

Vecteurs Gaussiens

1 Rappels sur les variables aléatoires réelles Gaussiennes.

Définition 1 X suit une loi normale ou Gaussienne centrée réduite, notée $\mathcal{N}(0, 1)$ si la loi de X a pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

Quelques propriétés :

• **La fonction caractéristique :**

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, alors

$$\phi_X(t) = E(e^{itX}) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

En effet :

$$\phi_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Or

$$\left| \frac{d}{dt} \left(e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} \right) \right| = \left| ix e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} \right| \leq |x| e^{-\frac{x^2}{2}} \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}).$$

En appliquant le théorème de dérivation sous le signe somme, puis en intégrant par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} \phi'_X(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} ix e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \left[\frac{-i}{\sqrt{2\pi}} e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} t e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= -t \phi_X(t). \end{aligned}$$

Or $\phi_X(0) = 1$, il en résulte que $\forall t \in \mathbb{R}, \phi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

• **Les moments de X :**

$$\begin{aligned} E(X^k) &= 0 \text{ si } k \text{ est impair} \\ E(X^{2k}) &= \frac{(2k)!}{2^k k!} \end{aligned}$$

En effet, comme $E(|X|^{2k}) < +\infty$, en appliquant le théorème de dérivation sous le signe somme, on obtient

$$\begin{aligned} \phi_X^{(2k)}(t) &= E\left((iX)^{2k} e^{itX}\right), \\ \phi_X^{(2k)}(0) &= (-1)^k E\left(X^{2k}\right). \end{aligned}$$

Or

$$\phi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} = \sum_{k \geq 0} \left(\frac{-t^2}{2} \right)^k \frac{1}{k!} = \sum_{k \geq 0} \frac{\phi_X^{(k)}(0)}{k!} t^k.$$

D'où

$$\phi_X^{(2k)}(0) = (-1)^k \frac{(2k)!}{2^k k!}.$$

Définition 2 Soit $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. On dit que Y suit la loi normale (ou Gaussienne) de paramètres (m, σ^2) , notée $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ si la variable $(Y - m)/\sigma$ suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

En particulier, si X suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, alors la variable $\sigma X + m$ est de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, ce qui permet de montrer aisément que :

-

$$E(Y) = m, \quad \text{Var}(Y) = \sigma^2,$$

-la densité de la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ est :

$$f_Y(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},$$

-la fonction caractéristique de la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ est :

$$\phi_Y(t) = e^{itm - \frac{\sigma^2 t^2}{2}},$$

En utilisant les fonctions caractéristiques, on montre aisément que

-si $Y \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et $c \in \mathbb{R}$, alors $Y + c$ suit une loi $\mathcal{N}(m + c, \sigma^2)$,

-la somme de 2 variables aléatoires indépendantes, respectivement de lois $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et $\mathcal{N}(m', \sigma'^2)$ est une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(m + m', \sigma^2 + \sigma'^2)$,

- plus généralement que toute combinaison linéaire de variables aléatoires Gaussiennes indépendantes est Gaussienne.

Dans la suite du cours, nous convenons que les variables constantes sont de Gaussiennes de variance nulle.

Les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ sont des vecteurs colonnes.

2 Vecteurs Gaussiens en dimension n .

2.1 Définition et premières propriétés.

Définition 3 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. On dit que $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$

est un vecteur Gaussien si toute combinaison linéaire de ses composantes $X_1, \dots, X_n$ est une variable aléatoire réelle Gaussienne.

Remarques : Si $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ est un vecteur Gaussien, alors pour tout i , X_i est une

variable aléatoire réelle Gaussienne. La réciproque est fausse, un contre-exemple est donné dans l'exercice suivant. Par contre, si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires Gaussiennes

indépendantes, alors $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ est un vecteur Gaussien.

Exercice 1. Soit U et ϵ deux variables aléatoires indépendantes respectivement de lois $\mathcal{N}(0, 1)$ et de Bernoulli de paramètre $1/2$. Soit $X_1 = U$ et $X_2 = U \mathbb{1}_{\epsilon=0} - U \mathbb{1}_{\epsilon=1}$. Montrer que X_1 et X_2 sont de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et que $X_1 + X_2$ ne suit pas une loi normale.

