Valeurs propres

1. Pour trouver les valeurs propres des A, B et $A+B$, commençons par calculer la somme :

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix}$$

   Pour calculer les valeurs propres de A, nous devons résoudre l'équation $det(A-\lambda I)=0$:

$$\begin{aligned} det(A-\lambda I) &= 0\\ \det\begin{bmatrix}3-\lambda & 0\\ 1 & 1-\lambda\end{bmatrix} &= 0\\ (3-\lambda)(1-\lambda) &= 0 \end{aligned}$$

   On obtient $\lambda_1=3$ et $\lambda_2=1$.
   Pour calculer les valeurs propres de B, nous devons résoudre l'équation $det(B-\lambda I)=0$:

$$\begin{aligned} det(3-\lambda I) &= 0\\ \det\begin{bmatrix}1-\lambda & 1\\ 0 & 3-\lambda\end{bmatrix} &= 0\\ (3-\lambda)(1-\lambda) &= 0 \end{aligned}$$

   On obtient $\lambda_1=3$ et $\lambda_2=1$.
   Pour calculer les valeurs propres de $A+B$, nous devons résoudre l'équation $det(A+B-\lambda I)=0$:

$$\begin{aligned} det(A+B-\lambda I) &= 0\\ \det\begin{bmatrix}4-\lambda & 1\\ 1 & 4-\lambda\end{bmatrix} &= 0\\ (4-\lambda)^2-1 &= 0\\ 16-8\lambda+\lambda^2-1 &= 0\\ \lambda^2-8\lambda+15 &= 0 \end{aligned}$$

   On obtient $\lambda_1=5$ et $\lambda_2=3$.
   On en conclut que les valeurs propres de $A+B$ ne sont pas égales aux valeurs propres de A plus les valeurs propres de B.

2. Pour calculer les valeurs propres de A, nous devons résoudre l'équation $det(A-\lambda I)=0$:

$$\begin{aligned} det(A-\lambda I) &= 0\\ \det\begin{bmatrix}1-\lambda & 0\\ 1 & 1-\lambda\end{bmatrix} &= 0\\ (1-\lambda)(1-\lambda) &= 0 \end{aligned}$$

   On obtient $\lambda_1=1$. Pour calculer les valeurs propres de B, nous devons résoudre l'équation $det(B-\lambda I)=0$:

$$\begin{aligned} det(B-\lambda I) &= 0\\ \det\begin{bmatrix}1-\lambda & 2\\ 0 & 1-\lambda\end{bmatrix} &= 0\\ (1-\lambda)(1-\lambda) &= 0 \end{aligned}$$

On obtient $\lambda_1 = 3$. Pour calculer les valeurs propres de AB, nous devons résoudre l'équation $det(AB - \lambda I) = 0$:

$$\begin{aligned} det(AB - \lambda I) &= 0 \\ \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix} &= 0 \\ (1-\lambda)(3-\lambda) - 2 &= 0 \\ \lambda^2 - 6\lambda + 3 - 2 &= 0 \\ \lambda^2 - 6\lambda + 1 &= 0 \end{aligned}$$

On obtient $\lambda_1^{AB} = 2 + \sqrt{3}$ et $\lambda_2^{AB} = 2 - \sqrt{3}$.
Pour calculer les valeurs propres de BA, nous devons résoudre l'équation $det(BA - \lambda I) = 0$:

$$\begin{aligned} det(BA - \lambda I) &= 0 \\ \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} &= 0 \\ (3-\lambda)(1-\lambda) - 2 &= 0 \\ \lambda^2 - 6\lambda + 3 - 2 &= 0 \\ \lambda^2 - 6\lambda + 1 &= 0 \end{aligned}$$

On obtient $\lambda_1^{BA} = 2 - \sqrt{3}$ et $\lambda_2^{BA} = 2 + \sqrt{3}$.
En faisant le produit des valeurs propres, on obtient que le produit des valeurs propres de A et de B est différent des valeurs propres de AB et de BA.
On remarque aussi que les valeurs propres de AB et de BA sont identiques.

3. Montrons que -1 est une racine du polynôme caractéristique $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$, c'est-à-dire que $\det(\mathbf{A} - (-1)\mathbf{I}) = 0$.
Puisque
$$\mathbf{A} - (-1)\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$
alors
$$\det(\mathbf{A} - (-1)\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 0,$$
On en déduit que -1 est une valeur propre de $\mathbf{A}$.

