand*" (il formalise tous les $k \in \mathbb{N}$).

Définition. Un *graphe avec de la composition* est un graphe Γ muni :
— d'une fonction partielle *sélection des identités*
— et d'une fonction partielle *composition*.
Un *morphisme de graphes avec de la composition* est un morphisme de graphes qui préserve identités et composition.

La catégorie **GrCat** des graphes avec de la composition est "entre" **Gr** et **Cat** :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Gr} \arrow[r, bend right, "F_1"'] & \mathbf{GrCat} \arrow[l, bend right, "U_1"'] \arrow[r, bend right, "F_2"'] & \mathbf{Cat} \arrow[l, bend right, "U_2"'] \end{tikzcd} \quad \text{avec } U_1(F_1(\Gamma)) \cong \Gamma \text{ et } F_2(U_2(\mathbf{C})) \cong \mathbf{C}$$

Exemple. Graphe avec de la composition $\Gamma_{\text{nat},1}$: $\begin{tikzcd} U \arrow[r, "z"] \arrow[rr, bend right, "s.z"'] & N \arrow[loop right, "s"] \end{tikzcd}$

Un modèle ensembliste M_{nat} de $\Gamma_{\text{nat},1}$: $\begin{tikzcd} \{*\} \arrow[r, "0"] \arrow[rr, bend right, "1"'] & \mathbb{N} \arrow[loop right, "\text{succ}"] \end{tikzcd}$

Transformations naturelles

Définition. Soient deux foncteurs parallèles $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$.
Une *transformation naturelle* (ou *morphisme de foncteurs*) $\tau : \gamma_1 \Rightarrow \gamma_2$ est formée de :
— une flèche $\tau_X : \gamma_1(X) \to \gamma_2(X)$ de $\mathbf{C}'$ pour tout point X de $\mathbf{C}$,
— telle que $\tau_Y \circ \gamma_1(f) = \gamma_2(f) \circ \tau_X$ dans $\mathbf{C}'$ pour toute flèche $f : X \to Y$ de $\mathbf{C}$,
autrement dit, le carré suivant est commutatif dans la catégorie $\mathbf{C}'$:

$$\begin{tikzcd} \gamma_1(X) \arrow[r, "\gamma_1(f)"] \arrow[d, "\tau_X"] & \gamma_1(Y) \arrow[d, "\tau_Y"] \\ \gamma_2(X) \arrow[r, "\gamma_2(f)"] & \gamma_2(Y) \end{tikzcd}$$

Exemple. Le foncteur List : **Ens** $\to$ **Ens** associe
— à tout ensemble X l'ensemble $\mathrm{List}(X)$ des listes d'éléménts de X
— et à toute fonction $f : X \to Y$ la fonction $\mathrm{List}(f) : (a_1, \ldots, a_k) \mapsto (f(a_1), \ldots, f(a_k))$.
La transformation naturelle $\eta : \mathrm{Id} \Rightarrow \mathrm{List}$ est définie par :

$$\eta_X : X \to \mathrm{List}(X) \ : \ a \mapsto (a)$$

La transformation naturelle $\mu : \mathrm{List}^2 \Rightarrow \mathrm{List}$ est définie par :

$$\mu_X : \mathrm{List}(\mathrm{List}(X)) \to \mathrm{List}(X) \ :$$

$$((a_{1,1}, \ldots, a_{1,k_1}), \ldots, (a_{n,1}, \ldots, a_{n,k_n})) \mapsto (a_{1,1}, \ldots, a_{1,k_1}, \ldots, a_{n,1}, \ldots, a_{n,k_n})$$

Définition. La *catégorie* $\mathbf{Fonct}(\mathbf{C}, \mathbf{C}') = \mathbf{C}'^{\mathbf{C}}$ *des foncteurs de* $\mathbf{C}$ *vers* $\mathbf{C}'$
a pour points les foncteurs de $\mathbf{C}$ vers $\mathbf{C}'$ et pour flèches les transformations naturelles.

Définition. Un *isomorphisme naturel* est un iso dans une catégorie $\mathbf{Fonct}(\mathbf{C}, \mathbf{C}')$.

Propriété. Un isomorphisme naturel est une transformation naturelle τ telle que chaque flèche τ_X est un iso dans $\mathbf{C}'$.