2.2 Fonction caractéristique.

Proposition 1 Soit X un vecteur Gaussien de $\mathbb{R}^n$. Soit $m = E(X) = \begin{pmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \\ \vdots \\ E(X_n) \end{pmatrix}$ et Σ la

matrice de covariance de X :

$$\Sigma_{i,j} = \text{Cov}(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j).$$

La fonction caractéristique de la loi de X est donnée pour tout $t \in \mathbb{R}^n$ par :

$$\phi_X(t) = \exp \left(i \langle t, m \rangle - \frac{1}{2} t^* \Sigma t \right).$$

Preuve :

Pour tout $t \in \mathbb{R}^n$,

$$\phi_X(t) = E \left(e^{i \langle t, X \rangle} \right) = E(e^{i(t_1 X_1 + \dots + t_n X_n)}).$$

Soit $Y = t_1 X_1 + \dots + t_n X_n$. Puisque X est un vecteur Gaussien, Y est une v.a.r Gaussienne.

$$\begin{aligned} E(Y) &= \langle t, m \rangle \\ \text{Var}(Y) &= t^* \Sigma t. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_X(t) &= \phi_Y(1) = \exp(iE(Y) - \frac{1}{2}\text{Var}(Y)) \\ &= \exp \left(i \langle t, m \rangle - \frac{1}{2} t^* \Sigma t \right). \end{aligned}$$

Conséquence : La loi de X est entièrement déterminée par la donnée de m et Σ . Nous noterons $X \sim \mathcal{N}_n(m, \Sigma)$.

2.3 Indépendance.

Proposition 2 Soit $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ un vecteur Gaussien. Les composantes de X sont indé-

pendantes si et seulement si la matrice de covariance de X est diagonale c'est-à-dire si et seulement si pour tout i, j , $\text{Cov}(X_i, X_j) = 0$.

Preuve :

Si les X_i sont indépendantes alors pour tout i, j , $Cov(X_i, X_j) = 0$.

Réciproquement, si pour tout i, j , $Cov(X_i, X_j) = 0$, alors

$$\phi_X(t) = \exp \left(i \sum_{i=1}^n t_i E(X_i) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n t_i^2 Var(X_i) \right) = \prod_{i=1}^n \phi_{X_i}(t)$$

donc les X_i sont indépendantes. Nous laissons en exercice la preuve de la proposition suivante, qui est une généralisation de la Proposition 2 :

Proposition 3 Soit $X = \begin{pmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{X}_2 \\ \vdots \\ \tilde{X}_p \end{pmatrix}$ un vecteur Gaussien de $\mathbb{R}^n$ de matrice de covariance Σ .

On note $\Sigma_{\tilde{X}_i}$ la matrice de covariance du vecteur $\tilde{X}_i$. Les vecteurs $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{X}_p$ sont indépendants si et seulement si la matrice Σ est diagonale par blocs, de la forme :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{\tilde{X}_1} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \Sigma_{\tilde{X}_2} & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & \Sigma_{\tilde{X}_p} \end{pmatrix}.$$

2.4 Transformation affine.

Proposition 4 Soit X un vecteur Gaussien de loi $\mathcal{N}_n(m, \Sigma)$, A une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ et b un vecteur de $\mathbb{R}^p$. Alors $AX + b$ est un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}_p(Am + b, A\Sigma A^*)$.

Preuve :

Soit $Z = AX + b$. Z est un vecteur Gaussien car toute combinaison linéaire des Z_i est Gaussienne.

$$\begin{aligned} \phi_Z(t) &= E \left(e^{i\langle t, AX+b \rangle} \right) \\ &= e^{i\langle t, b \rangle} E \left(e^{i\langle A^*t, X \rangle} \right) \\ &= e^{i\langle t, b \rangle} \phi_X(A^*t) \\ &= e^{i\langle t, b \rangle} e^{i\langle A^*t, m \rangle - \frac{1}{2} t^* A \Sigma A^* t} \\ &= e^{i\langle t, b + Am \rangle - \frac{1}{2} t^* (A \Sigma A^*) t} \end{aligned}$$

On en déduit que $Z \sim \mathcal{N}_p(Am + b, A\Sigma A^*)$.

Dans le cas particulier où $X \sim \mathcal{N}_n(0, I_n)$, ce qui signifie que les X_i sont i.i.d de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, $AX + b \sim \mathcal{N}_p(b, AA^*)$.