4. Nous devons montrer que $\mathbf{Au} = \lambda\mathbf{u}$ pour une scalaire λ.
On remarque que
$$\mathbf{Au} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = -2\mathbf{u}.$$
Ainsi,
$$\mathbf{u}$$
est un vecteur propre de $\mathbf{A}$ associé à la valeur propre $\lambda = -2$.

5. Déterminons d'abord le multiplicité géométrique de la valeur propre $\lambda = 2$. Notons que
$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \mathbf{A} - 2\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Sa forme élémentaire réduite est

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

. Puisque cette dernière ne possède qu'une seule colonne pivot (la deuxième), la dimension de $\mathrm{null}(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})$ est $3 - 1 = 2$, d'où la multiplicité géométrique de λ est 2.

Afin de déterminer la multiplicité algébrique, notons que le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$ est

$$\begin{aligned} \chi_{\mathbf{A}}(\lambda) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & -2 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)(-3\lambda + \lambda^2 + 2) \\ &= (2-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda). \end{aligned}$$

Ainsi, le term $(2-\lambda)$ se retrouve deux fois dans la factorisation de $\chi_{\mathbf{A}}(\lambda)$; la multiplicité algébrique de λ est donc également 2.

6. Soit $\mathbf{A}$ une matrice triangulaire de taille $n \times n$. Soit a_i le i-ième élément de la diagonale de $\mathbf{A}$, pour $i = 1, \ldots, n$.
   Les valeurs propres sont précisément les racines du polynôme caractéristique $\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n)$. Puisque $\mathbf{A}$ est triangulaire, $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n$ est aussi triangulaire est son déterminant est $(a_1 - \lambda)(a_2 - \lambda)\cdots(a_n - \lambda)$. Ainsi, les racines de $\chi_{\mathbf{A}}(\lambda)$ sont précisément $a_1, \ldots, a_n$, et les valeurs propres de $\mathbf{A}$ sont les éléments sur sa diagonale.

7. Nous devons trouver une base du noyau de

$$\mathbf{A} - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

   On voit aisément que la forme élémentaire réduite de $\mathbf{A} - \mathbf{I}$ est

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Notons que la première et troisième colonne ne sont pas des colonnes pivots. Ainsi,

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

   est une base du noyau.

8. Nous trouvons les valeurs propres de

$$\mathbf{A}$$

   en trouvant les racines du polynôme caractéristique

$$\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}),$$

c'est-à-dire en résolvant

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda) = 0.$$

Ainsi, les valeurs propres de $\mathbf{A}$ sont 1 et 2.
Notons que

$$\mathbf{A} - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

et que sa FER est

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

d'où

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

une base de $\operatorname{null}(\mathbf{A} - \mathbf{I})$.
Notons que

$$\mathbf{A} - 2\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

et que sa FER est

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

d'où

$$\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

est une base de $\operatorname{null}(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})$.
Ainsi, si

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

et

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

on obtient $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$.

9. Puisque $\mathbf{A}$ possède n valeurs propres distinctes, $\mathbf{A}$ est diagonalisable, et il existe alors une matrice inversible $\mathbf{P}$ et une matrice diagonale $\mathbf{D}$ telles que $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$.
   Ainsi,

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}) = \det(\mathbf{P})\det(\mathbf{D})\det(\mathbf{P}^{-1}) = \det(\mathbf{P})\det(\mathbf{D})\frac{1}{\det(\mathbf{P}^{-1})} = \det(\mathbf{D}).$$

   Mais $\mathbf{D}$ est une matrice diagonale, d'où $\det(\mathbf{D})$ est le produit des éléments sur sa diagonale, qui sont précisément les valeurs propres de $\mathbf{A}$.

10. Soit λ une valeur propre de $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$. Soit $\mathbf{u}$ un vecteur propre de $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ associé à λ.
Alors
$$0 \leq \|\mathbf{Au}\|^2 = (\mathbf{Au})^T(\mathbf{Au}) = \mathbf{u}^T\mathbf{A}^T\mathbf{Au} = \mathbf{u}^T(\lambda\mathbf{u}) = \lambda\|\mathbf{u}\|^2.$$
Puisque $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, $\|\mathbf{u}\|^2 > 0$. Puisque $\lambda\|\mathbf{u}\|^2$ est un nombre réel non négatif et que $\|\mathbf{u}\|^2$ est un nombre réel positif, on doit avoir que λ est un nombre réel non négatif.