Définition. Un foncteur $\gamma : \mathbf{C} \to \mathbf{Ens}$ est *représentable*
s'il est naturellement isomorphe à un foncteur Hom :

$$\gamma(-) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, -) \text{ pour un point } X \text{ de } \mathbf{C}$$

Exemple. Le foncteur $P : \mathbf{Gr} \to \mathbf{Ens}$ associe à tout graphe l'ensemble des ses points.
Soit Γ_0 le graphe formé d'un seul point, sans flèche.
Alors $P(\Gamma) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Gr}}(\Gamma_0, \Gamma)$ pour tout graphe Γ.
Plus précisément, il y a un isomorphisme naturel $P \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Gr}}(\Gamma_0, -)$.
Donc le foncteur P est représentable ; il est représenté par le graphe Γ_0.

Equivalence de catégories

Remarque. Un *isomorphisme de catégories* est un isomorphisme dans la catégorie **Cat**, c'est-à-dire un couple de foncteurs inverses :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[r, bend left, "\gamma"] & \mathbf{C}' \arrow[l, bend left, "\gamma'"] \end{tikzcd} \qquad \text{avec } \gamma'.\gamma = \mathrm{id}_{\mathbf{C}} \text{ et } \gamma.\gamma' = \mathrm{id}_{\mathbf{C}'}$$

Notation : $\mathbf{C} \cong \mathbf{C}'$.
Cela signifie que le foncteur γ est formé de deux bijections : $(\gamma_{\mathtt{Pt}})^{-1} = \gamma'_{\mathtt{Pt}}$ et $(\gamma_{\mathtt{Fl}})^{-1} = \gamma'_{\mathtt{Fl}}$.

Définition. Une *équivalence de catégories* est
un couple de foncteurs "inverses à équivalence naturelle près" :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[r, bend left, "\gamma"] & \mathbf{C}' \arrow[l, bend left, "\gamma'"] \end{tikzcd} \qquad \text{avec } \gamma'.\gamma \cong \mathrm{id}_{\mathbf{C}} \text{ et } \gamma.\gamma' \cong \mathrm{id}_{\mathbf{C}'}$$

Notation : $\mathbf{C} \simeq \mathbf{C}'$.

Exemple.

$$\mathbf{C} \ : \quad \begin{tikzcd} X \arrow[loop right, "\mathrm{id}_X"] \end{tikzcd} \qquad\qquad \mathbf{C}' \ : \quad \begin{tikzcd} \mathrm{id}_Y \arrow[loop left] & Y \arrow[l, loop left] \arrow[r, bend left, "f"] & Z \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \arrow[loop right, "\mathrm{id}_Z"] \end{tikzcd}$$

Bien sûr $\mathbf{C} \not\cong \mathbf{C}'$.
$\gamma : \mathbf{C} \to \mathbf{C}' : X \mapsto Y \ , \ \mathrm{id}_X \mapsto \mathrm{id}_Y$
$\gamma' : \mathbf{C}' \to \mathbf{C} : Y, Z \mapsto X \ , \ f, f^{-1}, \mathrm{id}_Y, \mathrm{id}_Z \mapsto \mathrm{id}_X$
Alors $\gamma'.\gamma = \mathrm{id}_{\mathbf{C}}$ mais $\gamma.\gamma' \neq \mathrm{id}_{\mathbf{C}'}$
Cependant $\gamma.\gamma' \cong \mathrm{id}_{\mathbf{C}'}$:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{id}_Y \arrow[loop left] & Y \arrow[l, loop left] \arrow[r, bend left, "f"] & Z \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \arrow[loop right, "\mathrm{id}_Z"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathbf{C}'}"] \arrow[d, Rightarrow, "\tau"] & \\ & \arrow[r, "\gamma.\gamma'"'] \arrow[u, Rightarrow, "\tau^{-1}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{id}_Y \arrow[loop left] & Y \arrow[l, loop left] \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[d, bend right, "\mathrm{id}_Y"'] & Z \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \arrow[loop right, "\mathrm{id}_Z"] \arrow[d, bend right, "f"'] \\ \mathrm{id}_Y \arrow[loop left] & Y \arrow[l, loop left] \arrow[r, bend left, "\mathrm{id}_Y"] \arrow[u, bend right, "\mathrm{id}_Y"'] & Y \arrow[l, bend left, "\mathrm{id}_Y"] \arrow[loop right, "\mathrm{id}_Y"] \arrow[u, bend right, "f^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

Donc $\mathbf{C} \simeq \mathbf{C}'$.