

# Algorithmique TD 4: Programmation dynamique

## Exercice 1. Coefficients binomiaux

---

Les coefficients binomiaux  $\binom{n}{p}$  sont définis par la récurrence :

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} \text{ pour } 0 < p < n; \text{ et } \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

**a.** Écrire l'algorithme récursif correspondant directement à cette formule (sans mémorisation). Justifier qu'il effectue un nombre exponentiel d'opérations.

**b.** Dessiner le graphe des appels et montrer qu'il y a des appels redondants. Combien d'appels sont utiles (non redondants) ?

**c.** Écrire un programme récursif avec mémorisation et analyser la place mémoire utilisée, et le nombre total d'opérations effectuées.

**d.** Écrire un programme itératif sans calcul redondant. Donner le nombre d'opérations et la place mémoire requise.

**e.** On dispose d'une opération de multiplication sur des entiers exacts. Justifier que le seul coefficient  $\binom{n}{p}$  est calculé avec  $O(\min(p, n-p))$  multiplications. Comparer au coût amorti (coût moyen par coefficient) des algorithmes précédents.

## Exercice 2. Élevage de poulets

---

Vous gérez un élevage de volailles contenant  $m$  espèces différentes (poulet, chapon, dinde, poularde, etc). Vous devez leur distribuer  $n$  épis de maïs pour leur alimentation. Selon la quantité de maïs reçu, chaque espèce prendra un certain poids, mais celui-ci est différent pour chaque espèce, et n'est pas linéaire en le nombre d'épis de maïs mangé.

Il s'agit de trouver la meilleure répartition des  $n$  épis de maïs entre les  $m$  espèces de volaille, garantissant une prise de poids maximale, et donc plus de nourriture à Noël.

On note  $p_i(n_i) \in \mathbb{Z}_+$  le poids pris par les volailles de l'espèce  $i \in \{1 \dots m\}$  lorsqu'ils mangent  $n_i \in \{1 \dots n\}$  épis de maïs.

**a.** Exprimer la fonction  $P$  que l'on cherche à optimiser en fonction des  $p_i$ . Quels sont ses arguments, quelles sont ses contraintes éventuelles ?

Cette fonction calcule le poids obtenu par la meilleure répartition du maïs.

**b.** Voici un exemple de valeurs de prise de poids pour 3 volailles. Trouver une solution optimale pour la répartition de 3, 5 et 7 épis de maïs.

$n_i$	Poulet : $p_1(n_1)$	Chapon : $p_2(n_2)$	Dinde : $p_3(n_3)$
0	0	0	0
1	3	6	5
2	7	12	10
3	12	16	15
4	17	20	20
5	26	22	25
6	35	24	30
7	45	26	35

c. Justifier la formulation récursive :

$$P(n, m) = \max_{k=0\dots n} \{p_m(k) + P(n - k, m - 1)\}.$$

Quelles sont les conditions initiales ?

d. Écrire un algorithme récursif avec mémoïsation qui calcule la prise de poids optimale  $P(n, m)$  en temps polynomial en  $m$  et  $n$ . Quelle est la place mémoire allouée ? Préciser le nombre d'opérations.

e. Dessiner le graphe de dépendance des appels.

f. En déduire un algorithme itératif. Donner le coût en temps et en mémoire.

g. Écrire un algorithme donnant la répartition optimale des épis de maïs.