Proposition 5 Soit $m \in \mathbb{R}^n$ et Σ une matrice symétrique positive (c'est-à-dire que pour tout $t \in \mathbb{R}^n$, $t^* \Sigma t \geq 0$). On peut construire une matrice A telle que $AA^* = \Sigma$, par conséquent, à partir d'un vecteur X de loi $\mathcal{N}_n(0, I_n)$, on peut construire un vecteur de loi $\mathcal{N}_n(m, \Sigma)$, il suffit de considérer le vecteur $Y = AX + m$.

Remarque : Toute matrice de covariance est symétrique, positive car $t^*\Sigma t = \text{Var}(\sum_{i=1}^n t_i X_i) \geq 0$.

Preuve de la proposition :

Σ est symétrique, donc diagonalisable dans une base orthonormée. Il existe une matrice P orthogonale et une matrice Δ diagonale telles que $\Sigma = P\Delta P^*$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de Σ . Pour tout i , soit $u^{(i)}$ un vecteur propre associé à λ_i .

$$0 \leq (u^{(i)})^* \Sigma u^{(i)} = \langle u^{(i)}, \Sigma u^{(i)} \rangle = \lambda_i \|u_i\|^2.$$

On en déduit que pour tout i , $\lambda_i \geq 0$, ce qui permet de considérer la matrice diagonale $\Delta^{1/2}$, dont les éléments de la diagonale sont les racines des λ_i . Nous concluons en remarquant que $\Sigma = P\Delta^{1/2}(P\Delta^{1/2})^*$.

2.5 Densité.

Théorème 1 Soit Y un vecteur Gaussien de loi $\mathcal{N}_n(m, \Sigma)$. La loi de Y admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si Σ est inversible, et dans ce cas, cette densité est

$$f_Y(y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det(\Sigma)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(y-m)^* \Sigma^{-1}(y-m)\right).$$

Si Σ n'est pas inversible, la loi de Y est portée par un sous espace affine de $\mathbb{R}^n$ de dimension $\text{rang}(\Sigma)$.

Preuve : Soit X de loi $\mathcal{N}_n(0, I_n)$ et A telle que $AA^* = \Sigma$ ($A = P\Delta^{1/2}$). On a alors $\text{rg}(A) = \text{rg}(\Delta) = \text{rg}(\Sigma)$. Y a même loi que $AX + m$. Soit $E = \{Ax + m, x \in \mathbb{R}^n\}$. E est un sous espace affine de $\mathbb{R}^n$ de dimension $\text{rg}(\Sigma)$.

$$P(Y \in E) = P(AX + m \in E) = 1.$$

Soit P_Y la loi de probabilité de Y . $P_Y(E) = 1$, or si $\text{rg}(\Sigma) < n$ la mesure de Lebesgue de E est nulle. P_Y n'est donc pas absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$, il n'y a pas de densité.

Supposons désormais que Σ est inversible. Soit h une fonction mesurable bornée de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

$$E(h(Y)) = \int_{\mathbb{R}^n} h(Ax + m) f_X(x) dx.$$

Nous effectuons le changement de variables $y = Ax + m = \phi(x)$. Si A est inversible, ϕ est un C^1 difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et

$$E(h(Y)) = \int_{\mathbb{R}^n} h(y) f_X(A^{-1}(y-m)) |det(A^{-1})| dy.$$

Or $f_X(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \exp(-\frac{1}{2}\|x\|^2)$. Il en résulte que

$$E(h(Y)) = \int_{\mathbb{R}^n} h(y) \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \exp(-\frac{1}{2}(A^{-1}(y-m))^*(A^{-1}(y-m)) |det(A^{-1})| dy.$$

Nous concluons en remarquant que $|det(A^{-1})| = 1/\sqrt{\det(\Sigma)}$ puisque $AA^* = \Sigma$. De plus, $(A^{-1})^* A^{-1} = \Sigma^{-1}$.

2.6 Espérance conditionnelle :

Proposition 6 Soit $(Y, X_1, \dots, X_p)$ un vecteur Gaussien de $\mathbb{R}^{p+1}$. $E(Y|X_1, \dots, X_p)$ est une fonction affine de $X_1, \dots, X_p$. De plus, $Y - E(Y|X_1, \dots, X_p)$ est indépendante de $X_1, \dots, X_p$.

