Examen : Fondements Mathématiques pour l'IA

Instructions

Vous avez le droit à une feuille manuscrite recto-verso.
Les exercices sont indépendants.
Les questions dans les exercices sont en grande partie indépendants.

1 Méthodes aux valeurs propres.

Question 1.
Décrire la méthode de la puissance itérée.

Question 2.
La méthode de la puissance itérée permet de calculer une valeur propre. Laquelle ?

Question 3.
Soit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10-5a & -16+10a \\ 5-3a & -8+6a \end{bmatrix} \tag{1}$$

Déterminez s'il existe une valeur de a pour laquelle $\mathbf{A}$ *n'est pas* diagonalisable.

Question 4.
Appliquer 4 itérations de la méthode de la puissance itérée à la matrice $\mathbf{A}$ pour $a = 1$.

Question 5.
Est-ce que

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

est diagonalisable ?
Si oui, exprimez les matrices P, P^{-1} et D de la diagonalisation.

2 Méthodes aux valeurs singulières.

Question 6.
Écrire une décomposition en valeurs singulières de

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Question 7.
Soit la matrice

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -2 & 11 \\ 5 & 10 \\ 14 & -2 \end{bmatrix} \tag{3}$$

et le vecteur $b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$

1. Déterminer une décomposition aux valeurs singulières de $\mathbf{D}$.
2. On définit par Σ^{+}, la matrice obtenu à partir de Σ en remplaçant chaque élément non nul par son inverse et en prenant la transposée de la matrice ainsi obtenue. Calculer $x = V\Sigma^{+}U^{T}b$.

Note 1
x s'appelle solution aux moindres de carrées de $Ax = b$.

3 Méthodes de descente.

Une forme quadratique est un nombre réel. C'est une fonction d'un vecteur de la forme

$$f(x) = \frac{1}{2}x^{T}Ax - b^{T}x + c \tag{3}$$

avec A une matrice, x et b des vecteurs, et c un nombre réel constant.
Soit le problème d'optimisation suivant où la fonction $f : \mathbb{R}^{2} \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$\min f(x, y) = 3x^{2} + 3y^{2}. \tag{4}$$

Question 8.
Écrire sous forme matricielle le problème que l'on veut résoudre.

Question 9.
Quel est le gradient de cette fonction ?

Pour chacun de ces algorithmes, appliquer deux itérations de la méthode en prenant comme point de départ $(x^{0}, y^{0}) = (1, 1)$.

Question 10.
1. La méthode du gradient à pas fixe, avec un pas de 0.1.
2. La méthode de Newton.
3. La méthode des gradients conjugués.