Valeurs propres

1. Les valeurs singulières sont $\sigma_1 = \sqrt{3+\sqrt{3}}$ et $\sigma_2 = \sqrt{3-\sqrt{3}}$.

2. Les valeurs singulières sont $\sigma_1 = 3$ et $\sigma_2 = 1$.

3. La decomposition en éléments singuliers de C est :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{12}} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{2}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

4. La decomposition en éléments singuliers de D est :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. La decomposition en éléments singuliers de E est :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$U = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

6. On considère la décomposition en valeurs singulières de $A = U\Sigma V^T$, avec $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$, et U et V des matrices orthogonales.
On a donc que $\|A\|_2 = \|U\Sigma V^T\|_2$.

   - La norme d'un vecteur est invariante par la multiplication d'une matrice orthogonale, c'est à dire que $\|Ux\|_2{=}\|x\|_2$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
   - La norme d'un produit est inférieure ou égale aux produits des normes de chacun des éléments. c'est à dire que $\|AB\|_2{\leq}\|A\|_2\|B\|_2$.

   On applique ces deux propriétés au quotient :

$$\begin{aligned} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} &= \frac{\|U\Sigma V^T x\|_2}{\|x\|_2} \\ &= \frac{\|\Sigma V^T x\|_2}{\|V^T x\|_2} \\ &\leq \|\Sigma\|_2 \frac{\|V^T x\|_2}{\|V^T x\|_2} \\ &\leq \|\Sigma\|_2 \end{aligned}$$

   La norme euclidienne d'une matrice est sa plus grande valeur singulière.
   On obtient donc que $\dfrac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \leq \sigma_1$, pour tout $x \in R^m$.
   Nous devons vérifier que le maximum est atteint. Par définition de la valeur singulière, nous savons qu'il existe x tel que $Ax = \sigma_1 x$, donc $\|Ax\|_2 = \|\sigma_1 x\|_2 = \sigma_1\|x\|_2$. En choisissant $\|x\|_2 = 1$, nous avons donc que la majoration proposée peut être atteinte par au moins 1 vecteur.
   Ce dernier résultat conclue la démonstration.