11. Puisque $\mathbf{A}$ est de taille 2×2, $\mathbf{A}$ est diagonalisable si $\mathbf{A}$ possède deux valeurs propres distinctes. Nous devons donc d'abord déterminer toutes les valeurs de
$$a$$
pour lesquelles $\mathbf{A}$ ne possède qu'une unique valeur propre.
Le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$ est
$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} 10-5a-\lambda & -16+10a \\ 5-3a & -8+6a-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (10-5a-\lambda)(-8+6a-\lambda) - (-16+10a)(5-3a) \\ &= -80+100a-30a^2-(2+a)\lambda+\lambda^2+80-98a+30a^2 \\ &= 2a-(2+a)\lambda+\lambda^2 \\ &= (2-\lambda)(a-\lambda). \end{aligned}$$
Ainsi, $\mathbf{A}$ ne possède q'une unique valeur propre que lorsque $a = 2$. Notons que dans ce cas,
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$
et $\lambda = 2$ est la valeur propre en question. De plus,
$$\mathbf{A} - 2\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$
. Cette matrice est nettement de rang 1 et sa nullité est inférieure à 2.
Ainsi, la multiplicité géométrique de l'unique valeur propre $\lambda = 2$ est inférieure à sa multiplicité algébrique, d'où $\mathbf{A}$ n'est pas diagonalisable. C'est la seule valeur de a pour laquelle c'est le cas.

12. a. On déroule le calcul :
$$\begin{aligned} \left(\overline{\mathbf{Av}}\right)^T \mathbf{v} &= \overline{\mathbf{v}}^T\overline{\mathbf{A}}^T\mathbf{v} \\ &= \overline{\mathbf{v}}^T\mathbf{Av} \end{aligned}$$

b. On applique la définition de la valeur propre pour A avec v un vecteur propre de norme 1.
$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{v}}^T\mathbf{Av} &= \overline{\mathbf{v}}^T(\lambda\mathbf{v}) & &= \lambda\overline{\mathbf{v}}^T\mathbf{v} \\ &= \lambda \end{aligned}$$

c. On applique la définition de la valeur propre pour A
$$\begin{aligned} \left(\overline{\mathbf{Av}}\right)^T \mathbf{v} &= \overline{\lambda\mathbf{v}}^T\mathbf{v} \\ &= \overline{\lambda}\overline{\mathbf{v}}^T\mathbf{v} \\ &= \overline{\lambda} \end{aligned}$$

On obtient bien le résultat attendu, c'est à dire $\overline{\lambda} = \lambda$

13. On commence par écrire la première définition $Sx = \lambda x$. On multiplie de chaque côté par y^T. On obtient ainsi $y^T Sx = \lambda y^T x$.
On écrit ensuite la seconde définition $Sy = \mu y$. On considère ensuite la transposée $y^T S^T = \mu y^T$. Comme S est symétrique, $y^T S = \mu y^T$. On multiplie de chaque côté par x. On obtient ainsi $y^T Sx = \mu y^T x$.
Enfin, on écrit la seconde définition $Sy = \mu y$, et on multiplie par x^T. On obtient $x^T Sy = \mu x^T y$.
Par définition, du produit scalaire $x^T y = y^T x$. On a donc que $x^T Sy = y^T Sx$.
On réécrit la dernière équation $\lambda y^T x = \mu y^T x$, c'est à dire $0 = (\lambda - \mu) y^T x$. Si $\lambda \neq \mu$, alors $y^T x = 0$, ce qui signifie que les vecteurs y et x sont orthogonaux.

14. Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 1 + 10^{-15}$. On calcule le vecteur propre associé à λ_2. Pour cela, on résout le système linéaire

$$\begin{bmatrix} 1-(1+10^{-15}) & 10^-15 \\ 0 & 1+10^{-15}-(1+10^{-15}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$
$$\begin{bmatrix} 10^{-15} & 10^-15 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

On obtient donc $x_1 = x_2$. Le vecteur $\frac{1}{2}(\sqrt{2}, \sqrt{2})^T$ est donc vecteur propre de la matrice A (on choisit un vecteur propre de norme 1). On calcul ensuite le produit scalaire entre les deux vecteurs : $(1,0)^T \cdot (\frac{1}{2}(\sqrt{2}), \sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(\frac{\pi}{4})$. En effet, par définition du produit scalaire $(a,b) = |a||b|cos(a,b)$. L'angle entre les vecteurs est donc de 45 degré. En pratique, cela signifie que la précision des calculs en double précision (10^15) peut avoir un impact sur la qualité des vecteurs produits et produire de fausses informations sur les propriétés de la matrice. Il faut donc être vigilant sur les ordres de grandeurs des coefficients.