Examen : Fondements Mathématiques pour l'IA - Eléménts de correction

1 Méthodes aux valeurs propres.

Question 1.
La méthode de la puissance itérée s'écrit

1. Soit $\boldsymbol{x}^{(0)}$ tel que $\|\boldsymbol{x}^{(0)}\| = 1$.
2. Pour chaque k, calculer $\boldsymbol{x}^{(k+1)} = A\boldsymbol{x}^{(k)}$.
3. Calculer $r_k = \|\boldsymbol{x}^{(k+1)}\|$.
4. Re-normaliser $\boldsymbol{x}^{(k+1)}$. Répéter à partir de (2).

La renormalisation est nécessaire afin d'éviter la divergence numérique de l'algorithme. D'un point de vue purement théorique, elle n'est pas nécessaire.

La méthode converge avec le ration $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, ce qui signifie que plus lécart entre les deux premières valeurs propres est important, plus lalgorithme convergera rapidement.

Question 2.
La méthode de la puissance itérée permet de calculer la plus valeur propre de plus grand module uniquement.

Question 3.
Pour $a = 2$, la matrice n'est pas diagonalisable.

Question 4.
L'application de la méthode de la puissance itérée n'est pas explicitée.

Question 5.
Les valeurs propres de la matrice sont 2 et 3.

Pour la valeur propre 2, nous avons

$$\mathbf{B} - 2\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

. Nous avons donc 1 seule équation pour définir l'espace propre associée à la valeur propre 2 : $x_2 = -x_3$. Nous pouvons choisir x_1 de la manière que l'on souhaite. Si on choisit $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$, le vecteur propre est $(0, 1, -1)$. Si on choisit $x_1 = 1$ et $x_2 = 0$, le vecteur propre est $(1, 0, 0)$. Les deux vecteurs propres sont indépendants. Il s'agit d'une base de lespace propre associé à la valeur propre 2. Cet espace est de dimension 2.

Pour la valeur propre 3, nous avons

$$\mathbf{B} - 3\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

. L'espace propre associé est définit par 2 équations pour 3 inconnues : $x_2 = 0$ et $-x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$. Si on choisit $x_3 = 1$, on obtient le vecteur propre $x = (2, 0, 1)$. Tous les autres vecteurs solutions de cette équation sont colinéaires à x. Cet espace est de dimension 1.

La somme des dimensions des espaces propres est de 3, soit la dimension de l'espace. La matrice est donc diagonalisable.

Attention :

- Les vecteurs nont pas été normalisés.
- Il n'est pas possible de choisir un vecteur avec tous les coordonnées nulles. Cela ne définit pas un espace vectoriel.

En faisant les calculs, on obtient :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

,

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{4}$$

et

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

.

2 Méthodes aux valeurs singulières.

Question 6.

Une décomposition en valeurs singulières de C est

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$\mathbf{V} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Question 7.

Une décomposition en valeurs singulières de D est

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 11/15 & -2/15 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/15 & 14/15 & 1/3 \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$= \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 15 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

3 Méthodes de descente.

Cette partie a été corrigée en cours.