Preuve On commence par chercher la projection orthogonale dans $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de Y sur le sous espace vectoriel engendré par les variables aléatoires $1, X_1, \dots, X_p$. Soit $Z = \beta + \alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_p X_p$ cette projection. $Y - (\alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_p X_p)$ est orthogonale aux variables $1, X_1, \dots, X_p$, ce qui se traduit par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} E(Y - \beta - \alpha_1 X_1 - \dots - \alpha_p X_p) &= 0 \\ \forall j = 1, \dots, p \quad E((Y - \beta - \alpha_1 X_1 - \dots - \alpha_p X_p) X_j) &= 0 \end{aligned}$$

Ce système d'équation équivaut à :

$$\begin{aligned} \beta &= E(Y) - \sum_{i=1}^p \alpha_i E(X_i) \\ \forall j = 1, \dots, p \quad \text{Cov}(Y - \sum_{i=1}^p \alpha_i X_i, X_j) &= 0, \end{aligned}$$

ce qui s'écrit également sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \beta &= E(Y) - \sum_{i=1}^p \alpha_i E(X_i) \\ \Sigma_X \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \text{cov}(Y, X_1) \\ \text{cov}(Y, X_2) \\ \vdots \\ \text{cov}(Y, X_p) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où Σ_X désigne la matrice de covariance de X . Si Σ_X est inversible, il existe une unique solution $(\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta)$ au système ci-dessus. Sinon il existe une relation de dépendance linéaire entre les X_i , il n'y a donc pas unicité de $(\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta)$.

Montrons que Z correspond aussi à $E(Y|X_1, \dots, X_p)$. Puisque Z est mesurable relativement à la tribu engendrée par $X_1, \dots, X_p$, il suffit de vérifier que pour tout borélien A de $\mathbb{R}^p$

$$E(Z \mathbf{1}_{(X_1, \dots, X_p) \in A}) = E(Y \mathbf{1}_{(X_1, \dots, X_p) \in A}),$$

ce qui équivaut à

$$E((Y - \beta - \alpha_1 X_1 - \dots - \alpha_p X_p) \mathbf{1}_{(X_1, \dots, X_p) \in A}) = 0.$$

Puisque $(Y, X_1, \dots, X_p)$ est un vecteur Gaussien, il en est de même pour le vecteur $(Y - \beta - \alpha_1 X_1 - \dots - \alpha_p X_p, X_1, \dots, X_p)$. De plus, puisque la variable $Y - Z$ est centrée et orthogonale dans $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ aux variables $1, X_1, \dots, X_p$, on en déduit que pour tout j de 1 à p , $\text{Cov}(Y - Z, X_j) = 0$, ce qui entraîne l'indépendance de $Y - Z$ avec le vecteur $(X_1, \dots, X_p)$ en vertu de la proposition 3. Ceci implique que

$$E((Y - Z) \mathbf{1}_{(X_1, \dots, X_p) \in A}) = E(Y - Z)P((X_1, \dots, X_p) \in A) = 0$$

puisque $E(Y - Z) = 0$.

3 Théorèmes de Cochran et applications.

3.1 Quelques rappels sur les lois du khi-deux.

Définition 4 On appelle loi du khi-deux à n degrés de liberté la loi de $X_1^2 + \dots + X_n^2$ où les X_i sont i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Cette loi est notée $\chi^2(n)$.

Exercice 2.

- 1) Soit Z une variable qui suit une loi du khi-deux à n degrés de liberté. Montrer que $E(Z) = n$ et $Var(Z) = 2n$.
- 2) Montrer qu'une loi du khi-deux à 1 degré de liberté est une loi Gamma de paramètres $(1/2, 1/2)$.
- 3) En déduire que la loi du khi-deux à n degrés de liberté correspond à la loi Gamma de paramètres $(n/2, 1/2)$.

Proposition et définition 1 Soit X un vecteur Gaussien de loi $\mathcal{N}_n(m, I_n)$. La loi de $X_1^2 + \dots + X_n^2$ ne dépend de m que via sa norme euclidienne. Cette loi est appelée loi du khi-deux décentré à n degrés de liberté, et se note $\chi^2(n, \|m\|^2)$.

