Valeurs propres

1. - Trouvez les valeurs propres de A et B et $A+B$:
     $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$,
   - Les valeurs propres de $A+B$ (sont égales à)(ne sont pas égales à) les valeurs propres de A plus les valeurs propres de B.

2. - Trouvez les valeurs propres de A, B, AB et BA.
     $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$,
   - Les valeurs propres de AB sont-elles égales aux valeurs propres de A multipliées par les valeurs propres de B ?
   - Les valeurs propres de AB sont-elles égales aux valeurs propres de BA ?

3. Montrez que -1 est une valeur propre de $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

4. Montrez que $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ est un vecteur propre de $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$.

5. Étant donné que 2 est une valeur propre de $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, déterminez sa multiplicité algébrique et sa multiplicité géométrique.

6. Montrez que les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont les éléments déjà sur sa diagonale.

7. Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Étant donné que 1 est une valeur propre de $\mathbf{A}$, trouvez une base de l'espace propre de $\mathbf{A}$ associé à cette valeur propre.

8. Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Diagonalisez $\mathbf{A}$ en trouvant une matrice inversible $\mathbf{P}$ et une matrice diagonale $\mathbf{D}$ telles que $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$.

9. Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Démontrez que si $\mathbf{A}$ possède n valeurs propres distinctes, alors $\det(\mathbf{A})$ est le produit de ces valeurs propres.

10. Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Montrez que chaque valeur propre de $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ est un nombre réel non négatif.

11. Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10-5a & -16+10a \\ 5-3a & -8+6a \end{bmatrix}$. Déterminez s'il existe une valeur de a pour laquelle $\mathbf{A}$ *n'est pas*

diagonalisable.

12. Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ une matrice hermitienne. Soit $\mathbf{v}$ un vecteur propre de $\mathbf{A}$ associé à la valeur propre λ.

    a. Montrez que
    $$\left(\overline{\mathbf{Av}}\right)^T \mathbf{v} = \overline{\mathbf{v}}^T \mathbf{Av}.$$

    b. Utilisez le résultat précédent pour déduire que $\overline{\lambda} = \lambda$

13. Supposons que $S^* = S$ et $Sx = \lambda x$ et $Sy = \mu y$ sont tous réels. Montrer que $Sx = \lambda' x$ et $xSy = \lambda\mu y$ et $ySx = \lambda\mu y$. Montrer que $\lambda\mu$ doit être nul si $\lambda \neq \mu$.

14. Cette matrice A est presque symétrique, mais ses vecteurs propres sont loin d'être orthogonaux : $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 10^{-15} \\ 0 & 1 + 10^{-15} \end{bmatrix}$, a pour vecteurs propres $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $[?]$ Quel est l'angle entre les vecteurs propres ?