Preuve Soit m' un vecteur de $\mathbb{R}^n$ tel que $\|m'\| = \|m\|$. Il existe une transformation orthogonale P telle que $Pm = m'$. Le vecteur $Y = PX$ a donc pour loi $\mathcal{N}_n(m', I_n)$. Comme P est une transformation orthogonale, $\|Y\|^2 = \|X\|^2$. Soit Z un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}_n(m', I_n)$. Nous voulons montrer que $\|Z\|^2$ a même loi que $\|X\|^2$. Or Z a même loi que Y donc $\|Z\|^2$ a même loi que $\|Y\|^2$. Puisque $\|Y\|^2 = \|X\|^2$, il en résulte que $\|Z\|^2$ a même loi que $\|X\|^2$.

3.2 Théorèmes de Cochran.

Théorème 2 Soit X un vecteur Gaussien de loi $\mathcal{N}_n(0, \sigma^2 I_n)$. Soit $E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_p$ une décomposition de $\mathbb{R}^n$ en p sous-espaces orthogonaux de dimensions respectives $r_1, \dots, r_p$. On note X_{E_i} la projection orthogonale de X sur E_i . Alors les vecteurs $X_{E_1}, X_{E_2}, \dots, X_{E_p}$ sont indépendants, de plus, pour tout i , la variable $\|X_{E_i}\|^2$ a pour loi $\sigma^2 \chi^2(r_i)$.

Preuve Soit $(e_{i,1}, \dots, e_{i,r_i})$ une base orthonormée de E_i .

$$e = (e_{1,1}, \dots, e_{1,r_1}, \dots, e_{p,1}, \dots, e_{p,r_p})$$

forme une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. Soit P la matrice de passage de la base e à la base canonique de $\mathbb{R}^n$, notée v . P est une matrice orthogonale. Notons pour tout i de 1 à p et j

de 1 à r_i , $Y_{i,j} = \langle X, e_{i,j} \rangle$. Soit $Y = \begin{pmatrix} Y_{1,1} \\ \vdots \\ Y_{1,r_1} \\ \vdots \\ Y_{p,1} \\ \vdots \\ Y_{p,r_p} \end{pmatrix}$ le vecteur colonne des coordonnées du vecteur

$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ dans la base e , il en résulte que alors $Y = PX$. Donc Y a pour loi $\mathcal{N}_n(0, \sigma^2 I_n)$.

Les variables $Y_{i,j}$ sont donc i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Puisque

$$X_{E_i} = \sum_{j=1}^{r_i} Y_{i,j} e_{i,j},$$

on en déduit que les vecteurs $X_{E_1}, X_{E_2}, \dots, X_{E_p}$ sont indépendants. Par ailleurs, $\|X_{E_i}\|^2 = \sum_{j=1}^{r_i} Y_{i,j}^2$ a pour loi $\sigma^2 \chi^2(r_i)$.

Théorème 3 (*version non centrée*) Soit X un vecteur Gaussien de loi $\mathcal{N}_n(m, \sigma^2 I_n)$. Soit $E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_p$ une décomposition de $\mathbb{R}^n$ en p sous-espaces orthogonaux de dimensions respectives $r_1, \dots, r_p$. On note X_{E_i} la projection orthogonale de X sur E_i . Alors les vecteurs $X_{E_1}, X_{E_2}, \dots, X_{E_p}$ sont indépendants, de plus, pour tout i , la variable $\|X_{E_i}\|^2$ a pour loi $\sigma^2 \chi^2(r_i, \|m_{E_i}\|^2/\sigma^2)$ où m_{E_i} désigne la projection orthogonale de m sur E_i .

Preuve : La preuve de l'indépendance est la même que pour le théorème précédent. Il reste à déterminer la loi de $\|X_{E_i}\|^2$. Ici, Y a pour loi $\mathcal{N}_n(Pm, \sigma^2 I_n)$. Puisque $Y_{i,j} = \langle X, e_{i,j} \rangle$,

$$\frac{1}{\sigma} \begin{pmatrix} Y_{i,1} \\ \vdots \\ Y_{i,r_i} \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}_{r_i} \left(\frac{1}{\sigma} \begin{pmatrix} \langle m, e_{i,1} \rangle \\ \vdots \\ \langle m, e_{i,r_i} \rangle \end{pmatrix}, I_{r_i} \right).$$

Il en résulte que $\frac{1}{\sigma^2} \|X_{E_i}\|^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^{r_i} Y_{i,j}^2 \sim \chi^2(r_i, \|m_{E_i}\|^2/\sigma^2)$.